DYNAMIKA - VYŠETRUJE POHYB HMOTNÝCH OBJEKTOV POD VPLYVOM PÔSOBIACICH SÍL
- MÁME DVA TYPY ÚLOH: 1, D: POHYB
H: SILY, KTORÉ PRÍSLUŠNÝ POHYB SPÔSOBUJÚ
2, D: SILY
H: POHYB HMOTNÝCH OBJEKTOV POD VPLYVOM TÝCHTO SÍL
- SILA, PRIESTOR, ČAS, HMOTA
- VYŠETRUJE POHYB HMOTNÝCH OBJEKTOV POD VPLYVOM PÔSOBIACICH SÍL V URČITOM PRIESTORE
- ČASOVO PRIESTOROVÝ POHYB HMOTY

STATIKA - SILA (VZÁJOMNÉ PÔSOBENIE 2 HB), PRIESTOR (3-ROZMERNÝ, EUKLIDOVSKÝ, RELATÍVNY)
KINEMATIKA - PRIESTOR (POHYB OBJEKTOV V PRIESTORE POČAS PLYNÚCEHO ČASU); ČAS (NEZÁVISÍ OD RÝCHLOSTI POHYBUJÚCICH OBJEKTOV)

HMOTA - OBJEKTÍVNA REALITA EXISTUJÚCA NEZÁVISLE OD NÁS (NÁŠHO VEDOMIA); VEĽKOSŤ HMOTY NÁM URČUJE VELIČINA NAZÝVANÁ HMOTNOSŤ [m] A ROZMER JE V kg
SILA - PRÍČINA POHYBU HMOTY
PRIESTOR - PEVNE SPOJENÝ SO ZEMOU; KAŽDÝ PRIESTOR, KTORÝ BUDE KONAŤ ROVNOMERNÝ POSÚVNY POHYB; POHYB JE VZŤAHOVANÝ K PRIESTORU
HMOTNOSŤ PREDSTAVUJE ZOTRVAČNO-GRAVITAČNÉ VLASTNOSTI HMOTY.
PRE HMOTNÉ OBJEKTY PRIJÍMAME URČITÚ IDEALIZÁCIU
MODEL: 1, HMOTNÝ BOD - NAJJEDNODUCHŠÍ; BOD TELESA, DO KTORÉHO JE SÚSTREDENÁ HMOTNOSŤ TELESA
2, SÚSTAVA HMOTNÝCH BODOV - NAJVŠEOBECNEJŠÍ MODEL AKÉHOKOĽVEK OBJEKTU
PRUŽNÉ TELESO - VZÁJOMNÁ POLOHA SA MENÍ PODĽA URČITÝCH ZÁKONITOSTÍ;
3, SÚSTAVA TUHÝCH TELIES
4, NEHMOTNÝ OBJEKT - GRAVITAČNÉ ZOTRVAČNÉ VLASTNOSTI SÚ ZANEDBATEĽNÉ VOČI TÝMTO VLASTNOSTIAM OSTATNÝCH OBJEKTOV, MAJÚ ZANEDBATEĽNÝ VPLYV

ZÁKLADNÉ AXIÓMY DYNAMIKY

1. ZÁKON (AXIÓMA) ZOTRVAČNOSTI - KAŽDÉ TELESO JE V POKOJI, ALEBO ROVNOMERNOM PRIAMOČIAROM POHYBE (AJ PRE ROVNOMERNÝ ROTAČNÝ POHYB TELESA V POKOJI) POKIAĽ NAŇ PÔSOBÍ ROVNOVÁŽNA SILOVÁ SÚSTAVA; KAŽDÝ HMOTNÝ OBJEKT MÁ V SEBE RYS ZOTRVAČNOSTI

2. ZÁKON SILY (O ZMENE HYBNOSTI) - POHYB MÔŽEME SKÚMAŤ Z DVOCH STRÁN
KVALITATÍVNA STRÁNKA (kin.)
KVANTITATÍVNA STRÁNKA

$\bar{H} = m \cdot \bar{v}$

$\bar{F} = \frac{d\bar{H}}{dt}$

$\bar{F} = \sum \bar{F}_i$ ⇒ CENTRÁLNA SILOVÁ SÚSTAVA

AK $\bar{F} = \bar{0}$ ⇒ ROVNOVÁŽNA SILOVÁ SÚSTAVA

$\frac{d\bar{H}}{dt} = \bar{0}$ ⇒ $\bar{H} = konšt.$ ⇒ ZÁKON ZACHOVANIA HYBNOSTI

$\bar{F} = \frac{d}{dt}(m \cdot \bar{v}) = \frac{dm}{dt} \cdot \bar{v} + m \cdot \frac{d\bar{v}}{dt}$

V TECHNICKEJ PRAXI $m = konšt.$

POTOM $\bar{F} = m \cdot \frac{d\bar{v}}{dt} = m \cdot \bar{a}$ (OKAMŽITÉ ZRÝCHLENIE HB)

$\bar{G} = m \cdot \bar{g}$ - gravitačné zrýchlenie

3. ZÁKON AKCIE A REAKCIE

od Pelčáka

DYNAMIKA HMOTNÉHO BODU
POHYBOVÁ ROVNICA HB

$\bar F = \frac{d\bar H}{dt}$

$\bar F = m\cdot\bar a$ POHYBOVÁ ROVNICA HB VO VEKTOROVOM TVARE

-URČUJE VZŤAH MEDZI PÔSOBIACIMI SILAMI A POHYBOM HB

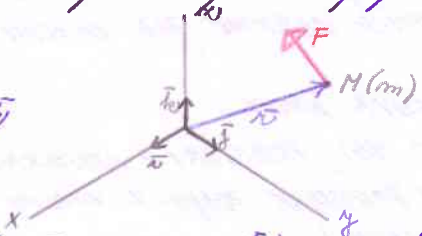
a) KARTEZIÁNSKA SÚRADNICOVÁ SÚSTAVA - NAJUNIVERZÁLNEJŠIA

$\bar F = +F_x\bar i + F_y\bar j + F_z\bar k$

$\bar r = x\bar i + y\bar j + z\bar k$

$\bar a = \bar r'' = x''\bar i + y''\bar j + z''\bar k$

$x'' = \frac{dx'}{dt} = \frac{x'\,dx'}{dx}$



$F_x\bar i + F_y\bar j + F_z\bar k = m(a_x\bar i + a_y\bar j + a_z\bar k)$ $/\cdot\bar i$ $/\cdot\bar j$ $/\cdot\bar k$

$F_x = m\cdot a_x$ - SKALÁRNA ROVNICA; PREMIETNUTÉ DO OSI X-OVEJ

$F_y = m\cdot a_y$ - PREMIETNUTÁ DO OSI Y-OVEJ

$F_z = m\cdot a_z$

-JEDNA Z NICH MÔŽE BYŤ IDENTITOU, BOD SA POHYBUJE NA OSI x A y.

b) VALCOVÁ SÚRADNICOVÁ SÚSTAVA

$\bar a = a_\rho\cdot\bar j_\rho + a_\varphi\cdot\bar j_\varphi + a_z\bar k$

$a_\rho = \rho'' - \rho\varphi'^2$

$a_\varphi = \rho\varphi'' + 2\rho'\varphi'$

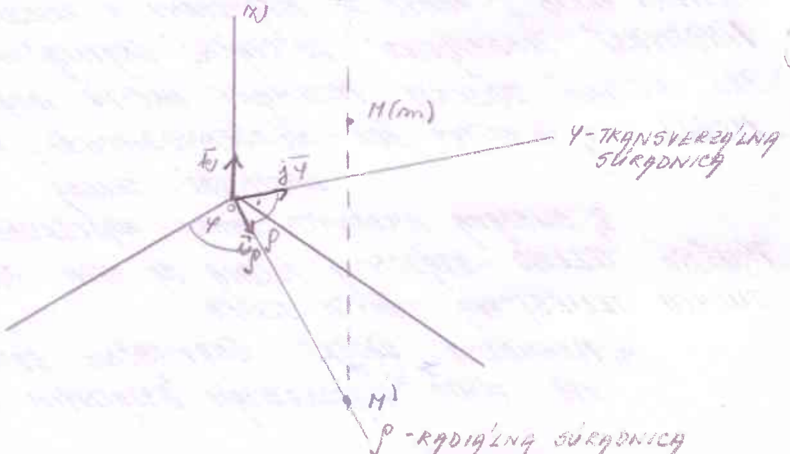
$a_z = z''$

POHYBOVÉ ROVNICE: $F_\rho = m(\rho'' - \rho\varphi'^2)$

$F_\varphi = m\cdot(\rho\varphi'' + 2\rho'\varphi')$

$F_z = m\cdot z''$

M' - PÔDORYSNÝ POHĽAD BODU M

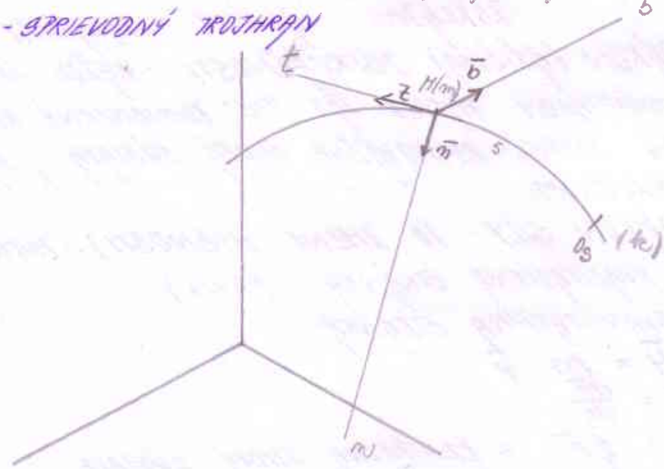


c) PRIRODZENÁ SÚRADNICOVÁ SÚSTAVA - SPRIEVODNÝ TROJHRAN

$a_t = s'' = v_t'$

$v_t = s'$

s - KRIVOČIARA SÚRADNICA (UDÁVA POLOHU BODU NA PRÍSLUŠNEJ KRIVKE)



$v = |\bar r|$

$a_n = \frac{s'^2}{\rho_H} \Rightarrow a_n = \frac{v^2}{\rho_H}$, polomer krivence

$a_b = 0$

$s'^2 = v_t^2 = v^2$

POHYBOVÉ ROVNICE:

$F_t = m\cdot s''$

$F_n = m\cdot\frac{s'^2}{\rho_H}$

$F_b = 0 \Rightarrow$ STAT. PODMIENKA ROVNOVÁHY

$\bar F = m\cdot\bar a$

$\bar a = \bar r''$

$\bar F = \underbrace{\bar F}_{\text{SILA V PRUŽINE}}(\bar r, \bar r', t)$

$F_x = m\cdot a_x$

$x = x(t)$

$F(\bar r, \bar r', t) = m\cdot\bar r''$

$\bar r = \bar r(t)$

$F_x(x, y, z, x', y', z', t) = m\cdot x''$

$F_y(x, y, z, x', y', z', t) = m\cdot y''$

$F_z(x, y, z, x', y', z', t) = m\cdot z''$

METODIKA RIEŠENIA ÚLOH POMOCOU POHYBOVÝCH ROVNÍC

1) POHYBUJÚCI SA HMOTNÝ OBJEKT UVOLNÍME Z VÄZIEB ZOVŠEOBECNENOM ČASOVOM OKAMIHU VYŠETROVANÉHO INTERVALU
2) NAKRESLÍME NAŇ PÔSOBIACE VONKAJŠIE SILY A VÄZBY NAHRADÍME REAKCIAMI
3) ZVOLÍME VHODNÚ SÚRADNICOVÚ SÚSTAVU A K NEJ NAPÍŠEME ZLOŽKOVÉ POHYBOVÉ ROVNICE
4) TÝMTO ROVNICIAM PRIDÁME POTREBNÉ VZŤAHY MEDZI KINEMATICKÝMI VELIČINAMI NACHÁDZAJÚCIMI SA V POHYBOVÝCH ROVNICIACH A VZŤAHY PRE VYSKYTUJÚCE SA PASÍVNE ODPORY
5) RIEŠENÍM TAKTO ZÍSKANÉHO SYSTÉMU ROVNÍC URČÍME:
   a) SILOVÉ VELIČINY (PRI 1. TYPE ÚLOH)
   b) KINEMATICKÉ VELIČINY (PRI 2. TYPE ÚLOH)
   A REAKCIE VO VÄZBÁCH

$\bar{F} = m \cdot \bar{a}$ - METÓDA ZRÝCHĽUJÚCICH SÍL

METÓDA ZOTRVAČNÝCH SÍL (D'ALEMBERTOV PRINCÍP)

$\bar{F} = m \cdot \bar{a}$ ANULUJEME $\Rightarrow$ $\bar{F} + (-m \cdot \bar{a}) = \bar{0}$

$\bar{F}_D = m \cdot \bar{a}$ $\Rightarrow$ D'ALEMBERTOVA (ZOTRVAČNÁ) SILA

$\bar{F} + \bar{F}_D = \bar{0}$ $\Rightarrow$ MATEMATICKÝ TVAR D'ALEMBERTOVHO PRINCÍPU

$\Rightarrow$ HB SA V KAŽDOM OKAMIHU POHYBUJE TAK, ŽE VONKAJŠIE A ZOTRVAČNÉ ÚČINKY SÚ V ROVNOVÁHE

„ $F_D = m \cdot a$ S OPAČNOU ORIENTÁCIOU "

- MIMORIADNE NÁZORNÝ

$\bar{a} = a_t \bar{t} + a_n \bar{n}$

$F_t = m \cdot a_t$

$F_n = m \cdot a_n$

$F_n + (\underbrace{-m \cdot a_n}_{F_{Dn}}) = 0$

F_{Dn} - ODSTREDIVÁ SILA

ZÁKLADNÉ VETY DYNAMIKY HB

$\bar{F} = \dfrac{d\bar{H}}{dt}$ - SILOVÁ POHYBOVÁ ROVNICA

$\int_0^t \bar{F}\, dt = \int_{H_0}^{H} d\bar{H}$

$\bar{F}\, dt = d\bar{I}$ - ELEMENTÁRNY IMPULZ SILY

$\int_0^t \bar{F}\, dt = \bar{H} - \bar{H}_0$ $\Rightarrow$ AK $\bar{F} = \bar{F}(t)$

$\bar{I} = \bar{H} - \bar{H}_0$

IMPULZ SILY (ČASOVÝ ÚČINOK SILY)

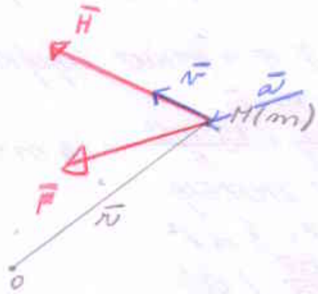
- ZMENA HYBNOSTI HB ZA ČAS t SA ROVNÁ IMPULZU VONKAJŠÍCH SÍL ZA TENTO ČAS

VETA O ZMENE MOMENTU HYBNOSTI

$\bar{M}_0 = \bar{r} \times \bar{F}$

$\bar{L}_0 = \bar{r} \times \bar{H}$ $\Rightarrow$ MOMENT HYBNOSTI

$\dfrac{d\bar{L}_0}{dt} = \underbrace{\dfrac{d\bar{r}}{dt} \times m\bar{v}}_{\bar{v}} + \bar{r} \times m \dfrac{d\bar{v}}{dt} = \bar{r} \times m \cdot \bar{a} = \bar{r} \times \bar{F} = \bar{M}_0$



VEKTOROVÝ SÚČIN KOLINEÁRNYCH VEKTOROV, ČIŽE $= 0$

$\bar{M}_0 = \dfrac{d\bar{L}_0}{dt}$ - POHYBOVÁ ROVNICA HB V MOMENTOVOM TVARE

$* \quad \dfrac{d\bar{L}_0}{dt} = \bar{M}_0$

$\int_{L_{00}}^{L_0} d\bar{L}_0 = \int_0^t \bar{M}_0\, dt$

$d\bar{I}_M = \bar{M}_0\,dt$ - ELEMENTÁRNY IMPULZ MOMENTU SILY

$* \bar{L}_0 - \bar{L}_{00} = \bar{I}_M$ ⇒ VETA O ZMENE HYBNOSTI HBu

$\bar{I}_M = \int_0^t \bar{M}_0\,dt$ - IMPULZ MOMENTU; ČASOVÝ ÚČINOK SILY

ZMENA MOMENTU HYBNOSTI HBu ZA ČAS t = IMPULZ MOMENTU ZA TENTO ČAS

* S VÝHODOU POUŽÍVAME, KEĎ SA POHYB BODU DEJE POD VPLYVOM CENTRÁLNEJ SILY (STÁLE PRECHÁDZAJÚ 1 BODOM)

$\bar{M}_0 = 0$ POČAS CELÉHO POHYBU ZEME OKOLO SLNKA

Z TOHO VYPLÝVA, ŽE:

$\bar{L}_0 = konšt.$

$\bar{r} \times m\bar{v} = konšt.$

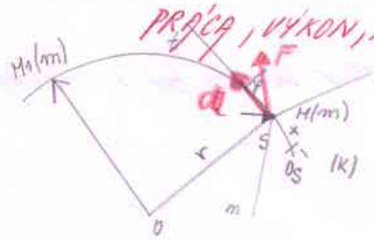
⇒ ROVINNÝ POHYB

POHYB BODU POD VPLYVOM CENTRÁLNYCH SÍL BUDE POHYB ROVINNÝ

$\frac{dL_p}{dt} = M_p$

$M_p = 0 \Rightarrow L_p = konšt.$

PRÁCA, VÝKON, KINETICKÁ ENERGIA, VETA O ZMENE KINETICKEJ ENERGIE



NECH SA BOD POHYBUJE PO KRIVKE K A JEHO POLOHA NECH JE DANÁ POLOHOVÝM VEKTOROM. NECH JE DANÝ BOD, PÔSOBÍ VÝSLEDNICA VONKAJŠÍCH SÍL. NA KRIVKE ZVOLÍME ZAČIATOK MERANIA SÚRADNICE. POLOHA BODU BUDE DANÁ KRIVOČIAROU SÚRADNICOU S.

$\bar{F} = \Sigma \bar{F}_i$

$dA = \bar{F}\,d\bar{r}$ ELEMENTÁRNA PRÁCA = PRODUKT SKALÁRNEHO SÚČINU MOMENTU VONKAJŠÍCH SÍL × ELEMENTÁRNEHO VEKTORA

$dA = |\bar{F}|\,|d\bar{r}|\cos\varphi = F\,ds\,\cos\varphi = F_t\,ds$

PRÁCU VYKONÁVAJÚ SILY, KTORÉ LEŽIA NA DOTYČNICI

$A = \int_{\bar{r}}^{\bar{r}_1} \bar{F}\,d\bar{r} = \int_S^{S_1} F_t\,ds$

S_1 - KRIVOČIARA SÚRADNICA BODU M v M_1

$[A] = [F][s] = kg\,m\,s^{-2}\,m = kg\,m^2 s^{-2} = J$oul

$\bar{M}_0 = \Sigma \bar{M}_{i0}$

$dA = \bar{M}_0 \cdot d\bar{\varphi} = M_0\,d\varphi$

$A = \int_0^{\varphi} M_0\,d\varphi$

PRÁCA - DRÁHOVÝ ÚČINOK SILY

OKAMŽITÝ VÝKON - ČASOVÁ ZMENA PRÁCE

$P = \frac{dA}{dt}$

$P = \frac{\bar{F}\,d\bar{r}}{dt} = \bar{F} \cdot \bar{v}$ ⇒ PRODUKT SKALÁRNEHO SÚČINU SILY × OKAMŽITEJ UHLOVEJ RÝCHLOSTI

$P = \frac{\bar{M}_0\,d\bar{\varphi}}{dt} = \bar{M}_0\,\bar{\omega}$

$[P] = \frac{[A]}{[t]} = \frac{kg\,m^2 s^{-2}}{s} = kg\,m^2 s^{-3} = \frac{J}{s} = W$

KINETICKÁ ENERGIA:

$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \bar{v}^2$

$\bar{F} = m\frac{d\bar{v}}{dt} \;/\cdot d\bar{r}$

$\bar{F}\,d\bar{r} = m \cdot \frac{d\bar{v}}{dt} \cdot d\bar{r}$

$\bar{F}\,d\bar{r} = m \cdot \bar{v}\,d\bar{v}$

$\bar{F}\,d\bar{r} = d(\frac{1}{2} m \bar{v}^2)$

$d(\bar{v}^2) = 2\bar{v}\,d\bar{v}$

$dA = dE_k$

$\int_0^A dA = \int_{E_{k0}}^{E_k} dE_k$

$A = E_k - E_{k0}$ - VETA O ZMENE KINETICKEJ ENERGIE V DIFERENČNOM TVARE

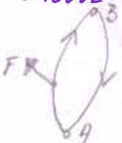
PRÁCA SÍL PÔSOBIACICH NA HB MEDZI JEHO DVOMA POLOHAMI JE ROVNÁ ZMENE KINETICKEJ ENERGIE HB MEDZI TÝMITO POLOHAMI.

POTENCIÁLOVÉ SILOVÉ POLE, VETA (ZÁKON) O ZACHOVANÍ MECHANICKEJ ENERGIE

SILOVÉ POLE - ČASŤ PRIESTORU, V KTOROM KAŽDÉMU BODU PRIRADÍME PODĽA URČITÉHO PREDPISU SILU
- SILA POTOM BUDE LEN FUNKCIA POLOHY

$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$

- EXISTUJE SKUPINA SÍL, KTORÝCH PRÁCA NEZÁVISÍ OD TVARU DRÁHY, ALE ZÁVISÍ OD ZAČIATOČNEJ A KONCOVEJ POLOHY BODOV



- TAKÝMTO SILÁM HOVORÍME SILY KONZERVATÍVNE
- PRÁCA TAKÝCHTO SÍL PO UZAVRETEJ KRIVKE JE ROVNÁ NULE

$A = \oint_{(k)} \vec{F}\, d\vec{r} = 0$

POTENCIÁLNA ENERGIA (E_p)

$\int_0^{E_p} dE_p = \int_0^A -dA \Rightarrow E_p = -A$ - DEF. VEĽKOSTI POTENCIÁLNEJ ENERGIE

- HLADINA NULOVEJ POTENCIÁLNEJ ENERGIE JE MNOŽINA BODOV KONZERVATÍVNEHO SILOVÉHO POĽA, KDE NA HB NEPÔSOBIA Z TOHTO POĽA SILY
- EKVIPOTENCIÁLNE PLOCHY - MNOŽINA BODOV KONZERVATÍVNEHO SILOVÉHO POĽA, KT. MAJÚ HB ROVNAKÚ E_p.

E_p V URČITOM MIESTE SILOVÉHO POĽA KONZERVATÍVNYCH SÍL JE ROVNÁ PRÁCI PROTI SILÁM POĽA, KTORÚ POTREBUJEME VYKONAŤ NA TO, ABY SME SA Z MIESTA NULOVEJ E_p DOSTALI DO MIESTA, KDE E_p - VYŠETRUJEME (URČUJEME)

napr. Zem < 0 - stred zeme

E.p. - vodorovné plochy

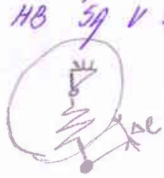
$dE_p = -dA$ $\quad dA = dE_k$

$dE_p = -dE_k$

$d(E_k + E_p) = 0$ $\quad E = E_k + E_p$

$E_k + E_p = konšt.$ ⇒ VETA (ZÁKON) O ZACHOVANÍ MECHANICKEJ ENERGIE:

HB SA V SILOVOM POLI KONZERVATÍVNYCH SÍL POHYBUJE TAK, ŽE JEHO ENERGIA JE KONŠTANTNÁ.



NECH k JE TUHOSŤ PRUŽINY. PRUŽINA JE PREDĹŽENÁ O Δl. TUHOSŤ JE SILA POTREBNÁ NA JEDNOTKOVÚ DEFORMÁCIU. POTOM $E_p = \frac{1}{2} k \Delta l^2$

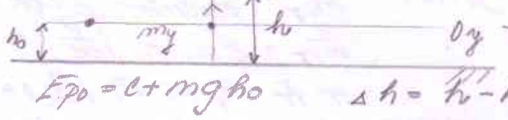
$E_k + E_p = E_{k0} + E_{p0}$

$E_k - E_{k0} + E_p - E_{p0} = 0$

$[k] = \frac{N}{m}$

$E_p - E_{p0} = gm(h - h_0) = mg\Delta h$

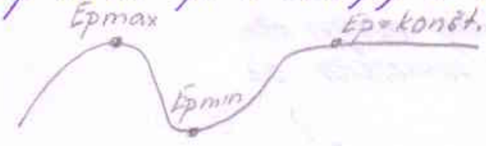
$E_p = C + m \cdot g \cdot h$



$E_{p0} = C + mgh_0$ $\quad \Delta h = h - h_0$

PRI APLIKÁCII ZÁKONA O ZMENE MECHANICKEJ ENERGIE MÔŽEME HLADINU E_p VOLIŤ

E_p HOVORÍ AJ O TOM, AKÁ JE ROVNOVÁŽNA POLOHA



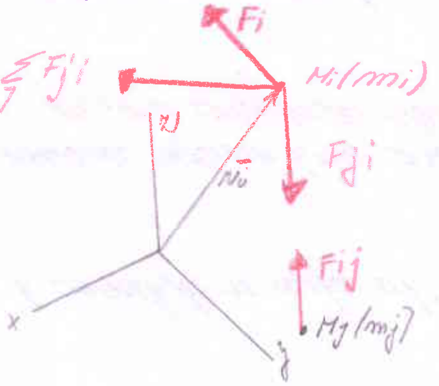
$E_{p\,max}$ - BOD JE NAJVYŠŠIE, NESTABILNÁ ROVNOVÁŽNA POLOHA

$E_{p\,min}$ - BOD JE NAJNIŽŠIE, STABILNÁ ROVNOVÁŽNA POLOHA, PO VYCHÝLENÍ SA VŽDY BUDE VRACAŤ DO DANEJ POLOHY

$E_p = konšt.$ - INDIFERENTNÁ ROVNOVÁŽNA POLOHA

DYNAMIKA SÚSTAVY HMOTNÝCH BODOV

SÚSTAVA HMOTNÝCH BODOV – MNOŽINA BODOV V PRIESTORE, KTORÝCH POLOHA SA MENÍ VOČI VZŤAŽNÉMU PRIESTORU, ALE MENÍ SA AJ VZÁJOMNÁ POLOHA HMOTNÝCH BODOV $i = 1, 2, \dots$



NECH NA HB PÔSOBÍ Z VONKU SILOVÁ SÚSTAVA. VÝSLEDNICA TÝCHTO SÍL NECH JE $\bar{F}_i$ = VONKAJŠIA SILA A JE TO VÝSLEDNÁ SILA, KTOROU NA I-TÝ HB VYŠETROVANEJ SÚSTAVY HBov PÔSOBIA OBJEKTY NEPATRIACE K VYŠETROVANEJ SÚSTAVE HBov. OBE BODY NA SEBA PÔSOBIA SILAMI $\bar{F}_{ij}, \bar{F}_{ji}$ PRIČOM PLATÍ ZÁKON AKCIE A REAKCIE. $\bar{F}_{ji} = -\bar{F}_{ij}$.
NECH M_j JE INÝ HB $j \neq i$ SÚSTAVY HBov.
$\sum_j F_{ji}$ – SILA, KTOROU NA I-TÝ HB PÔSOBIA VŠETKY OSTATNÉ BODY SÚSTAVY HMOTNÝCH BODOV, TÚTO SILU NAZVEME VNÚTORNÁ SILA

$\sum_i \sum_j F_{ji} = 0$ – MUSIA BYŤ V ROVNOVÁHE
$\sum_i \sum_j \bar{r}_i \times \bar{F}_{ji} = \bar{0}$ > URČUJÚ PODMIENKY ROVNOVÁHY SILOVÝCH SÚSTAV VNÚTORNÝCH SÍL

POHYBOVÉ ROVNICE SÚSTAVY HMOTNÝCH BODOV

$m_i \bar{a}_i = \bar{F}_i + \sum_{j \neq i}^{N} \bar{F}_{ji}$ – POHYBOVÁ ROVNICA JEDNÉHO HB

$\sum_i m_i \bar{a}_i = \sum \bar{F}_i + \sum_i \sum_j \bar{F}_{ji}$

$\sum_i m_i \bar{a}_i = \bar{F}$ (1) – SILOVÁ POHYBOVÁ ROVNICA VŠETKÝCH BODOV

$\bar{F} = \sum \bar{F}_i$ – VÝSLEDNÝ POSÚVNY ÚČINOK SÚSTAVY SÍL PÔSOBIACICH NA VYŠETROVANÚ SÚSTAVU HBov

$\bar{r}_i \times m_i \bar{a}_i = \bar{r}_i \times \bar{F}_i + \bar{r}_i \times \sum_j \bar{F}_{ji}$

$\bar{r}_i \times m_i \bar{a}_i = \bar{r}_i \times \bar{F}_i + \sum_j \bar{r}_i \times \bar{F}_{ji}$

$\sum_i \bar{r}_i \times m \bar{a}_i = \sum_i \bar{r}_i \times \bar{F}_i + \sum_i \sum_j \bar{r}_i \times \bar{F}_{ji}$

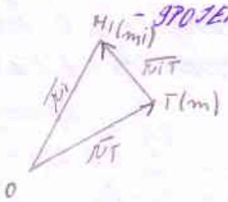
$\sum_i \bar{r}_i \times m_i \bar{a}_i = \bar{M}_0$ (2)

$\bar{M}_0 = \sum_i \bar{r}_i \times \bar{F}_i$ – MOMENTOVÁ POHYBOVÁ ROVNICA

$\bar{M}_0$ – MOMENT VONKAJŠÍCH SÍL PÔSOBIACICH NA SÚSTAVU HBov

VETY O POHYBE STREDU HMOTNOSTI (ŤAŽISKA) SHBov

- ROZLIŠUJEME: STREDISKO, STRED HMOTNOSTI (VESMÍR), ŤAŽISKO
- SPOJENÉ S GRAVITAČNÝM SILOVÝM POĽOM, g JE KONŠTANTNÉ



T JE STREDISKO HMOTNOSTI (ŤAŽISKO)

$m\bar{r}_T$ – POLOHOVÝ VEKTOR ŤAŽISKA

$m\bar{r}_T = \sum_i m_i \bar{r}_i \;\Big/ \frac{d}{dt}$ * $m = \sum m_i$

$m \bar{v}_T = \sum_i m_i \bar{v}_i \;\Big/ \frac{d}{dt}$ o ⇒ 1. VETA O POHYBE ŤAŽISKA SÚSTAVY HBov

⇒ HYBNOSŤ SÚSTAVY HBov JE ROVNÁ SÚČTU HYBNOSTÍ JEDNOTLIVÝCH HBov A TO JE ROVNÉ HYBNOSTI ŤAŽISKA SÚSTAVY HBov

$m \bar{a}_T = \sum_i m_i \bar{a}_i$ – VZHĽADOM NA (1)

$m \bar{a}_T = \bar{F}$ ⇒ 2. VETA O POHYBE ŤAŽISKA SÚSTAVY HBov

⇒ ŤAŽISKO SÚSTAVY HBov SA POHYBUJE LEN POD VPLYVOM VONKAJŠÍCH SÍL

$\bar{r}_i = \bar{r}_T + \bar{r}_{iT}$ DOSADÍME DO * $\Big/ \frac{d}{dt}\Big/$

$m \bar{r}_T = \sum_i m_i (\bar{r}_T + \bar{r}_{iT})$

$m \cdot \bar{r}_T = m\bar{r}_T + \sum_i m_i \cdot \bar{r}_{iT}$

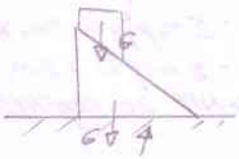
* $\sum m_i \bar{r}_{iT} = \bar{0}$ – STATICKÝ MOMENT SÚSTAVY HBov VZHĽADOM NA ŤAŽISKO JE ROVNÉ 0.

$\bar{v}_i = \bar{v}_T + \bar{v}_{iT}$ DOSADÍME DO o

$\sum m_i \cdot \bar{v}_{iT} = \bar{0}$ ⇒ HYBNOSŤ SÚSTAVY HBov VZHĽADOM NA ŤAŽISKO JE ROVNÉ 0.

NECH NA SÚSTAVU HBov. PÔSOBÍ ROVNOVÁŽNA SILOVÁ SÚSTAVA ⇒ $\vec F = \vec 0$. Z VETY 2. VYPLÝVA $\vec a_T = \vec 0$; Z TOHO VYPLÝVA, ŽE $\vec v_T$ = konšt. → ROVNOMERNÝ PRIAMOČIARY POHYB ŤAŽISKA.
AK $\vec v_T = \vec 0$ → ŤAŽISKO STÁLO ; $\vec v_T$ = konšt. → POLOHOVÝ VEKTOR T BUDE STÁLE ROVNAKÝ.
$F_p = 0$ → $a_p = 0$, ČIŽE v_p = konšt. → ROVNOMERNÝ POHYB ŤAŽISKA
$v_p = 0$; p = konšt. → ŤAŽISKO ZOSTANE V POKOJI

- NA LOĎKE JE ČLOVEK
AK ČLOVEK PÔJDE → LOĎKA PÔJDE ←
PRIEMET VŠETKÝCH SÍL = 0



- PUSTÍM HORNÝ HRANOL
VEĽKÝ HRANOL IDE ←, KEĎ BUDE MALÝ HRANOL PADAŤ
POLOHA ŤAŽISKA MUSÍ OSTAŤ ZACHOVANÁ

MOMENT HYBNOSTI SÚSTAVY HMOTNÝCH BODOV

$\vec L_{i0} = \vec r_i \times m_i \vec v_i$

$$\vec L_0 = \sum_i \vec r_i \times m_i \underbrace{\vec v_i}_{\text{konšt.}} = \sum_i [(\vec r_T + \vec r_{iT}) \times m_i (\vec v_T + \vec v_{iT})] = \vec r_T \times m \vec v_T + \sum_i \vec r_T \times m_i \overbrace{\vec v_{iT}}^{0} +$$
$$+ \underbrace{\sum_i \vec r_{iT} \times m_i}_{0} \vec v_T + \sum_i \vec r_{iT} \times m_i \vec v_{iT} = \vec r_T \times m \cdot \vec v_T + \sum_i \vec r_{iT} \times m_i \vec v_{iT}$$

$\vec r_i = \vec r_T + \vec r_{iT}$

$\vec v_i = \vec v_T + \vec v_{iT}$

L_0 - MOMENT HYBNOSTI T + SÚČET MOMENTOV HYBNOSTI JEDNOTLIVÝCH HBov PRI ICH POHYBE VZHĽADOM NA T

$M_0 = \frac{dL_0}{dt}$

$\vec M_0 = \vec r_T \times m \vec a_T + \sum_i \vec r_{iT} \times m_i \vec a_{iT}$

ZA VZŤAŽNÝ BOD MÔŽEME ZVOLIŤ AJ ŤAŽISKO SÚSTAVY HBov

$M_T = \frac{dL_T}{dt}$

$M_T = \sum_i \vec r_{iT} \times m_i \vec a_{iT}$

KINETICKÁ ENERGIA SÚSTAVY HMOTNÝCH BODOV

$$E_K = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_1 m_i (v_T + v_{iT})^2 = \frac{1}{2}\sum_1 m_i (v_T^2 + \underbrace{2 v_T v_{iT}}_{0} + v_{iT}^2) = \frac{1}{2} m \cdot v_T^2 + \frac{1}{2}\sum_1 m_i v_{iT}^2$$

$\vec v_i = \vec v_T + \vec v_{iT}$

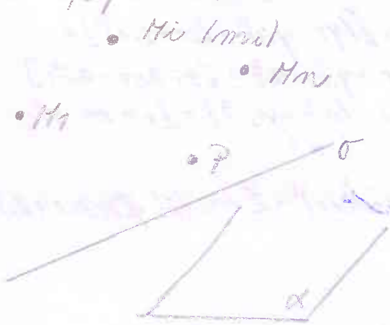
KÖNIGOVA VETA $E_K = \frac{1}{2}\sum_1 m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m v_T^2 + \frac{1}{2}\sum_1 m_i v_{iT}^2$

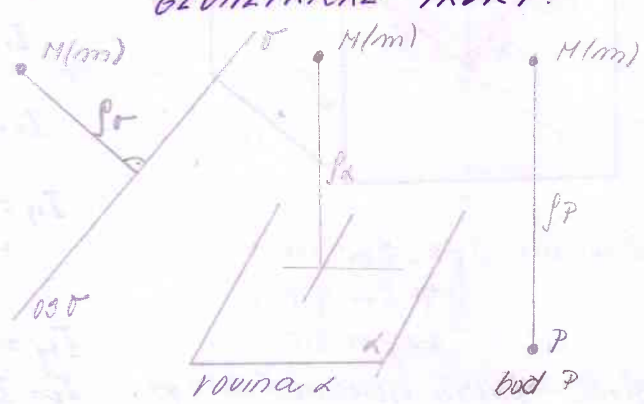
KINETICKÁ ENERGIA SÚSTAVY HMOTNÝCH BODOV JE ROVNÁ SÚČTU KINETICKÝCH ENERGIÍ JEDNOTLIVÝCH BODOV A TO JE ROVNÉ KINETICKEJ ENERGIE ŤAŽISKA PLUS KINETICKÁ ENERGIA HMOTNÝCH BODOV VZHĽADOM NA ŤAŽISKO

GEOMETRIA HMÔT
MOMENTY ZOTRVAČNOSTI

$i = 1, 2, \dots N$

GEOMETRICKÉ PRVKY:





$[I] = kg\, m^2$

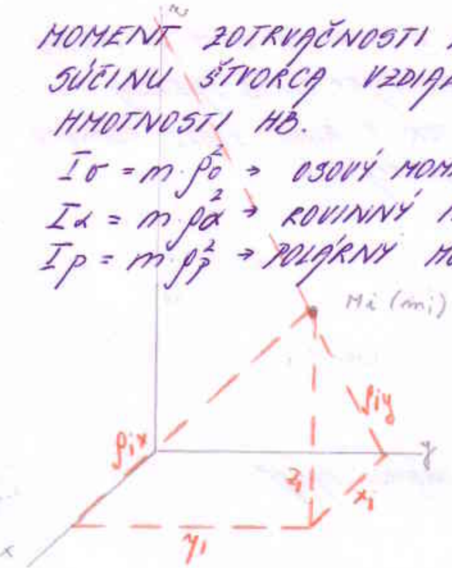
MOMENT ZOTRVAČNOSTI [I] HB K URČITÉMU GEOMETRICKÉMU PRVKU JE ROVNÝ SÚČINU ŠTVORCA VZDIALENOSTI HB OD PRÍSLUŠNÉHO GEOMETRICKÉMU PRVKU A HMOTNOSTI HB.

$I_\sigma = m \cdot \rho_\sigma^2$ → OSOVÝ MOMENT ZOTRVAČNOSTI $\quad I_\sigma = \sum_i m_i \rho_{i\sigma}^2$

$I_\alpha = m \cdot \rho_\alpha^2$ → ROVINNÝ MOMENT ZOTRVAČNOSTI $\quad I_\alpha = \sum_i m_i \rho_{i\alpha}^2$

$I_p = m \cdot \rho_p^2$ → POLÁRNY MOMENT ZOTRVAČNOSTI $\quad I_p = \sum_i m_i \rho_{ip}^2$

} PRE SÚSTAVU HMOTNÝCH BODOV



$I_x = \sum m_i \rho_{ix}^2 = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2)$

$I_y = \sum m_i \rho_{iy}^2 = \sum m_i (x_i^2 + z_i^2)$

$I_z = \sum m_i \rho_{iz}^2 = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2)$

OSOVÉ MOMENTY ZOTRVAČNOSTI

$I_{xy} = \sum m_i \rho_{ixy}^2 = \sum m_i z_i^2$

$I_{yz} = \sum m_i \rho_{iyz}^2 = \sum m_i x_i^2$

$I_{xz} = \sum m_i \rho_{ixz}^2 = \sum m_i y_i^2$

MOMENTY ZOTRVAČNOSTI V ROVINE?

$I_0 = \sum m_i \rho_{i0}^2 = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$ POLÁRNY MOMENT ZOTRVAČNOSTI

$I_x = I_{xz} + I_{xy}$

$I_y = I_{yz} + I_{xy}$

$I_z = I_{yz} + I_{xz}$

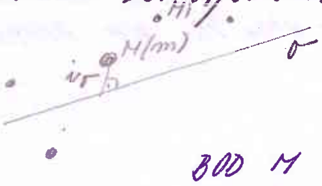
$I_0 = I_{yz} + I_{xz} + I_{xy}$

$I_x + I_y + I_z = 2 I_{xz} + 2 I_{xy} + 2 I_{yz}$

$I_x + I_y + I_z = 2 I_0$

TELESO – NEKONEČNÁ SÚSTAVA HMOTNÝCH BODOV, KTORÝCH VZDIALENOSŤ SA NEMENÍ

POLOMER ZOTRVAČNOSTI



$m = \sum m_i$

$I_0 = m \cdot i_0$

i_0 – POLOMER ZOTRVAČNOSTI

BOD M JE V TAKEJ VZDIALENOSTI i_σ, ŽE MOMENT ZOTRVAČNOSTI HB M JE ROVNAKÝ AKO MOMENT ZOTRVAČNOSTI SÚSTAVY HBov Mi.

DEVIAČNÉ MOMENTY ZOTRVAČNOSTI

$D_{xy} = \sum m_i x_i y_i$

$D_{xz} = \sum m_i x_i z_i$

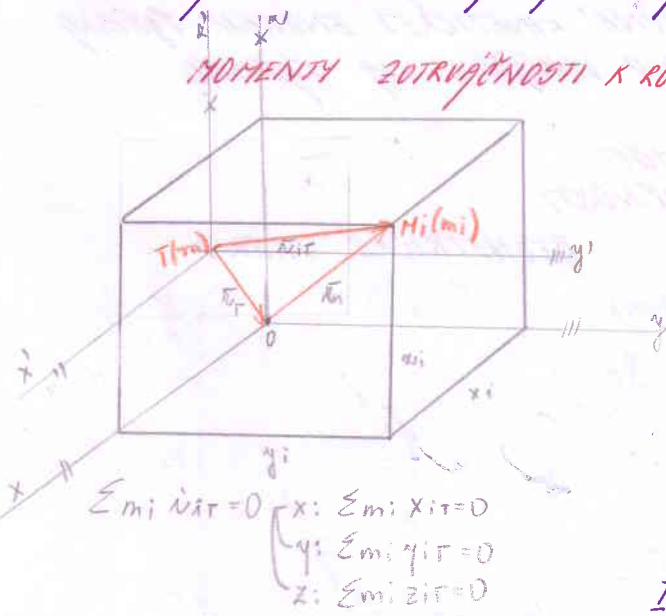
$D_{yz} = \sum m_i y_i z_i$

} DEVIAČNÝ MOMENT K OSIAM (napr. xy)?

$D_{yz} = D_{xy} = D_{xz} = 0$ → HLAVNÉ OSY ZOTRVAČNOSTI

AK TIETO OSY PRECHÁDZAJÚ STRED[redacted]OM HMOTNOSTI, ŤAŽISKO ALEBO STREDISKO, POTOM SA TIETO OSY NAZÝVAJÚ HLAVNÉ CENTRÁLNE OSY ZOTRVAČNOSTI

MOMENTY ZOTRVAČNOSTI K ROVNOBEŽNÝM OSIAM – STEINEROVE VETY



$m \vec{r}_T = \sum m_i \vec{r}_i$

$\vec{r}_i = \vec{r}_T + \vec{r}_{iT}$

x: $x_i = x_T + x_{iT}$

y: $y_i = y_T + y_{iT}$

z: $z_i = z_T + z_{iT}$

$I_x = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) = \sum m_i [(y_T + y_{iT})^2 + (z_T + z_{iT})^2] =$

$= \sum m_i [y_T^2 + 2 y_T y_{iT} + y_{iT}^2 + z_T^2 + 2 z_T z_{iT} + z_{iT}^2]$

$I_x = \sum m_i (y_T^2 + z_T^2) + \sum m_i (y_{iT}^2 + z_{iT}^2) = I_x + m \cdot a^2$

$\sum m_i r_{iT} = 0$

x: $\sum m_i x_{iT} = 0$

y: $\sum m_i y_{iT} = 0$

z: $\sum m_i z_{iT} = 0$

$y_T^2 + z_T^2$ → ŠTVOREC VZDIALENOSTI OSY x AY

$I_{xy} = \sum m_i z_i^2 = \sum m_i (z_T + z_{iT})^2 = \sum m_i (z_T^2 + 2 z_T z_{iT} + z_{iT}^2) =$

$= m \cdot z_T^2 + \underbrace{\sum m_i z_{iT}^2}_{I_{x'y'}}$

$I_{xy} = I_{x'y'} + m \cdot z_T^2$

$I_0 = I_T + m \cdot r_T^2 \qquad r_T = \overline{0T}$

$D_{xy} = \sum m_i x_i y_i = \sum m_i (x_T + x_{iT})(y_T + y_{iT}) = m x_T y_T + \sum m_i x_{iT} y_{iT}$

$D_{xy} = D_{x'y'} + m \cdot x_T \cdot y_T$

$I_x = \int_m (y^2+z^2)\,dm$

$I_{xy} = \int_m z^2\,dm$

$I_0 = \int_m (x^2+y^2+z^2)\,dm$

$D_{xy} = \int_m x\,y\,dm$

dm - ELEMENT TELESA
m - HMOTNOSŤ TELESA (INTEGRUJEME PO CELEJ HMOTNOSTI)
x, y, z - SÚRADNICE ŤAŽISKA ZVOLENÉHO ELEMENTU

$dm = \rho\,dV$

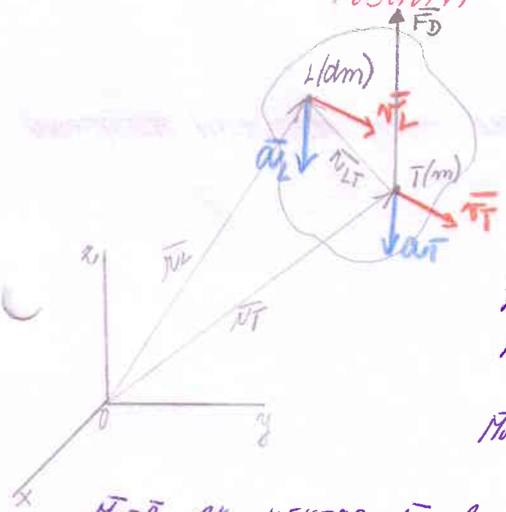
$dm = \rho\cdot h\cdot dS = \rho_S\,dS$

$dm = \rho S\,dl = \rho_l\,dl$

$\left.\begin{array}{l} dV = h\cdot dS \\ dV = S\cdot dl \end{array}\right\}$ NAPÄTIA PRI DRÔTE

ρ_l - DĹŽKOVÁ HUSTOTA
ρ_S - PLOŠNÁ HUSTOTA
S - PLOCHA PRIEREZU
dl - ELEMENT DĹŽKY

POSUVNÝ POHYB TELESA



v_{LT} = konštanta

$\vec r_L = \vec r_T + \vec r_{LT} \quad / \frac{d}{dt}$

$\vec v_L = \vec v_T \,; \quad \vec v_{LT} = \vec 0$

$\vec H = m\cdot \vec v_T$

$\vec L_0 = \vec r_T \times m\,\vec v_T$

POHYBOVÉ ROVNICE:

$\vec F = \frac{d\vec H}{dt} \,; \quad \vec F = m\,\vec a_T \ (1) \qquad \sum \vec F_i = \vec F$

$\vec M_0 = \frac{d\vec L_0}{dt} \,; \quad \vec M_0 = \vec r_T \times m\,\vec a_T \ (2) \qquad \vec M_T = \vec 0 \ (2')$

$\vec M_0 = \vec 0$ AK VEKTOR $\vec r_T$ A $\vec a_T$ SÚ KOLINEÁRNE, t.j. BOD O LEŽÍ NA NOSITEĽKE VEKTORA $\vec a_T$.

(1) a (2')
ROVNICE (1) a (2) SÚ POHYBOVÉ ROVNICE TELESA KONAJÚCEHO TRANSLAČNÝ POHYB. ROVNICU (1) POUŽIJEME AK NÁS ZAUJÍMA LEN POHYB. AK NÁS ZAUJÍMA ROZLOŽENIE SÍL, POUŽIJEME ROVNICU (2) ALEBO (2')

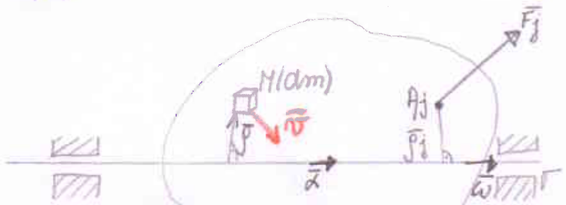
$\vec F_D = -m\cdot \vec a_T$ $\qquad$ $\vec F_D$ - VÝSLEDNÁ ZOTRVAČNÁ SILA

$E_k = \frac{1}{2} m\cdot \vec v_T^{\,2} \qquad [\vec v_T^{\,2} = v_T^2]$

PRI VŠETKÝCH POHYBOCH TELESA PLATÍ: POTENCIÁLNA ENERGIA TELESA = POTENCIÁLNEJ ENERGII HMOTY SÚSTREDENEJ V ŤAŽISKU

ROTAČNÝ POHYB TELESA

TELESO HO KONÁ, AK 2 JEHO BODY SÚ V KĽUDE A ICH SPOJNICA JE STÁLA OS ROTÁCIE.
CHARAKTERIZUJÚ HO VELIČINY - $\vec\omega, \vec\alpha$



ρ - VZDIALENOSŤ M OD STREDU KRUŽNICE, PO KTOREJ SA BOD M POHYBUJE
ρ_j - VZDIALENOSŤ PÔSOBISKA SILY F_j OD STREDU KRUŽNICE, PO KTOREJ SA BOD A_j POHYBUJE
F_{jt} - DOTYČNICOVÁ ZLOŽKA SILY F
M_0 - MOMENTOVÁ

$L_0 = \int_m \rho\,v\,dm = \omega\int_m \rho^2\,dm = I_0\cdot\omega$

$\omega = \rho\cdot v$

$M_0 = \frac{dL_0}{dt}$

$\sum_j \rho_j\,F_{jt} = \frac{d}{dt}(I_0\cdot\omega)$

$M_0 = I_0\cdot\alpha \quad \Rightarrow \quad \varphi = \varphi(t)$

$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$

$\alpha = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$

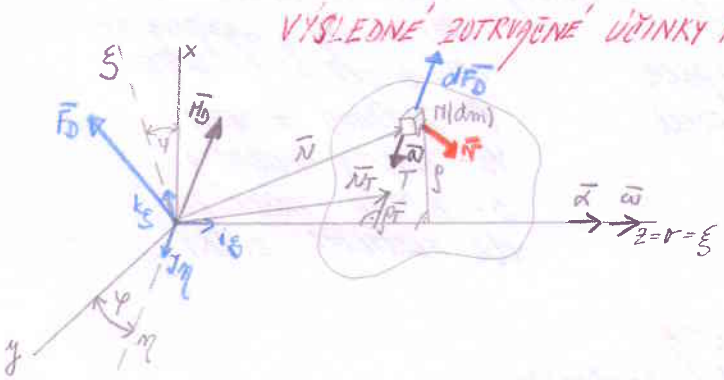
POHYBOVÁ ROVNICA TELESA KONAJÚCEHO ROTAČNÝ POHYB

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{d\varphi} = \frac{\omega\, d\omega}{d\varphi} = \frac{1}{2}\frac{d}{d\varphi}(\omega^2)$$

$$E_K = \int_m \frac{1}{2} v^2 dm = \frac{1}{2}\omega^2 \int_m \rho^2 dm = \frac{1}{2} I_0 \cdot \omega^2$$

VÝSLEDNÉ ZOTRVAČNÉ ÚČINKY PRI ROTÁCII TELESA

$\bar{\alpha}, \bar{\omega}$ → URČUJÚ POHYBOVÝ STAV TELESA



ZOTRVAČNÁ SILA ELEMENTU: $d\bar{F}_D = -dm\cdot\bar{a}$

ELEMENTÁRNE ZOTRVAČNÉ SILY $[d\bar{F}_D]$ NÁM PRI ROTAČNOM POHYBE TVORIA VŠEOBECNÚ PRIESTOROVÚ SÚSTAVU.

VÝSLEDNÁ ZOTRVAČNÁ SILA: $\bar{F}_D = \int_m d\bar{F}_D = -\int_m dm\,\bar{a} = -m\cdot\bar{a}_T$

$\sum m_i \bar{a}_i = m\cdot\bar{a}_T$

$\bar{a}_T = \bar{a}_{Tt} + \bar{a}_{Tn} = \bar{\alpha}\times\bar{\rho}_T - \omega^2\bar{\rho}_T$

$\bar{F}_D = m(\bar{\rho}_T\times\bar{\alpha} + \omega^2\bar{\rho}_T^2)$

$\bar{F}_D = \bar{F}_{Dt} + \bar{F}_{Dn}$

$F_{Dt} = m\cdot\rho_T\,\alpha$

$F_{Dn} = \omega^2\rho_T$

$$\bar{\rho}_T\times\bar{\alpha} = \begin{vmatrix} i_\xi & j_\eta & k_\xi \\ \xi_T & \eta_T & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{vmatrix} = i_\xi\,\eta_T\,\alpha - j_\eta\,\xi_T\,\alpha$$

$\bar{F}_D = m[\bar{i}_\xi(\omega^2\xi_T + \eta_T\alpha) + \bar{j}_\eta(\omega^2\eta_T - \xi_T\alpha)$

$\bar{\rho}_T = \bar{i}_\xi\,\xi_T + \bar{j}_\eta\,\eta_T$

$\bar{M}_D = \int_m \bar{r}\times d\bar{F}_D = \int_m \bar{r}\times[-dm\,(\alpha\times\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}^2\cdot\omega)] = \int_m \bar{r}\times dm\,(\bar{\rho}\times\bar{\alpha} + \omega^2\bar{\rho}^2)$

$\bar{a} = \bar{a}_t + \bar{a}_n$

$d\bar{F}_D = -dm\cdot a$

$\bar{a}_t = \alpha\times\bar{\rho}$

$\bar{a}_n = -\omega^2\bar{\rho}$

$\bar{M}_D = \int_m \bar{r}\times dm[\bar{i}_\xi\,\eta\,\alpha - \bar{j}_\eta\,\xi\,\alpha] + \int_m \bar{r}\times dm\cdot\omega^2\bar{\rho}$

$\bar{r} = \xi\,\bar{i}_\xi + \eta\,\bar{j}_\eta + \xi\cdot\bar{k}_\xi$

$$\bar{r}\times(\quad) = \begin{vmatrix} \bar{i}_\xi & \bar{j}_\eta & \bar{k}_\xi \\ \xi & \eta & \xi \\ \eta\alpha & -\xi\alpha & 0 \end{vmatrix}$$

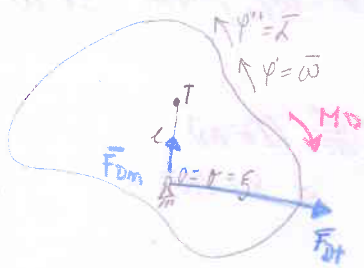
$$\bar{r}\times\bar{\rho} = \begin{vmatrix} \bar{i}_\xi & \bar{j}_\eta & \bar{k}_\xi \\ \xi & \eta & \xi \\ \xi & \eta & 0 \end{vmatrix}$$

$\bar{M}_D = \bar{i}_\xi(\alpha\cdot D_{\xi\xi} - \omega^2\cdot D_{\eta\xi}) + \bar{j}_\eta(\alpha\, D_{\eta\xi} + \omega^2 D_{\xi\xi}) - \bar{k}_\xi\cdot\xi\cdot I_\xi\,\alpha$

$\bar{F}_D = \bar{i}_\xi\, m\,(\eta_T\alpha_T\,\xi_T\,\omega^2) + \bar{j}_\eta\cdot m\,(-\xi_T\alpha + \omega^2\eta_T)$

$\overset{\text{eta}}{D}_{\xi\overset{\text{zeta}}{\xi}} = D_{\eta\xi} = 0$

$I_\xi = I_\sigma = I_0$



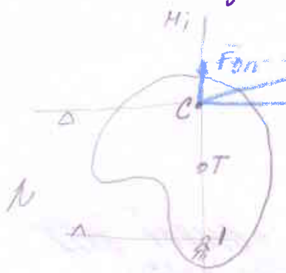
$\rho_T = e$

VEKTOR M_D LEŽÍ V BODE O A SMERUJE DO ZOŠITA

$\bar{F}_{Dt} = m \cdot \bar{\rho}_t \times \bar{\alpha}$

$F_{Dt} = m \cdot e \cdot \alpha$

$\bar{F}_{Dn} = m \cdot \omega^2 \bar{\rho}_T$



$\bar{M}_D = -k_\xi \, I_\xi \alpha = -k_\xi I_0 \alpha$

$M_D' = M_D - F_{Dt} \cdot e$

$M_D' = I_0 \cdot \alpha - m \cdot e^2 \alpha$

$M_D' = (I_0 - m e^2) \cdot \alpha$

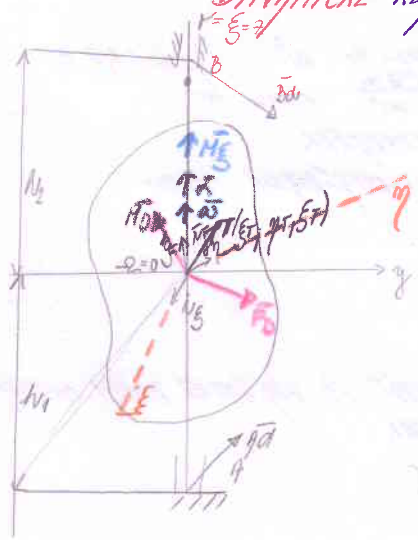
$M_D' = I_T \cdot \alpha$

$F_{Dt} \cdot \rho - M_D = 0$

$\rho = \dfrac{M_D}{F_{Dt}} = \dfrac{I_0 \alpha}{m \cdot e \cdot \alpha}$

$\rho = \dfrac{I_0}{m \cdot e}$

DYNAMICKÉ REAKCIE V LOŽISKÁCH ROTUJÚCEHO TELESA



- REAKCIE V LOŽISKÁCH, KTORÉ SÚ V ROVNOVÁHE S $\bar{F}_D$ A $\bar{M}_D$ NAZÝVAME DYNAMICKÉ REAKCIE

- LOŽISKO A → RADIÁLNO - AXIÁLNE

LOŽISKO B → RADIÁLNE

$\bar{A}_d = A_{d\xi}\, \bar{i}_\xi + A_{d\eta} \cdot \bar{j}_\eta + A_{d\zeta}\, \bar{k}_\zeta$

$\bar{B}_d = B_{d\xi}\, \bar{i}_\xi + B_{d\eta}\, \bar{j}_\eta$

$\bar{F}_D + \bar{A}_d + \bar{B}_d = \bar{0}$ $\qquad \bar{M}_0 = \bar{r} \times \bar{F}$

$-h_1 \bar{k}_\zeta \times \bar{A}_d + h_2 \cdot \bar{k}_\zeta \times \bar{B}_d + \bar{M}_D + \bar{M}_\zeta = \bar{0}$

$\bar{M}_\zeta = M_\zeta \cdot \bar{k}_\zeta$

$A_{d\xi} + B_{d\xi} + m \cdot \eta_T \alpha + m \cdot \xi_T \omega^2 = 0 \quad (1)$

$A_{d\eta} + B_{d\eta} - m \xi_T \alpha + m\, \eta_T \omega^2 = 0 \quad (2)$

$A_{d\zeta} = 0$

$h_1 A_{d\eta} - h_2 B_{d\eta} + \alpha D_{\xi\zeta} - \omega^2 D_{\eta\zeta} = 0 \quad (3)$

$-h_1 A_{d\xi} + h_2 B_{d\xi} + \alpha \cdot D_{\eta\zeta} + \omega^2 D_{\xi\zeta} = 0 \quad (4)$

$M_\zeta - \alpha I_\zeta = 0 \qquad I_\zeta = I_0$

DETERMINANT SÚSTAVY:

$$D_S = \begin{vmatrix} A_{d\xi} & A_{d\eta} & B_{d\xi} & B_{d\eta} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & h_1 & 0 & -h_2 \\ -h_1 & 0 & h_2 & 0 \end{vmatrix} = (h_1 + h_2)^2$$

$x = \dfrac{D_x}{D_S}$

$$A_{d\xi} = \frac{\begin{vmatrix} -(m \cdot \eta_T \alpha + m \xi_T \omega^2) & 0 & 1 & 0 \\ m \cdot \xi_T \alpha - m\, \eta_T \omega^2 & 1 & 0 & 1 \\ \omega^2 D_{\xi\zeta} - \alpha \cdot D_{\xi\zeta} & h_1 & 0 & -h_2 \\ -(\alpha \cdot D_{\eta\zeta} + \omega^2 D_{\xi\zeta}) & 0 & h_2 & 0 \end{vmatrix}}{D_S}$$

VYVAŽOVANIE TUHÝCH ROTOROV

VYVAŽOVANIE - TECHNOLOGICKÝ POSTUP, PRI KTOROM SA SNAŽÍME MINIMALIZOVAŤ DYNAMICKÉ REAKCIE RESP. MINIMALIZOVAŤ DÔSLEDKY ICH EXISTENCIE (AMPLITÚDY KMITOV LOŽÍSK)

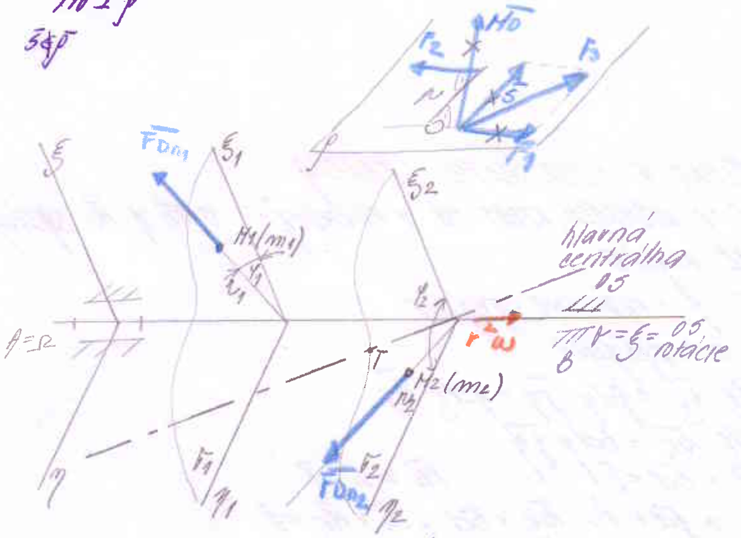
TUHÝ ROTOR - PRI PREVÁDZKOVÝCH OTÁČKACH SA CHOVÁ AKO ABSOLÚTNE TUHÉ TELESO

$A_{d\xi} = A_{d\eta} = B_{d\xi} = B_{d\eta} = 0$

→ VZNIKNE SYSTÉM 4 ROVNÍC O 4 NEZNÁMYCH
→ BUDE TO SPLNENÉ, AK: $\xi_T = \eta_T = 0$
→ KEĎ T LEŽÍ NA OSI ROTÁCIE A $D_{\xi\zeta} = D_{\eta\zeta} = 0$
ζ - HLAVNÁ CENTRÁLNA OS ZOTRVAČNOSTI
$\zeta \equiv o$

DRUHY NEVYVÁŽENOSTI

$\bar{M}_O \perp \rho$
$S \in \rho$



$F_1 = F_2$
$F_1 \cdot p = M_O \Rightarrow p = \frac{M_O}{F_1}$
$\bar{F}_2$ a $\bar{F}_3$ SÚ MIMOBEŽNÉ → SILOVÝ KRÍŽ
→ NAHRADENIE VPSS SILOVÝM KRÍŽOM

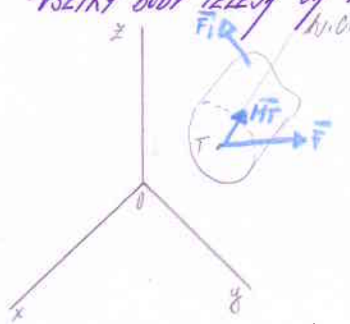
$F_{Dni} = m_i r_i \omega^2$; $i = 1, 2, 3, \dots$
$N_i = \frac{F_{Dni}}{\omega^2} = m_i r_i$
N_i - NEVYVAŽOK
σ_1 A σ_2 → VYVAŽOVACIE ROVINY

NECH TIETO DVE MIMOBEŽNÉ SILY PREDSTAVUJÚ ODSTREDIVÉ SILY HMÔT. OD VZÁJOMNEJ POLOHY NEVYVAŽKOV ZÁVISÍ VZÁJOMNÁ POLOHA OSI ROTÁCIE TELESA A HLAVNEJ CENTRÁLNEJ OSI.

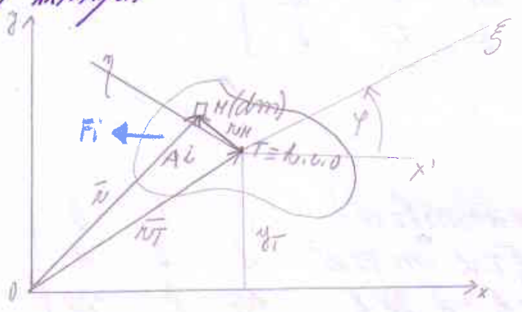
o.r ∥ h.c.o → STATICKÁ NEVYVÁŽENOSŤ
-SILY F_{Dni} SÚ VZÁJOMNE ROVNOBEŽNÉ, VYVAŽOVANIE V 1 ROVINE
o.r. RÔZNOBEŽNÁ h.c.o. → KVÁZI STATICKÁ NEVYVÁŽENOSŤ
→ SILY F_{Dni} SÚ NAVZÁJOM RÔZNOBEŽNÉ, VYVAŽOVANIE V 1 ROVINE
o.r. RÔZNOBEŽNÉ h.c.o. PRETÍNAJÚ SA V T, SILY F_{Dni} TVORIA SILOVÚ DVOJICU, VYVAŽOVANIE V 2 ROVINÁCH
DVOJICOVÁ NEVYVÁŽENOSŤ
o.r. MIMOBEŽNÁ h.c.o. → VŠEOBECNÁ NEVYVÁŽENOSŤ
-SILY F_{Dni} SÚ VZÁJOMNE MIMOBEŽNÉ, VYVAŽOVANIE V 2 ROVINÁCH

VŠEOBECNÝ ROVINNÝ POHYB TELESA

-VŠETKY BODY TELESA SA POHYBUJÚ PO ROVINNÝCH KRIVKÁCH



$\bar{M}_T \perp \nu$
$\bar{F} \in \nu$
$z \parallel h.c.o$



$T(x_T, y_T)$
$x_T = x_T(t)$
$y_T = y_T(t)$
$\varphi = \varphi(t)$

TENTO POHYB ROZKLADÁME NA TRANSLAČNÝ POHYB REFERENČNÉHO BODU A NA ROTAČNÝ POHYB OKOLO TOHTO BODU.

POHYBOVÉ ROVNICE TELESA: $\bar{F} = m \cdot \bar{a}_T$; $\bar{F} = \sum \bar{F}_i$; $\bar{M}_O = \frac{d\bar{L}_O}{dt}$; $\bar{M}_O = \sum \bar{M}_{iO}$ (1)

BOD O - VZŤAŽNÝ BOD ; BOD T - REFERENČNÝ BOD

$\bar{L}_O = \bar{r}_T \times m\bar{v}_T + \int \bar{r}^* \times dm\, \bar{v}^*$

v^* - RÝCHLOSŤ ELEMENTU VZHĽADOM NA ŤAŽISKO

$\bar{L}_O = \bar{r}_T \times m\bar{v}_T + \int \bar{r}^* \times dm\,(\bar{\omega} \times \bar{r}^*)$

$\int_m \bar{r}^* \times dm \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}^*) = \int_m [(\bar{r}^* \cdot \bar{r}^*)\bar{\omega}\, dm - (\bar{r}^* \cdot \bar{\omega})\bar{r}^*\, dm] = \bar{\omega} \cdot I_T$

$\bar{L}_O = \bar{r}_T \times m\bar{v}_T + I_T\bar{\omega}$

$\bar{M}_O = \bar{r}_T \times m\bar{a}_T + I_T\bar{\varepsilon}$ (2)

(1) a (2) SÚ POHYBOVÉ ROVNICE TELESA V PRÍPADE, ŽE REFERENČNÝ BOD JE T A VZŤAŽNÝ BOD JE O

(1) $\rightarrow x$

$\searrow y$

(2)

$M_T = I_T \cdot \bar{\alpha}$ (2')

(1) a (2') SÚ POHYBOVÉ ROVNICE TELESA AK REFERENČNÝ A VZŤAŽNÝ BOD JE T.

KINETICKÁ ENERGIA TELESA

$E_k = \sum \frac{1}{2} m_i \cdot v_i^2$ — $\bar{v}$ - RÝCHLOSŤ ELEMENTU

$[\bar{v}^2 = v^2]$ $E_k = \int_m \frac{1}{2} m_i\, v^2$ — $\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}_{MK}$

$E_k = \frac{1}{2}\omega^2 \int_m$ — $v = \omega \cdot MK$

$E_k = \frac{1}{2}\omega^2 I_K$ — $\bar{r}_{MK}$ - POLOHOVÝ VEKTOR ELEMENTU VZHĽADOM NA OKAMŽITÝ STRED OTÁČANIA

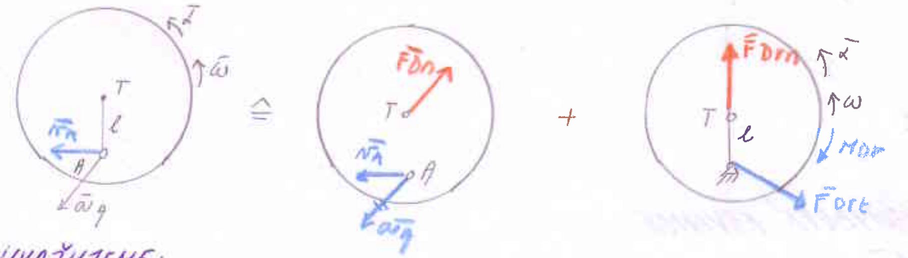
$I_K = I_T + m \cdot KT^2$

$E_k = \frac{1}{2} m \cdot v_T^2 + \int_m \frac{1}{2} dm \cdot v^{*2}$; $\bar{v}^* = \bar{\omega} \times \bar{r}^*$

$E_k = \frac{1}{2} m v_T^2 + \frac{1}{2}\omega^2 \int_m MT^2 dm$ — $v^* = \omega\, MT$

$E_k = \frac{1}{2} m v_T^2 + \frac{1}{2}\omega^2 I_T$

VÝSLEDNÉ ZOTRVAČNÉ ÚČINKY



UVAŽUJEME:

POSUVNÝ POHYB - UNÁŠAVÝ POHYB

ROTAČNÝ POHYB - RELATÍVNY POHYB

$\bar{F}_{Dn} = -m \cdot \bar{a}_q$

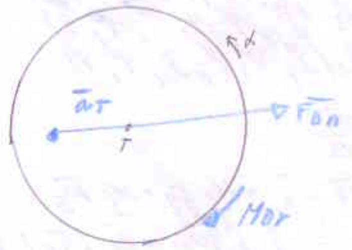
$\bar{F}_{Dn} = \bar{F}_{aTq} = -m \cdot \bar{a}_{Tq} = m \cdot \bar{r}_{Tq} \times \bar{\alpha} + m\omega^2 \cdot \bar{r}_{Tq}$

$M_{Dr} = -I_q \cdot \alpha$

ak T ... referenčný bod

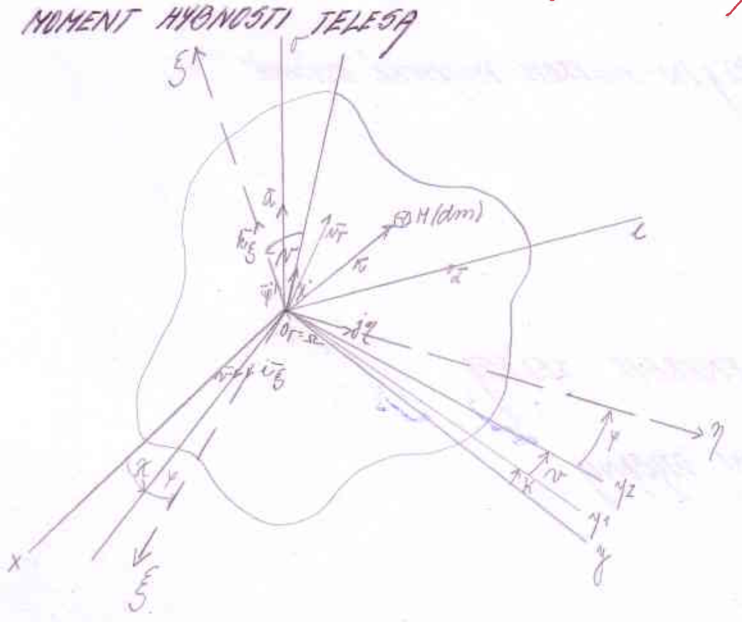
$\bar{F}_{DN} = -m \cdot \bar{a}_T$

$\bar{M}_{Dr} = -I_T \cdot \bar{\alpha}$



SFÉRICKÝ POHYB TELESA

MOMENT HYBNOSTI TELESA



ψ - UHOL PRECESIE

ν - UHOL NUTÁCIE

φ - UHOL VLASTNEJ ROTÁCIE

ν a λ SÚ NEKOLINEÁRNE

$\dot{\bar{\psi}} + \dot{\bar{\vartheta}} + \dot{\bar{\varphi}} = \bar{\omega}$

$L_0 = \int_m \bar{r} \times dm\, \bar{v}$

$\bar{r} = \xi \bar{i}_\xi + \eta \bar{j}_\eta + \zeta \bar{k}_\zeta$

$$L_0 = \int_m \begin{vmatrix} \bar{i}_\xi & \bar{j}_\eta & \bar{k}_\zeta \\ \xi & \eta & \zeta \\ \omega_\eta \zeta - \omega_\zeta \eta & \omega_\zeta \xi - \omega_\xi \zeta & \omega_\xi \cdot \eta - \omega_\eta \xi \end{vmatrix} dm = L_\xi \bar{i}_\xi + L_\eta \bar{j}_\eta + L_\zeta \bar{k}_\zeta$$

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{i}_\xi & \bar{j}_\eta & \bar{k}_\zeta \\ \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} = \bar{i}_\xi (\omega_\eta \zeta - \omega_\zeta \eta) + \bar{j}_\eta (\omega_\zeta \xi - \omega_\xi \zeta) + \bar{k}_\zeta (\omega_\xi \cdot \eta - \omega_\eta \xi)$$

$L_\xi = I_\xi \omega_\xi - D_{\xi\eta} \omega_\eta - D_{\xi\zeta} \omega_\zeta$

$L_\eta = I_\eta \omega_\eta - D_{\eta\xi} \cdot \omega_\xi - D_{\eta\zeta} \omega_\zeta$

$L_\zeta = I_\zeta \omega_\zeta - D_{\zeta\xi} \omega_\xi - D_{\zeta\eta} \cdot \omega_\eta$

V PRÍPADE, ŽE OSI ξ, η, ζ SÚ HLAVNÝMI OSAMI, POTOM:

$L_\xi = I_\xi \omega_\xi$

$L_\eta = I_\eta \cdot \omega_\eta$

$L_\zeta = I_\zeta \cdot \omega_\zeta$

$L_0 = \sqrt{I_\xi^2 \omega_\xi^2 + I_\eta^2 \omega_\eta^2 + I_\zeta^2 \omega_\zeta^2}$

EULEROVE (DYNAMICKÉ) POHYBOVÉ ROVNICE:

$\bar{\omega} = \omega_\xi \bar{i}_\xi + \omega_\eta \bar{j}_\eta + \omega_\zeta \bar{k}_\zeta$

$\omega_\xi = f_1 (\dot{\psi}, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}, \psi, \vartheta, \varphi)$

$\omega_\eta = f_2 (\dot{\psi}, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}, \psi, \vartheta, \varphi)$

$\omega_\zeta = f_3 (\dot{\psi}, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}, \psi, \vartheta, \varphi)$

$\omega_\xi = \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi + \dot{\vartheta} \sin \varphi$

$\omega_\eta = \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi - \dot{\vartheta} \sin \varphi$

$\omega_\zeta = \quad \cos \vartheta + \dot{\varphi}$

$M_0 = \frac{dL_0}{dt}$

$M_r = M_\xi \bar{i}_\xi + M_\eta \bar{j}_\eta + M_\zeta \bar{k}_\zeta$

$[\dot{L}_0]_v = [\dot{L}_0]_p + \omega_{pr} \times \bar{L}_0 \quad / \bar{i}_\xi / \bar{j}_\eta / \bar{k}_\zeta$

VZTAŽNÝ PRIESTOR   POHYBUJÚCI SA PRIESTOR

$$\bar{\omega}_{pr} \times \bar{L}_0 = \begin{vmatrix} \bar{i}_\xi & \bar{j}_\eta & \bar{k}_\zeta \\ \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \\ L_\xi & L_\eta & L_\zeta \end{vmatrix}$$

$M_\xi = \dot{L}_\xi + \omega_\eta \cdot L_\zeta - \omega_\zeta L_\eta \quad (1)$

$M_\eta = \dot{L}_\eta + \omega_\zeta L_\xi - \omega_\xi \cdot L_\zeta \quad (2)$

$M_\zeta = \dot{L}_\zeta + \omega_\xi L_\eta - \omega_\eta L_\xi \quad (3)$

(1) A (2) A (3) - EULEROVE DYNAMICKÉ ROVNICE

KINETICKÁ ENERGIA TELESA

$E_k = \frac{1}{2} I_0 \omega^2$

I_0 - MOMENT ZOTRVAČNOSTI K OKAMŽITEJ OSI OTÁČANIA
- PREMENLIVÁ POLOHA TELESA SA MENÍ

$E_k = \frac{1}{2} \int v^2 dm$

$\bar{v}^2 = v^2$

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} \begin{vmatrix} i_\xi & j_\eta & k_\zeta \\ \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} = i_\xi(\omega_\eta \zeta - \omega_\zeta \eta) + j_\eta(\omega_\zeta \xi - \omega_\xi \zeta) + k_\zeta(\omega_\xi \eta - \omega_\eta \xi)$$

ξ, η, ζ PEVNE SPOJENÉ S TELESOM

$$\bar{v}^2 = v^2 = (\omega_\eta \zeta - \omega_\zeta \eta)^2 + (\omega_\zeta \xi - \omega_\xi \zeta)^2 + (\omega_\xi \eta - \omega_\eta \xi)^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} I_\xi \omega_\xi^2 + \frac{1}{2} I_\eta \omega_\eta^2 + \frac{1}{2}_\zeta \omega_\zeta^2 - D_{\xi\eta} \omega_\xi \omega_\eta - D_{\xi\zeta} \omega_\xi \omega_\zeta - D_{\eta\zeta} \omega_\eta \omega_\zeta$$

*

NECH OS, KTORÁ JE OKAMŽITOU OSOU OTÁČANIA S OSOU $\xi\ \eta\ \zeta$ UHLY α, β, γ; POTOM

$\omega_\xi = \bar{\omega}\, i_\xi = \omega \cos\alpha$

$\omega_\eta = \bar{\omega}\, j_\eta = \omega \cos\beta$

$\omega_\zeta = \bar{\omega}\, k_\zeta = \omega \cos\gamma$

$$E_k = \frac{1}{2}\omega^2 [I_\xi \cos^2\alpha + I_\eta \cos^2\beta + I_\zeta \cos^2\gamma - 2D_{\xi\eta} \cos\alpha \cos\beta - 2D_{\xi\zeta} \cos\alpha \cos\gamma - 2D_{\eta\zeta} \cos\beta \cos\gamma]$$

$$I_0 = [_\xi \cos^2\alpha + I_\eta \cos^2\beta + I_\zeta \cos^2\gamma - 2D_{\xi\eta} \cos\alpha \cos\beta - 2D_{\xi\zeta} \cos\alpha \cos\gamma - D_{\eta\zeta} \cos\beta \cos\gamma]$$

ZOTRVAČNÍKOVÝ POHYB TUHÉHO TELESA

DYNAMICKÝ POHYB TELESA - ZOTRVAČNÍKY - TELESO KONAJÚCE SFÉRICKÝ POHYB
- AK $\dot{\varphi} >> \dot{\psi}$ ⇒ GYROSKOP

A, BEZSILOVÝ ZOTRVAČNÍK - ROTAČNE SYMETRICKÉ TELESO, KTORÉ KONÁ SFÉRICKÝ POHYB OKOLO ŤAŽISKA, KTORÝ LEŽÍ NA OSI ROTAČNEJ SYMETRIE TELESA

B, ŤAŽKÝ ZOTRVAČNÍK - ROTAČNE SYMETRICKÉ TELESO, KTORÉ KONÁ POHYB OKOLO BODU, KTORÝ LEŽÍ NA OSI ROTAČNEJ SYMETRIE, ALE NIE JE S ŤAŽISKOM

BEZSILOVÝ ZOTRVAČNÍK

OS ζ JE HLAVNÁ CENTRÁLNA OS

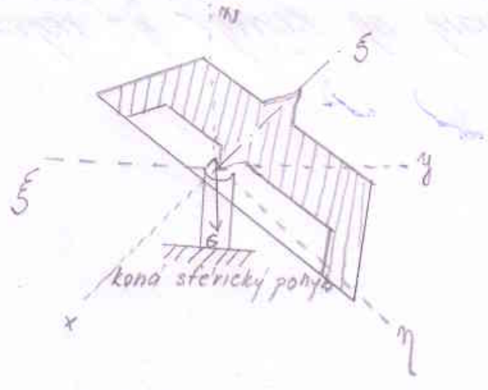
$I_\xi = I_1 = I_\eta = I_2 = I \neq I_\zeta = I_3$

$\bar{M}_0 = \frac{d\bar{L}_0}{dt}$

$\bar{M}_0 = 0 \Rightarrow \bar{L}_0 = konšt.$

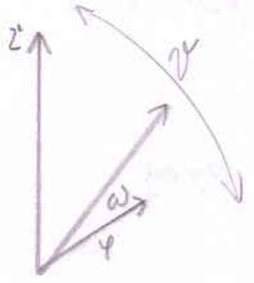
$E_k = konšt.$

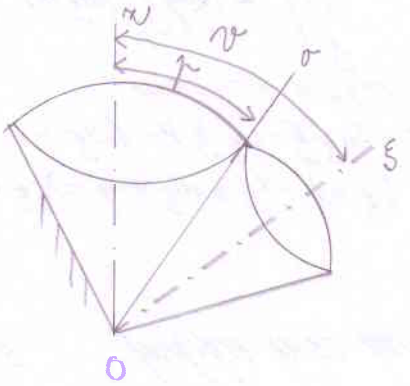
! - VYUŽÍVA SA NA LIETADLÁCH, LODIACH



ϑ - KONŠTANTA

$\bar{\omega} = \bar{\dot{\psi}} + \bar{\dot{\vartheta}} + \bar{\dot{\varphi}}$





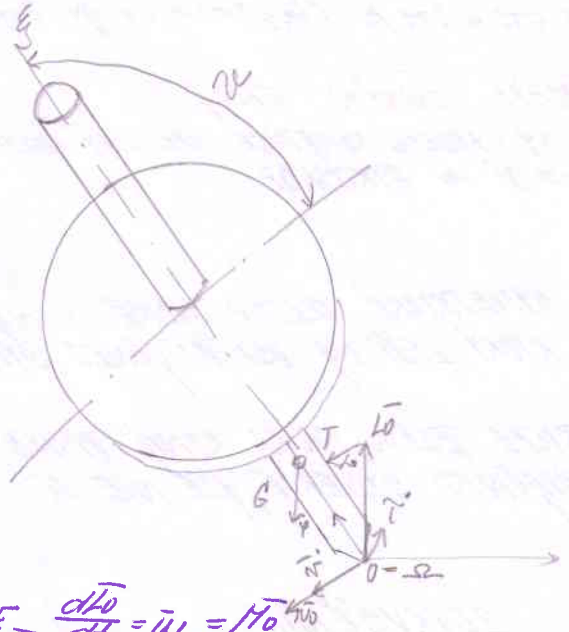
$$\dot{\psi} = \frac{I_3 \dot{\varphi}}{(I - I_3)\cos\vartheta}$$

ŤAŽKÝ ZOTRVAČNÍK

! $I = I_\xi = I_1 = I_\eta = I_2 \neq I_\zeta = I_3$

$M_0 = \bar{r}_T \times \bar{G}$

$M_0 = r_T \cdot G \cdot \sin\vartheta \quad (\sin(\pi - \vartheta) = \sin\vartheta)$



OZNAČME $\frac{d\bar{L}_0}{dt} = \bar{u} = \bar{M}_0$

$\bar{M}_0 = \frac{d\bar{L}_0}{dt} \Rightarrow d\bar{L}_0 = \bar{M}_0 dt$

$L_0 = konšt.$

$\bar{u} = \bar{\dot{\psi}} \times \bar{L}_0$

! $\bar{M}_0 = \bar{\dot{\psi}} \times \bar{L}_0$

PRIBLIŽNÉ RIEŠENIE:

$\vartheta = konšt. = \vartheta_0 \Rightarrow \omega_\xi = \dot{\psi} \sin\vartheta_0 \qquad L_\xi = I_1 \omega_\xi = I_1 \dot{\psi} \sin\vartheta_0$

$\omega_\zeta = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta_0 \qquad L_\zeta = I_3 \omega_\zeta = I(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta_0)$

$\bar{M}_0 = \bar{r}_T \times \bar{G} = r_T \cdot \bar{k}_\zeta \times (-\bar{k}G) = -\bar{j}_\eta r_T \cdot G \sin\vartheta_0$

$\bar{u} = \bar{\dot{\psi}} \times \bar{L}_0 = \dot{\psi} \cdot \bar{k} \times (L_\xi \bar{i}_\xi + L_\zeta \bar{k}_\zeta) = -\bar{j}_\eta [\dot{\psi}^2 (I_3 - I_1)\cos\vartheta_0 \cdot I_3 \dot{\varphi} \dot{\psi}] \sin\vartheta_0$

KEĎŽE SA ROVNAJÚ ĽAVÉ STRANY, MUSIA SA ROVNAŤ AJ PRAVÉ

$\dot{\psi} = f(\dot{\varphi})$

$\bar{M}_0 + \underbrace{\bar{L}_0 \times \bar{\dot{\psi}}}_{\text{MOMENT ZOTRVAČNOSTI ÚČINKOV}} = \bar{0}$

$\bar{M}_G = \bar{L}_0 \times \bar{\dot{\psi}}$; $\bar{M}_G$ - GYROSKOPICKÝ MOMENT

$\bar{M}_G = \bar{j}_\eta \cdot \dot{\varphi} \cdot \dot{\psi} \sin\vartheta_0 [I_3 + \frac{\dot{\psi}}{\dot{\varphi}}(I_3 - I) \cdot \cos\vartheta_0]$

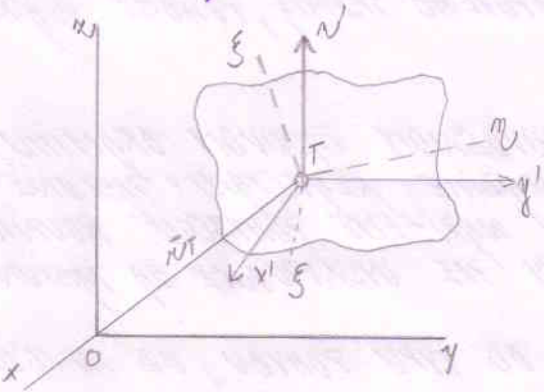
$M_G = \left[I_3 + \frac{\dot{\psi}}{\dot{\varphi}}(I_3 - I)\cos\vartheta_0\right](\bar{\dot{\psi}} \times \bar{\dot{\varphi}}) = -\left[I_3 + \frac{\dot{\psi}}{\dot{\varphi}}(I_3 - I)\cos\vartheta_0\right]\bar{\alpha}_R \; ; \; \bar{\omega}_w \times \bar{\omega}_R = \bar{\alpha}_R$

α_R - RESALOVÉ UHLOVÉ ZRÝCHLENIE

AK $\dot{\varphi} >> \dot{\psi} \Rightarrow M_G = I_3 \; (\bar{\dot{\varphi}} \times \bar{\dot{\psi}})$

VŠEOBECNÝ PRIESTOROVÝ POHYB TELESA

- ROZKLADÁME HO NA TRANSLAČNÝ POHYB REFERENČNÉHO BODU A NA SFÉRICKÝ POHYB OKOLO TOHTO BODU
- VOLÍME T ZA REFERENČNÝ BOD



POHYBOVÉ ROVNICE:

$m \cdot \ddot{\bar{r}}_T = \bar{F}$

$\frac{d\bar{L}_0}{dt} = \bar{M}_0 \; \left(\frac{d\bar{L}_T}{dt} = \bar{M}_T\right)$

$\{x_T, y_T, z_T, \psi, \vartheta, \varphi\}$ - VEĽMI NÁROČNÉ MATEMATICKÉ RIEŠENIE

$E_k = \frac{1}{2} m v_T^2 + \frac{1}{2} I_0 \cdot \omega^2$

$E_k = \frac{1}{2} m v_T^2 + \frac{1}{2} I_\xi \omega_\xi + \frac{1}{2} I_\eta \omega_\eta + \frac{1}{2} I_\zeta \omega_\zeta \Rightarrow$ AK SÚ OSI ξ, η, ζ HLAVNÝMI OSAMI

DYNAMICKÉ POMERY PRI 2 SÚČASNÝCH POHYBOCH. DYNAMIKA RELATÍVNEHO POHYBU

$\bar{a}_i = \bar{a}_{im} + \bar{a}_{ir} + \bar{a}_{ic}$

POHYBOVÉ ROVNICE:

$\sum m_i \bar{a}_i = \sum \bar{F}_i \quad (1)$

$\sum \bar{r}_i \times m \bar{a}_i = \sum \bar{M}_{i0}$

$(1) \quad \sum m_i (\bar{a}_{im} + \bar{a}_{ir} + \bar{a}_{ic}) = \bar{F}$

$\sum m_i \bar{a}_{ir} = \bar{F} + (-\sum m_i \cdot \bar{a}_{in}) + (-\sum m_i \bar{a}_{ic})$

$\sum m_i \bar{a}_{ir} = \bar{F} + \sum \bar{F}_{Din} + \sum \bar{F}_{Dic} \quad (2)$

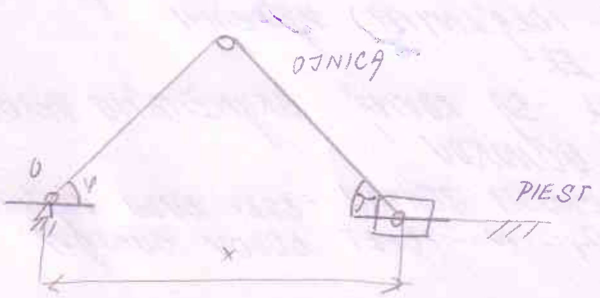
$\bar{F}_{Din} = -m_i \bar{a}_{in}$

$\bar{F}_{Dic} = -m_i \bar{a}_{ic}$

OBJEKT BUDE V RELATÍVNEJ ROVNOVÁHE AK BUDÚ V ROVNOVÁHE VONKAJŠIE SILY A ZOTRVAČNÉ SILY.

DYNAMIKA SÚSTAV TELIES

$\{\varphi, x\} = f_1(\varphi) \Rightarrow q = \varphi$



$x \quad x' \quad x''$ - ZOVŠEOBECNENÁ SÚRADNICA
$s \quad s' \quad s''$ - NEZÁVISLÁ SÚRADNICA
$\varphi \quad \varphi' \quad \varphi''$ - URČUJE NÁM POLOHU VO VŠEOBECNOM ČASOVOM OKAMIHU
$q = \{x, s, \varphi\}$
AK MÁME n STUPŇOV POHYBU $\Rightarrow q_i = (i = a)\ 1, 2, 3, \dots n)$
DANÉ GHV (GEOMETRICKÉ - HMOTOVÉ VELIČINY) - (POLOHA ŤAŽ. MOMENT. ZOTRVAČNOSŤ, DEVIAČNÉ MOMENTY) < S IDEÁLNYMI VÄZBAMI / S REÁLNYMI VÄZBAMI
KPO (KOEFICIENTY PASÍVNYCH ODPOROV) - (VEDIEŤ ZO STATIKY), NAPR. RAMENO MOMENTU VALIVÉHO ODPORU KOEFICIENT ŠMYK. TRENIA, ČAPOVÉHO TRENIA, TUHOSŤ VLÁKNA)
HČ: MM - MATEMATICKÝ MODEL

1, METÓDA UVOLŇOVANIA
- UVOLNÍME JEDNOTLIVÉ TELESÁ V ĽUBOVOĽNOM ČASOVOM OKAMIHU, ZAKRESLÍME VONKAJŠIE SILY + VÄZBY, NAHRADÍME REAKCIAMI + PASÍVNE ODPORY)
- PRE JEDNOTLIVÉ UVOĽNENÉ OBJEKTY NAPÍŠEME POHYBOVÉ ROVNICE
- K TÝMTO ROVNICIAM PRIDÁME VZŤAHY PRE VYSKYTUJÚCE SA PASÍVNE ODPORY
- (TVAR POHYBOVÝCH ROVNÍC ZÁVISÍ OD TYPU POHYBU, OD METÓDY ICH ZOBRAZOVANIA)
- URČIŤ ZÁVISLÉ KINEMATICKÉ VELIČINY V POHYBOVÝCH ROVNICIACH AKO FUNKCIU NEZÁVISLÝCH KINEMATICKÝCH VELIČÍN

$I_0 \cdot \varphi = M_0$
$m \cdot x'' = F$

MECHANIZMY → S KONŠTANTNÝM PREVODOM
→ S NEKONŠTANTNÝM PREVODOM

PRI KONŠTANTNOM PREVODE BUDE ZÁVISLOSŤ ZÁVISLÝCH SÚRADNÍC A NEZÁVISLOU SÚRADNICOU LINEÁRNA. PRI NEKONŠTANTNOM POHYBE BUDE TÁTO ZÁVISLOSŤ NELINEÁRNA
TOTO VŠETKO SPOLU TVORÍ MATEMATICKÝ MODEL PRÍSLUŠNÉHO DYNAMICKÉHO MODELU.
RIEŠENÍM JE: $q_1 = q_1(t)$
- PRI RIEŠENÍ SÚSTAV TELIES MOŽNO S VÝHODOU POUŽIŤ VETY ODVODIVÉ PRI HMOTNOM BODE, RESPEKTÍVE PRI SÚSTAVE HMOTNÝCH BODOV
→ VETA O ZMENE KINETICKEJ ENERGIE
- ZMENA EK SÚSTAVY MEDZI JEJ DVOMA POLOHAMI SA ROVNÁ PRÁCI PRACOVNÝCH SÍL PÔSOBIACICH NA SÚSTAVU MEDZI TÝMITO POLOHAMI
→ VETA O ZMENE HYBNOSTI
→ VETA O ZMENE MOMENTU HYBNOSTI
POUŽITIE TÝCHTO VIET JE VÝHODNÉ, AK SA JEDNÁ O SÚSTAVY S IDEÁLNYMI VÄZBAMI (PRI REÁLNYCH VÄZBÁCH SA TÁTO VÝHODA SKRÁTI PRACOVNÝMI SILAMI SÚ VNÚTORNÉ ÚČINKY)
→ TÁTO METÓDA JE UNIVERZÁLNA
→ METÓDA REDUKCIE HMOTOVÝCH A SILOVÝCH VELIČÍN
- SLÚŽI NA ZASTAVENIE VLASTNEJ POHYBOVEJ ROVNICE SÚSTAVY S VOĽNÝM STUPŇOM VOĽNOSTI POHYBU S IDEÁLNYMI VÄZBAMI
- VYCHÁDZAME Z VETY O ZMENE EK
$\frac{dE_k}{dt} = P_p$ - OKAMŽITÁ ZMENA EK SA ROVNÁ OKAMŽITÉMU VÝKONU PRACOVNÝCH SILOVÝCH ÚČINKOV
- PRETOŽE MÁME SÚSTAVU S 1° VOĽNOSTI POHYBU - BODY BUDÚ VIAZANÉ
- POLOHA BODU: $r_j = r_j(q)$ $j = 1, 2, \dots N$ - POČET BODOV SÚSTAVY

$$\vec{r}_j = \vec{r}_j(q) \qquad (j = 1, 2, 3 \dots N)$$

$$\vec{v}_j = \dot{\vec{r}}_j = \frac{d\vec{r}_j}{dq}\cdot\frac{dq}{dt} = \frac{d\vec{r}_j}{dq}\,\dot{q}$$

$$E_k = \sum_j \frac{1}{2} m_j v_j^2 = \frac{1}{2}\Big[\underbrace{\sum_j m_j \left(\frac{d\vec{r}_j}{dq}\right)^2}_{M^*(q)}\Big]\dot{q}^2 = \frac{1}{2} M^*(q)\,\dot{q}^2$$

q - FUNKCIA ČASU

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{1}{2}\left[\frac{M^*(q)}{dq}\,\dot{q}^3 + M^*(q)\;\; 2\dot{q}\cdot\ddot{q}\right]$$

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{1}{2}\left[\frac{dM^*(q)}{dq}\,\dot{q}^2 + 2M^*(q)\cdot\ddot{q}\right]\dot{q}$$

$$P_p = \sum_j \vec{F}_{jp}\cdot\vec{v}_j = \Big[\underbrace{\sum_j \vec{F}_{jp}\cdot\frac{d\vec{r}_j}{dq}}_{Q}\Big]\dot{q} = Q\cdot\dot{q}$$

$$\frac{dE_k}{dt} = P_p$$

$$M^*(q)\,\ddot{q} + \frac{1}{2}\frac{dM^*(q)}{dq}\,\dot{q}^2 = Q$$

- VLASTNÁ POHYBOVÁ ROVNICA SÚSTAVY S JEDNÝM STUPŇOM VOĽNOSTI
- DIFERENCIÁLNA ROVNICA 2. RÁDU NELINEÁRNA S NEKONŠTANTNÝMI KOEFICIENTAMI

RIEŠENIM $\Rightarrow q = q(t)$

$M^*(q)$ - ZOVŠEOBECNENÁ REDUKOVANÁ HMOTNOSŤ

Q - ZOVŠEOBECNENÁ REDUKOVANÁ SILA

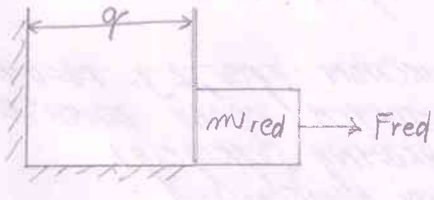
$M^*(q)$ - URČUJEME Z ROVNOSTI JEJ KINETICKEJ ENERGIE A KINETICKEJ ENERGIE CELEJ SÚSTAVY

$$\frac{1}{2}M^*\dot{q}^2 = \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2 \Rightarrow M^* = ?$$

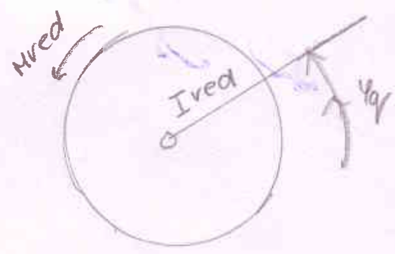
Q - URČUJEME Z ROVNOSTI JEJ OKAMŽITÉHO VÝKONU A OKAMŽITÉHO VÝKONU VŠETKÝCH PRACOVNÝCH ÚČINKOV PÔSOBIACICH NA SÚSTAVU

$$Q\cdot\dot{q} = \sum_j \vec{F}_{jp}\cdot\vec{v}_j \Rightarrow Q = ?$$

REDUKCIA NA POSÚVAJÚCI SA ČLEN



REDUKCIA NA ROTUJÚCI ČLEN



V PRÍPADE MECHANIZMOV S KONŠTANT. PREVODOM JE $M^*(q) =$ KONŠTANTA
A POHYBOVÁ ROVNICA BUDE MAŤ TVAR $M^* \ddot{q} = Q$

$m_{red} \cdot \ddot{q} = F_{red}$

$I_{red} \cdot \ddot{\varphi} = M_{red}$

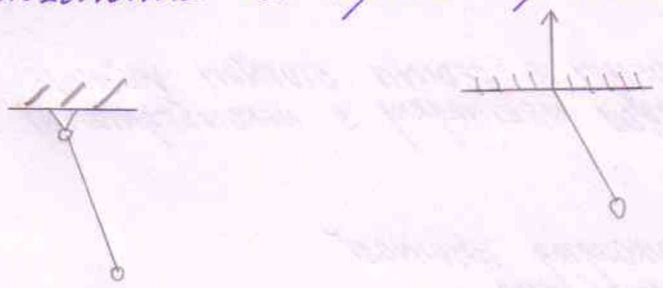
ČASTO SÚSTAVA MRHSV JE LEN ŠPECIÁLNYM PRÍPADOM LAGRANGEOVÝCH ROVNÍC DRUHÉHO DRUHU PRE SÚSTAVY S 1° VOĽNOSTI POHYBU

ZÁKLADY ANALYTICKEJ DYNAMIKY

→ ZÁKLADNÉ POJMY

KLASIFIKÁCIA VÄZIEB

- SKLERONOMNÉ - NIE SÚ ZÁVISLÉ NA ČASE
- REONOMNÉ - SÚ ZÁVISLÉ NA ČASE
- HOLONOMNÉ - NIE SÚ ZÁVISLÉ NA RÝCHLOSTI, V TECHNICKEJ PRAXI
- NEHOLONOMNÉ - SÚ ZÁVISLÉ NA RÝCHLOSTI



SKRÁTENÁ VÄZBA   VÄZBA

POČET STUPŇOV VOĽNOSTI POHYBU

- JE DANÝ POČTOM NEZÁVISLÝCH SÚRADNÍC q_i, KTORÉ URČUJÚ POLOHU SÚSTAVY VO VŠEOBECNOM ČASOVOM OKAMŽIKU

$\dot{q}_i$ - ZOVŠEOBECNENÉ RÝCHLOSTI

$i = 1, 2, 3, \dots n$

$j = 1, 2, 3, \dots N$

$\vec{r}_j = \vec{r}_j(q_1, q_2, \dots q_n)$ - SKLERONOMNÉ VÄZBY $\quad d\vec{r}_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} dq_i$

$\vec{r}_j = \vec{r}_j(q_1, q_2, \dots q_n, t)$ - REONOMNÉ VÄZBY $\quad d\vec{r}_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial t} dt$

POHYB

- SKUTOČNÝ - SÚSTAVA HO KONÁ V ČASE A VÄZBY HO DOVOĽUJÚ [ELEMENTÁRNE Č. ZMENY -d- ADIFERENCIÁLA]
- VIRTUÁLNY - SÚSTAVA HO MÔŽE KONAŤ V URČITOM ČASE, t.j. POLOHE, KTORÝ V URČITOM ČASE SÚSTAVA ZAUJME) A KTORÝCH VÄZBY DOVOĽUJÚ

- ZMENY VELIČÍN OZNAČUJEME δ (IZOCHRÓMNA VARIÁCIA)
- UVAŽUJEME, ŽE ČAS SA NEMENÍ, JE URČITÝ, KONŠTANTNÝ

PRI SKLERONOMNÝCH VÄZBÁCH JE SKUTOČNÝ POHYB JEDNÝM Z VIRTUÁLNYCH POHYBOCH. PRI REONOMNÝCH VÄZBÁCH JE SKUTOČNÝ POHYB NEZHODNÝ SO ŽIADNYM S VIRTUÁLNYCH POHYBOCH.

$d\vec{r}_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \delta q_i$ - [SV+RV]

2, PRINCÍP VIRTUÁLNYCH PRÁC

$\vec{F}_j = \vec{F}_{jp} + \vec{F}_{jv}$

$j = 1, 2, 3, \dots N$

$\bar F_{jP}$ - PRACOVNÁ ZLOŽKA SILY $\bar F_j$

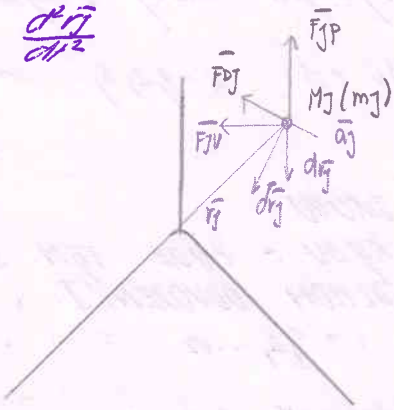
- MUSÍ LEŽAŤ V SMERE VEKTORA $d\bar z$

$\bar F_{jV}$ - VÄZBOVÁ ZLOŽKA SILY $\bar F_j$

- LEŽÍ KOLMO NA VEKTOR $d\bar z$

$$\bar F_j + \bar F_{Dj} = \bar 0$$

$$\bar F_{Dj} = -m_j a_j = -m_j \frac{d^2 \bar r_j}{dt^2}$$



→ NECH TÁTO SÚSTAVA KONÁ VIRTUÁLNY POHYB

→ VIRTUÁLNA PRÁCA

$$\delta A_P = \sum_j \bar F_j \cdot \delta \bar r_j = \sum_j (\bar F_{jP} + \bar F_{jV}) \delta \bar r_j = \sum_j \bar F_{jP} \cdot \delta \bar r_j$$

$$\delta A_D = \sum \bar F_{Dj} \cdot \delta \bar r_j$$

$$\sum_j (\bar F_{jP} + \bar F_{Dj}) \delta \bar r_j = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \delta A_P + \delta A_D = 0 \\ \delta A_{PID} = 0 \end{array}\right\}$$ MATEMATICKÝ ZÁPIS PRINCÍPU VIRTUÁLNYCH PRÁC V DYNAMIKE, SLOVNE:

SÚSTAVA SA V KAŽDOM OKAMIHU HÝBE TAK, ŽE ALGEBRAICKÝ SÚČET VIRTUÁLNYCH PRÁC VŠETKÝCH PRACOVNÝCH A ZOTRVAČNÝCH SÍL JE ROVNÝ NULE.

$$\delta A_P = \sum_{j=1}^{N} \bar F_{jP} \cdot \delta \bar r_j$$

$$\delta \bar r_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar r_j}{\partial q_i} \delta q_i$$

1-N → POČET HMOTNÝCH BODOV

1-n → POČET STUPŇOV VOĽNOSTI SÚSTAVY

$$\delta A_P = \sum_{j=1}^{N} \bar F_{jP} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar r_j}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{N} \bar F_{jP} \cdot \frac{\partial \bar r_j}{\partial q_i} \right) \delta q_i$$

$$Q_i = \sum_{j=1}^{N} \bar F_{jP} \frac{\partial \bar r_j}{\partial q_i}$$

Q_i - ZOVŠEOBECNENÁ SILA ODPOVEDAJÚCA ISTEJ ZOVŠEOBECNENEJ SÚRADNICI

$$\delta A_P = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i \Rightarrow Q_i = \frac{\partial A_P}{\partial q_i}$$

$$\delta A_D = \sum_{i=1}^{n} Q_{Di} \delta q_i \Rightarrow Q_{iD} = \frac{\partial A_D}{\partial q_i}$$

$$Q_{iD} = \sum_{j=1}^{N} \bar F_{Dj} \cdot \frac{\partial \bar r_j}{\partial q_i}$$

Q_{iD} → ZOVŠEOBECNENÁ ZOTRVAČNÁ SILA

$$\delta A_P + \delta A_D = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i + \sum_{i=1}^{n} Q_{Di} \delta q_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (Q_i + Q_{Di}) \delta q_i = 0 \Rightarrow Q_i + Q_{Di} = 0$$

$$i = 1, 2, \dots n$$

NAJVŠEOBECNEJŠIE ROVNICE DYNAMIKY POHYBUJÚCICH SA SYSTÉMOV. V PRÍPADE, ŽE SA JEDNÁ O SÚSTAVY S IDEÁLNYMI VÄZBAMI, IDE O VLASTNÉ POHYBOVÉ ROVNICE. PRI SÚSTAVÁCH S REÁLNYMI VÄZBAMI IDE O HLAVNÉ POHYBOVÉ ROVNICE.

PRI ~~R~~ SÚSTAVÁCH S REÁLNYMI VÄZBAMI TREBA VYJADRIŤ PASÍVNE ODPORY AKO FUNKCIE AKČNÝCH SÍL.

PRI NEPOHYBLIVEJ SÚSTAVE: $Q_i = 0$ $i = 1, 2, 3, \dots n$ → VLASTNÉ ROVNOVÁŽNE ROVNICE

3, LAGRANGEOVE ROVNICE II. DRUHU

DIFERENCIÁLNE ROVNICE II. RÁDU - BUDE TAM DRUHÁ DERIVÁCIA

VŠEOBECNÝ TVAR [PO DOSŤ DLHOM ODVODENÍ]:

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} = Q_i \qquad i = 1, 2, \dots n$$

$\dot{q}_i$ - I-TÁ ZOVŠEOBECNENÁ RÝCHLOSŤ

q_i - I-TÁ ZOVŠEOBECNENÁ SÚRADNICA

Q_i - I-TÁ ZOVŠEOBECNENÁ SILA

E_k - KINETICKÁ ENERGIA

$Q_i = Q_{ik} + Q_{ink}$

Q_{ik} - KONZERVATÍVNE

Q_{ink} - NEKONZERVATÍVNE

RIEŠENÍM: $q_i - q_i(t)$

STABILITA ROVNOVÁŽNEJ POLOHY KONZERVATÍVNEJ SÚSTAVY

V ROVNOVÁŽNEJ POLOHE:

$Q_i = 0$ $i = 1, 2, \dots n$

$Q_i = -\frac{\partial E_p}{\partial q_i}$ $E_p = f(q_1, q_2 \dots q_n)$

$\frac{\partial E_p}{\partial q_i^2} > 0$ ⇒ AK TO PLATÍ: ROVNOVÁŽNA POLOHA JE STABILNÁ

KMITANIE MECHANICKÝCH SÚSTAV

- KLASIFIKÁCIA PROBLEMATIKY KMITANIA:

Z HĽADISKA

- SÚSTAV
- PÔSOBIACICH SÍL
- CHOVANIA SA SÚSTAVY

SÚSTAVY

PODĽA STUPŇOV VOĽNOSTI POHYBU - DISKRÉTNE
- KONTINUÁLNE

PODĽA POHYBOVÝCH ROVNÍC - LINEÁRNE
- NELINEÁRNE

PODĽA PARAMETROV SÚSTAVY - S KONŠTANTNÝMI PARAMETRAMI
- S PREMENLIVÝMI PARAMETRAMI

DISKRÉTNA - SÚSTAVA SO SÚSTREDNÝMI PARAMETRAMI
- KONEČNÝ POČET STUPŇA VOĽNOSTI POHYBU

KONTINUÁ - SÚSTAVY SÚ SPOJITÉ PARAMETRAMI
- NEKONEČNÝ POČET STUPŇOV VOĽNOSTI POHYBU

PARAMETRE SÚSTAVY - HMOTNOSŤ, TUHOSŤ, TLMENIE

KLASIFIKÁCIA SÍL

1, ZOTRVAČNÉ SILY [F_D, M_D, Q_D]

2, VRÁTNE SILY [F_r, M_r]

3, TLMIACE SILY [F_t, M_t]

4, BUDIACE SILY [F_b, M_b, (Q_b)]

ZOTRVAČNÉ SILY

-ZÁVISIA NA POHYBE HMOTNÝCH OBJEKTOV V

-NEPLATÍ PRI NICH ZÁKON AKCIE A REAKCIE

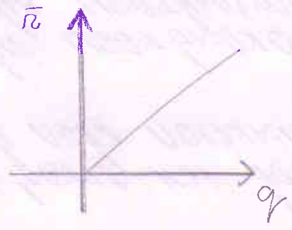
VRÁTNE SILY

-ZÁVISIA OD VÝCHYLKY SÚSTAVY A ORIENTOVANÉ SÚ VŽDY PROTI NEJ

-VRACAJÚ SÚSTAVU DO STABILNEJ POLOHY (ROVNOVÁŽNEJ)

-ZÁVISLOSŤ SILY NA VÝCHYLKE A VOLÁ

CHARAKTERISTIKA VRÁTNEJ SILY



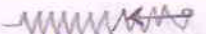
$\frac{dF_r}{dq} = k$ $\frac{1}{k} = c$

k - TUHOSŤ

- SILOVÝ ÚČINOK POTREBNÝ NA JEDNOTKOVÚ DEFORMÁCIU

c - PODDAJNOSŤ

- DEFORMÁCIA SPÔSOBENÁ JEDNOTKOVÝM



LINEÁRNE PRUŽINY

$Q_{ik} = -\frac{\partial E_p}{\partial q_i}$

KONZERVATÍVNA SÚSTAVA [LEN KONZERVATÍVNE SILY]

$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = 0$

$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

$L = E_k - E_p$

L - KINETICKÝ POTENCIÁL, LAGRANGEOVA FUNKCIA

$\frac{\partial E_p}{\partial \dot{q}_i} = 0 \Rightarrow E_p$ JE FUNKCIOU ICH POLOHY A RÝCHLOSTI

$\Rightarrow E_p = f(q_1, q_2, \ldots q_m)$

$E_k + E_p$ = MECHANICKÁ ENERGIA

$E_k - E_p$ = LAGRANGEOVA FUNKCIA

AK SÚ V SÚSTAVE AJ NEKONZERVATÍVNE SILY:

Z NEKONZERVATÍVNYCH SÍL MOŽNO VYČLENIŤ TLMIACE SILY, KTORÉ SÚ ÚMERNÉ PRVEJ MOCNINE RÝCHLOSTI

$E_b = \sum_k \frac{1}{2} b_k v_k^2$

E_D - RAYLEIGHOVA FUNKCIA

E_b - ENERGIA TLMENIA

v_k - RELATÍVNA RÝCHLOSŤ V K-TOM TLMIČI

b_k - KOEFICIENT VISKÓZNEHO TLMENIA

$Q_{ib} = -\frac{\partial E_b}{\partial \dot{q}_i}$

$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} \cdot \frac{\partial E_k}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} + \frac{\partial E_b}{\partial \dot{q}_i} = Q_{iz}$

Q_{iz} - ZOSTÁVAJÚCA ZOVŠEOBECNENÁ SILA ODPOVEDAJÚCA OSTATNÝM PRACOVNÝM SILÁM PÔSOBIACICH NA SÚSTAVU

- SÚ TO VÄČŠINOU SILY BUDIACE ALEBO TLMIACE, KTORÉ NIE SÚ ÚMERNÉ
$i = 1, 2, 3, \dots n \Rightarrow$

③ -
- ZÁVISIA OD RÝCHLOSTI POHYBUJÚCICH SA OBJEKTOV A ORIENTOVANÉ SÚ VŽDY PROTI NEJ
- ZÁVISLOSŤ TLMIACEJ SILY A RÝCHLOSTI SA VOLÁ CHARAKTERISTIKA TLMIACEHO ÚČINKU
$F_t = -d \cdot |\dot{q}|^n \operatorname{sgn} \dot{q}$ [znamienko = signum]
d - KOEFICIENT ÚMERNOSTI
AK $n = 1 \Rightarrow |F_t| = b \cdot \dot{q}$
b - KOEFICIENT LINEÁRNEHO VISKÓZNEHO TLMENIA
AK $n = 0$ - TLMENIE SUCHÝM ALEBO tzv. COULOMBOVÝM TLMENÍM
TLMIACA SILA JE PREJAVOM FYZIKÁLNEHO DEJA: TLMENIA
TLMENIE - VONKAJŠIE - OKOLÍM, KTORÉ OBKLOPUJE SÚSTAVU
- VO VÄZBÁCH - V DÔSLEDKU NEDOKONALOSTI VÄZIEB
- VNÚTORNÉ - V DÔSLEDKU NEDOKONALOSTI MATERIÁLU

④ - DODÁVAJÚ DO SÚSTAVY ENERGIU
- BUDEME PREDPOKLADAŤ, ŽE BUDÚ LEN FUNKCIOU ČASU A NIE POLOHOU SÚSTAVY (IDEALIZÁCIA), PREDPOKLADÁ ICH ZDROJ, KTORÝ MÁ NEKONEČNE VEĽKÝ VÝKON)
- FYZIKÁLNY PREJAV DEJA, KTORÝ SA VOLÁ: BUDENIE
BUDENIE - SILOVÉ - SILOVÝ ÚČINOK JE DANÝ FUNKCIOU ČASU
- KINEMATICKÉ - JE PREDPÍSANÝ FUNKCIOU ČASU NIEKTOREJ ČASTI SÚSTAVY
- ZAČIATOČNÝMI PODMIENKAMI
- DETERMINISTICKÉ - JE URČENÉ JEDNOZNAČNE FUNKCIOU ČASU
- STOCHASTICKÉ (NÁHODNÉ) - FUNKCIA ČASU JE URČENÁ LEN URČITOU PRAVDEPODOBNOSŤOU

KLASIFIKÁCIA SÍL
- KONZERVATÍVNE SILY
- NEKONZERVATÍVNE SILY
- LINEÁRNE SILY
- NELINEÁRNE SILY

KLASIFIKÁCIA KMITANIA - SPÔSOB NAMÁHANIA PRUŽNÝCH ČASTÍ SÚSTAVY
- POZDĹŽNE (OSOVÉ)
- PRIEČNE (OHYBOVÉ)
- TORZNÉ (KRÚTIACE)

DRUH A CHARAKTER PÔSOBIACICH SÍL
1, VLASTNÉ (VOĽNÉ) - KONÁ SÚSTAVA BEZ PRÍVODU ENERGIE, AK JE VYVEDENÁ Z ROVNOVÁŽNEJ POLOHY A PONECHANÁ ÚČINKU SÍL, KTORÉ VZNIKAJÚ V SAMOTNEJ SÚSTAVE
2, VYNÚTENÉ - VZNIKÁ VTEDY, AK NA SÚSTAVU PÔSOBIA BUDIACE SILY, O KTORÝCH BUDEME PREDPOKLADAŤ, ŽE SÚ LEN FUNKCIOU ČASU
3, PARAMETRICKÉ - VYVOLANÉ JE ČASOVOU ZMENOU PARAMETROV SÚSTAVY

4, SAMOBUDENÉ - VYVOLANÉ JE ZDROJOM ENERGIE NEKMITAVÉHO CHARAKTERU, PRIČOM SILY GENEROVANÉ TÝMTO ZDROJOM SÚ ZÁVISLÉ OD POHYBU SÚSTAVY A V ROVNOVÁŽNEJ POLOHE SÚ NULOVÉ!

KMITANIE LINEÁRNYCH SÚSTAV S 1° VOĽNOSTI

- NAJJEDNODUCHŠÍ DRUH KMITANIA, NA KTOROM SI VYSVETLÍME VŠETKY ZÁKLADNÉ POJMY
- MODEL

$$m_q \cdot \ddot{q} = F_b(t) - F - F_t \Rightarrow \overbrace{m_q \ddot{q} + b_q \cdot \dot{q} + k_q \cdot q = F_0(t)}^{\text{POHYBOVÁ ROVNICA}}$$

- DIFERENCIÁLNA ROVNICA 2. RÁDU

m_q, b_q, k_q - KONŠTANTY, MECHANIZMY S KONŠTANTNÝM PREVODOM
m_q, b_q, k_q - FUNKCIE ČASU, MECHANIZMY S NEKONŠTANTNÝM PREVODOM
- VNÚTORNÉ PARAMETRICKÉ KMITANIE

VLASTNÉ NETLMENÉ KMITANIE

$m_q \cdot q'' + k_q \cdot q = 0$

$t = 0;\ q = q_0;\ \dot{q} = \dot{q}_0$

PARTIKULÁRNE RIEŠENIE BUDEME HĽADAŤ: $q = c \cdot e^{\lambda t}$; $\ddot{q} = c \cdot \lambda^2 e^{\lambda t}$

$m_q \cdot c \cdot \lambda^2 e^{\lambda t} + k_q \cdot c \cdot e^{\lambda t} = 0$

$c \cdot e^{\lambda t}(m_q \lambda^2 + k_q) = 0$; $c \neq 0$; $e^{\lambda t} \neq 0$

$m_q \cdot \lambda^2 + k_q = 0 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{k_q}{m_q}$

$\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{k_q}{m_q}} = \pm i \cdot \Omega_0$

i = IMAGINÁRNA JEDNOTKA $(\sqrt{1})$

$\sqrt{\frac{k_q}{m_q}} = \Omega_0 - \omega_0$ - VLASTNÁ UHLOVÁ FREKVENCIA
- UHLOVÁ FREKVENCIA VLASTNÉHO NETLMENÉHO KMITANIA

$q = c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ (1)

$q = C_1 e^{i\Omega_0 t} + C_2 e^{-i\Omega_0 t}$

$e^{\pm i\Omega_0 t} = \cos \Omega_0 t \pm i \sin \Omega_0 t$

$q = A \cos \Omega_0 t + B \sin \Omega_0 t$ (2)

$A = C_1 + C_2$

$B = i\ (C_1 - C_2) \Rightarrow$ ZLOŽKOVÝ TVAR

C_1, C_2 - INTEGRAČNÉ KONŠTANTY, KTORÉ URČUJEME ZO ZAČIATOČNÝCH PODMIENOK

(1) - EXPONENCIÁLNY TVAR RIEŠENIA

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \pm \sin\alpha \cdot \sin\beta$

$A = q_a \cos \gamma$

$B = q_a \sin \gamma$

URČENIE C_1 A C_2

Z (1) $\Rightarrow$ $C_1 + C_2 = q_0$ (a)

$\dot{q} = C_1 i \cdot \Omega_0 e^{i\Omega_0 t} - C_2 i\, \Omega_0 e^{-i\Omega_0 t}$

$\dot{q} = C_1 i\, \Omega_0 - C_2 i\, \Omega_0$ (b)

$q_i^{\cdot} = c_1 i \Omega_0 - c_2 i \Omega_0 \ (b)$
$c_{1,2} = \frac{1}{2} (q_0 \pm i \frac{q_0^{\cdot}}{\Omega_0})$
$A = q_0$
$q_a = \sqrt{q_0^2 + (\frac{q_0^{\cdot}}{\Omega_0})^2}$
$B = \frac{q_0^{\cdot}}{\Omega_0}$
$\gamma = \operatorname{arctg} \frac{q_0^{\cdot}}{\Omega_0 q_0}$

$m_q \cdot \ddot{q} + k_q \cdot q = 0 \quad / m_q$
$\ddot{q} + \frac{k_q}{m_q} \cdot q = 0$
$\ddot{q} + \Omega_0^2 \cdot q = 0$

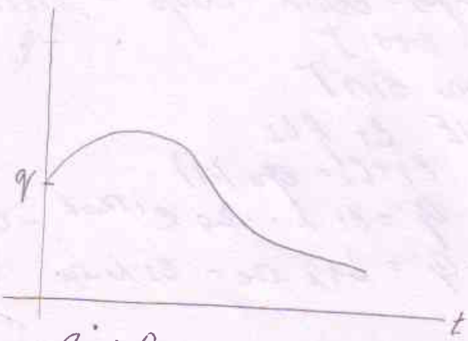
PERIÓDA $T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0}$ – ČAS, PO KTOROM SA DEJ OPAKUJE
FREKVENCIA $f_0 = \frac{\Omega_0}{2\pi}$

VLASTNÉ TLMENÉ KMITANIE

$m_q \cdot \ddot{q} + b_q \cdot \dot{q} + k_q \cdot q = 0$
PARTIKULÁRNE RIEŠENIE: $q = c \cdot e^{\lambda t}$
$\dot{q} = c \cdot \lambda \cdot e^{\lambda t}$
$\ddot{q} = c \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda t}$
PO DOSADENÍ MUSÍ BYŤ ROVNÝ NULE TENTO VÝRAZ:
$m_q \cdot \lambda^2 + b_q \cdot \lambda + k_q = 0$
PREVEDENÍM DO ŠTANDARDNÉHO TVARU DOSTANEME:
$\ddot{q} + \frac{b_q}{m_q} (\dot{q}) + \frac{k_q}{m_q} \cdot q = 0$
$\frac{b_q}{m_q} = 2\sigma \Rightarrow \frac{b_q}{m_q} = \Omega_0^2$

σ – KONŠTANTA ÚTLMU
POHYBOVÁ ROVNICA V ŠTANDARDNOM TVARE:
$\ddot{q} + 2\sigma \dot{q} + \Omega_0^2 \cdot q = 0$
A JEJ CHARAKTERISTICKÁ ROVNICA BUDE:
$\lambda^2 + 2\sigma\lambda + k_q = 0$
$\lambda_{12} = -\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - \Omega_0^2}$

1) $\sigma = \Omega_0$
$q = e^{-\sigma t} (c_1 t + c_2)$
$\dot{q} = -\sigma e^{-\sigma t} (c_1 t + c_2) + e^{-\sigma t} \cdot c_1$
c_1 A c_2 → ZO ZAČIATOČNÝCH PODMIENOK:
$q(t=0) = q_0$
$\dot{q}(t=0) = \dot{q}_0$
$\frac{b_q}{m_q} = 2\sigma$ → VTEDY $\frac{b_k}{m_q} = 2\Omega_0$
$b_k = 2\Omega_0 m_q$
$b_k = 2\sqrt{m_q k_q}$



$\dot{q}_i > 0$

- HOVORÍME O KRITICKOM TLMENÍ

b_k - SÚČINITEĽ KRITICKÉHO VISKÓZNEHO TLMENIA

$b_p = \frac{b_{qr}}{b_k}$

b_p - POMERNÝ ÚTLM
- URČUJE MIERU VEĽKOSTI TLMENIA V SÚSTAVE

$b_p = 1$

2, $\delta > \Omega_0$

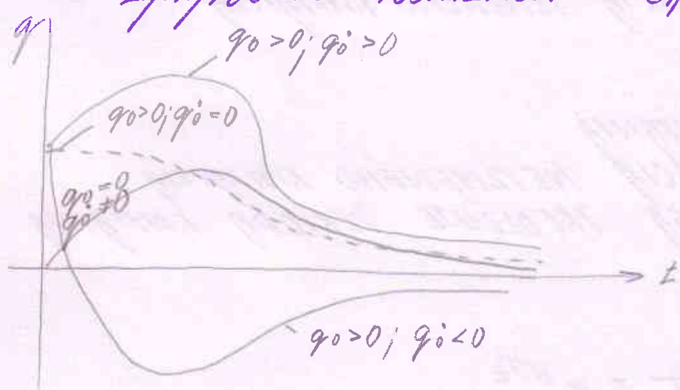
$\nu_t = \sqrt{\delta^2 - \Omega_0^2} = \Omega_0 \sqrt{\left(\frac{\delta}{\Omega_0}\right)^2 - 1} = \Omega_0 \sqrt{b_p^2 - 1}$

$b_p = \frac{2\delta m_q}{2\Omega_0 m_q} = \frac{\delta}{\Omega_0}$

$\mathcal{H}_{1,2} = -\delta \pm \nu_t$

$q = c_1 e^{\mathcal{H}_1 t} + c_2 e^{\mathcal{H}_2 t} = e^{-\delta t}(c_1 e^{\nu_t t} + c_2 e^{-\nu_t t})$

- ZO ZAČIATOČNÝCH PODMIENOK $\Rightarrow$ $c_{1,2} = \frac{1}{2}\left(q_0 \pm \frac{\dot{q}_0 + \delta q_0}{\nu_t}\right)$



- HOVORÍME O NADKRITICKOM TLMENÍ

$b_p > 1$

3, $\delta < \Omega_0 \Rightarrow b_p < 1$

- HOVORÍME O PODKRITICKOM TLMENÍ

$\mathcal{H}_{1,2} = -\delta \pm \Omega_0 \sqrt{\left(\frac{\delta}{\Omega_0}\right)^2 - 1} = -\delta \pm \Omega_0 \sqrt{b_p^2 - 1} = -\delta \pm i \underbrace{\Omega_0 \sqrt{1 - b_p^2}}_{\Omega_t} = -\delta \pm i\,\Omega_t$

$q = c_1 e^{(-\delta + i\Omega_t)t} + c_2 e^{(-\delta - i\Omega_t)t}$

$q = e^{-\delta t}(c_1 e^{i\Omega_t t} + c_2 e^{-i\Omega_t \cdot t})$

$e^{\pm i\Omega_t \cdot t} = \cos \Omega_t \cdot t \pm i \sin \Omega_t \cdot t$

$q = e^{-\delta t}(A \cos \Omega_t \cdot t + B \sin \Omega_t \cdot t)$, PRIČOM $A = c_1 + c_2$, $B = i(c_1 - c_2)$

$\left.\begin{array}{l} A = q_a \cos \mathcal{T} \\ B = q_a \cdot \sin \mathcal{T} \end{array}\right\}$ $q_a = \sqrt{A^2 + B^2}$; $q\mathcal{T} = \frac{B}{A}$

$q = e^{-\delta t} \cdot q_a (\cos \mathcal{T} \cos \Omega_t \cdot t + \sin \mathcal{T} \sin \Omega_t \cdot t)$

$q = e^{-\delta t} q_a \cdot \cos(\Omega_t \cdot t - \mathcal{T})$ - AMPLITÚDOVÝ TVAR RIEŠENIA

$\dot{q} = q_a \cdot \delta e^{-\delta t} \cdot \cos(\Omega_t t - \mathcal{T}) - q_a \cdot e^{-\delta t} \cdot \Omega_t \cdot \sin(\Omega_t \cdot t - \mathcal{T})$

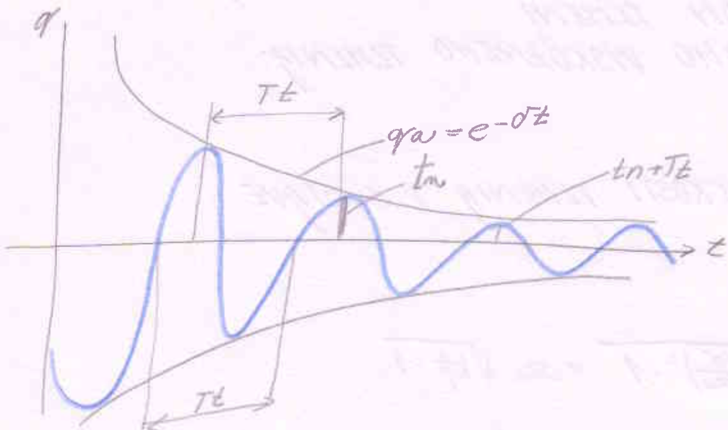
$\dot{q} = -q_a e^{-\delta t}[\delta \cos(\Omega_t \cdot t - \mathcal{T}) + \Omega_t \sin(\Omega_t \cdot t - \mathcal{T})]$

$q(t = 0) = q_0$

$\dot{q}(t = 0) = \dot{q}_0$

$q_a = \sqrt{q_0^2 + \frac{(\dot{q}_0 + \delta q_0)^2}{\Omega_t}}$

$tg\, \mathcal{T} = \frac{\dot{q}_0 + \delta q_0}{q_0 \Omega_t}$



T_t - PERIÓDA TLMENÉHO KMITANIA

$T_t = \frac{2\pi}{\Omega_t} = \frac{2\pi}{\Omega_0 \sqrt{1-b_p^2}}$

Ω_t - VLASTNÁ UHLOVÁ FREKVENCIA TLMENÉHO KMITANIA

$T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0}$

T_0 - PERIÓDA NETLMENÉHO KMITANIA

Ω_0 - VLASTNÁ UHLOVÁ FREKVENCIA NETLMENÉHO KMITANIA

$T_t > T_0$ - V DÔSLEDKU KMITANIA SA PREDLŽUJE PERIÓDA KMITANIA

OZNAČME:

$q_a \cdot e^{-\sigma t} = A(t)$

$\frac{A_n}{A_{n+1}} = \frac{A(t_n)}{A(t_n+T_t)} = \frac{q_a e^{-\sigma t_n}}{q_a e^{-\sigma(t_n+T_t)}} = e^{\sigma T_t}$

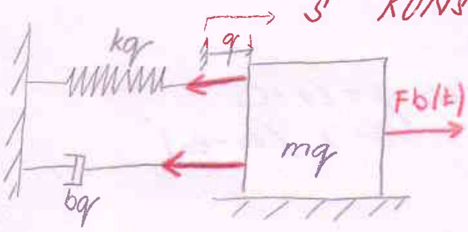
→ JE KONŠTANTNÝ

→ NEZÁVISÍ OD ČASU

→ ZÁKLADNÁ VLASTNOSŤ VLASTNÉHO TLMENÉHO KMITANIA

$\ln \frac{A_n}{A_{n+1}} = \sigma T_t = \vartheta$ - LOGARITMICKÝ DEKREMENT (dekadent)

VYNÚTENÉ KMITANIE BUDENÉ HARMONICKOU SILOU S KONŠTANTNOU AMPLITÚDOU



$F_b(t) = F_0 \cos \omega t$

F_0 - AMPLITÚDA BUDIACEJ SILY

ω - UHLOVÁ FREKVENCIA

q - VEĽKOSŤ VÝCHYLKY

POHYBOVÁ ROVNICA:

$m_q \cdot \ddot{q} + b_q \dot{q} + k_q \cdot q = F_0 \cos \omega t$

$\ddot{q} + \frac{b_q}{m_q} \dot{q} + \frac{k_q}{m_q} q = \frac{F_0 \cos \omega t}{m_q}$

$\ddot{q} + 2\sigma \dot{q} + \Omega_0^2 q = \frac{F_0}{m_q} \cos \omega t \quad (1)$

$q = q_n + q_p$

q_n - VLASTNÉ TLMENÉ KMITANIE

$q_p \Rightarrow A \cos \omega t + B \sin \omega t$

$\frac{F_0}{m_q} \cos\omega t = Re \Rightarrow$ REÁLNA ČASŤ KOMPLEXNÉHO ČÍSLA

$\Rightarrow Re\left(\frac{F_0}{m_q} e^{i\omega t}\right)$

$e^{i\omega t} = \underset{\text{REÁLNA}}{\cos\omega t} - i\, \underset{\text{IMAGINÁRNA}}{\sin\omega t}$ EULEROV VZŤAH

- PREDPOKLAD, ŽE q = KOMPLEXNÁ VÝCHYLKA $\Rightarrow q^{\cdot\cdot *}$

(2) $\ddot{q}^* + 2\delta \dot{q}^* + \Omega_0^2 q^* = \frac{F_0}{m_q} e^{i\omega t}$ KOMPLEXNÁ

(3) $Re\left(\ddot{q}^* + 2\delta\dot{q}^* + \Omega_0^2 q^* = \frac{F_0}{m_q} e^{i\omega t}\right) \Rightarrow$ DOSADÍME DO (1)

$\Rightarrow 3$ V OBLASTI KOMPLEX. $\Rightarrow a^*$

$\Rightarrow$ (1) REÁLNA ČASŤ q^*

$\ddot{q}^* + 2\delta\dot{q}^* + \Omega_0^2 q^* = \frac{F_0}{m_q} e^{i\omega t}$

PREDPOKLAD

(4) $\begin{cases} q_p^* = \lambda^* \cdot e^{i\omega t} \\ \dot{q}_p^* = \lambda^* i e^{i\omega t} \cdot \omega \end{cases}$

λ^* = KOMPLEXNÁ AMPLITÚDA

$\ddot{q}_p^* = -\lambda^* \omega^2 e^{i\omega t}$

$i^2 = -1$

$4 \Rightarrow 2$ PO DOSADENÍ DO (2) A $e^{i\omega t}$ DOSTANEME

$\left[(\Omega_0^2 - \omega^2) + i\, 2\delta\omega\right] \lambda^* = \frac{F_0}{m_q}$

$\Omega_0^2 \left[\left(1 - \left(\frac{\omega}{\Omega_0}\right)^2\right) + i\, 2 \frac{\delta}{\Omega_0} \frac{\omega}{\Omega_0}\right] \lambda^* = \frac{F_0}{m_q} \quad / \cdot \frac{1}{\Omega_0^2}$

$\left[1 - \omega_p^2 + i\, 2 b_p \omega_p\right] \lambda^* = \frac{F_0}{b_q}$

$\lambda^* = \frac{F_0}{k_q} \frac{1}{1 - \omega_p^2 + i\, 2 b_p \omega_p} = \frac{F_0}{k_q} \frac{1 e^{-i\psi}}{\sqrt{(1-\omega_p^2)^2 + (2 b_p \omega_p)^2}}$

$tg\,\psi = \frac{2 b_p \omega_p}{1 - \omega_p^2} \qquad \psi = arctg \frac{2 b_p \omega_p}{1 - \omega_p^2}$

$q_p^2 = \frac{F_0}{k_q} \frac{e^{i\omega(\omega t - \psi)}}{\sqrt{(1-\omega_p^2)^2 + (2 b_p \omega_p)^2}}$

$\frac{\delta}{\Omega_0} = b_p \; ; \; \Omega_0^2 = \frac{k_q}{m_q}$

$2\delta = \frac{b_q}{m_q} \; ; \; \frac{\omega}{\Omega_0} = \omega_p$

$|c| = \sqrt{a^2 + b^2}$

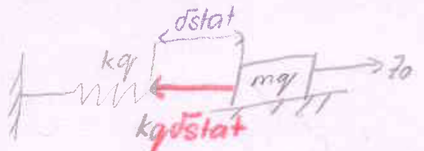
$tg\,\psi = b/a$

$c = |c| e^{i\psi}$

$Re\, c \quad a = |c| \cos\psi$

$Im\, c\; b = |c| \sin\psi$

$q_p = Re(q_p^*) = \frac{F_0}{b_q} \frac{1}{\sqrt{(1-\omega_p^2)^2 + (2b_p\omega_p)^2}} \cos(\omega t - \psi)$



$F_0 - k_q \delta_{stat} = 0$

$\delta_{stat} = \frac{F_0}{k_q}$

$q_p = q_a\,(\cos(\omega t - \psi))$

$q_a = \delta_{stat} \cdot z$

z - ZVÄČŠUJÚCI FAKTOR

$$z = \frac{1}{\sqrt{(1-\omega_p^2)^2+(2b_p\omega_p)^2}}$$

$$\varphi = \mathrm{arctg}\,\frac{2b_p\omega_p}{1-\omega_p}$$

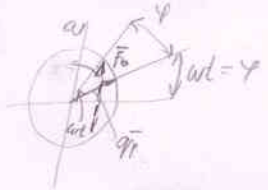
$$q_r = q_h + q_p$$

q_h - ČASOVÝ INTERVAL V KTOROM SA PREJAVUJE PRECHODOVÝ STAV PO TOMTO ČASE ; USTÁLENÝ STAV KMITANIA. V PRÍPADE, ŽE V SÚSTAVE JE VEĽMI MALÉ TLMENIE $b_p \doteq 0$

$$z = \frac{1}{(1-\omega_p^2)}$$

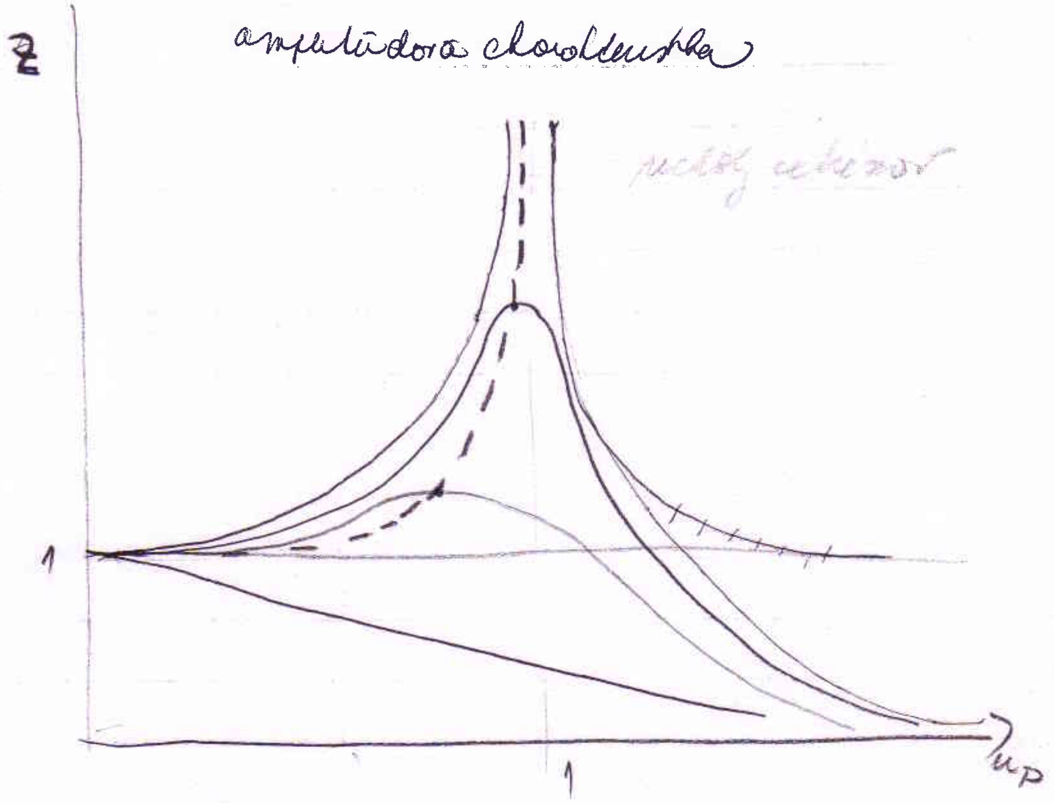
$$q_p = \frac{F_0}{k_q}\cdot\frac{1}{(1-\omega_p^2)}\cos(\omega t\cdot\varphi)$$

$$F_p(t) = F_0\cdot\cos\omega t$$

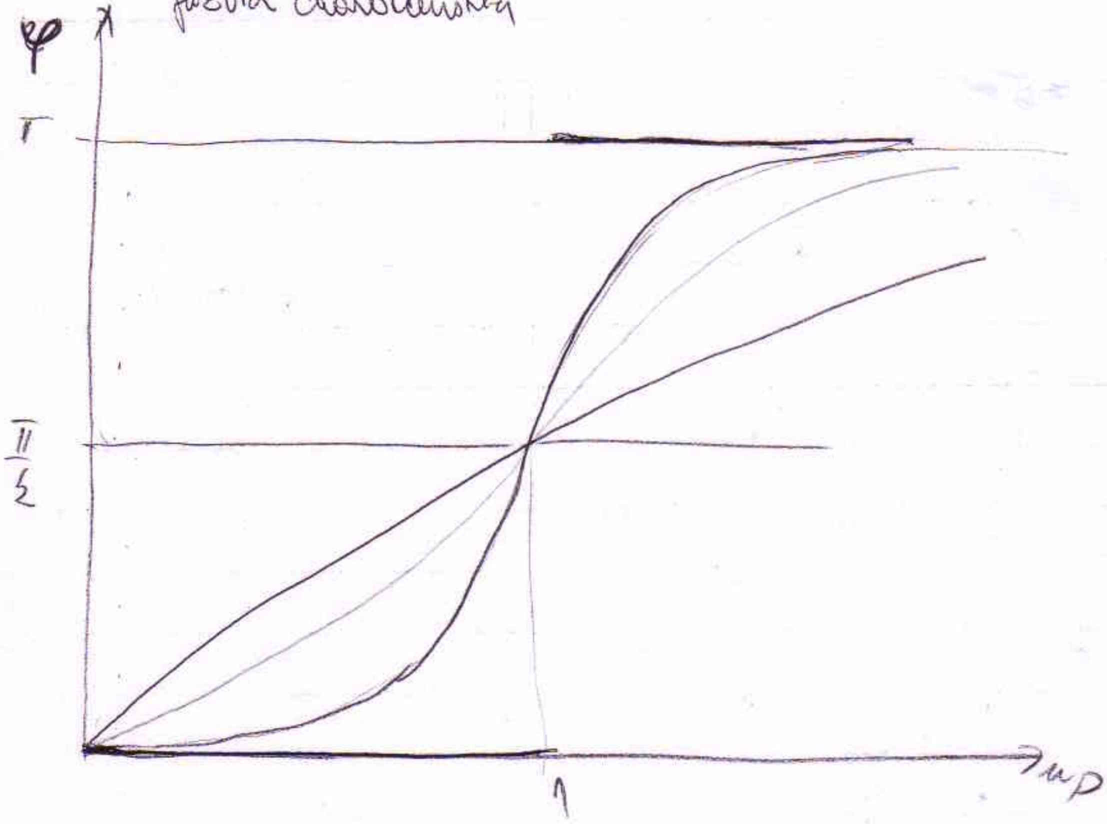


ZÁVISLOSŤ ZVÄČŠUJÚCEHO FAKTORA NA POMERNEJ UHLOVEJ FREKVENCII $z = f(\omega_p)$ PRI RÔZNOM b_p SA NAZÝVA AMPLITÚDOVÁ CHARAKTERISTIKA.
ZÁVISLOSŤ FÁZOVÉHO POSUNUTIA NA POMERNEJ UHLOVEJ FREKVENCII $\varphi = g(\omega_p)$ ⇒ FÁZOVÁ CHARAKTERISTIKA

amplitúdová charakteristika



fázová charakteristika



- bp= 0
- bp= 0,1
- bp= 0,5
- bp= 2

$b_p = 0 \quad z = \frac{1}{|1-\omega_p^2|} \qquad tg\,\varphi = 0 \qquad q_p = \frac{F_0}{k_q} \cdot \frac{1}{(1-\omega_p^2)} \cos \omega t$

$\omega_p < 1 \quad |1-\omega_p^2|$

$\omega_p = 1 \quad z \Rightarrow \infty$ REZONANCIA

$\omega_p > 1 \quad z \to 0$

$\omega_p = 1 \quad \frac{\omega}{\Omega_0} \Rightarrow \omega = \Omega_0$

$\ddot{q} + \Omega_0^2 \cdot q = \frac{F_0}{m_q} \cos \omega t$

$\ddot{q}^* + \Omega_0^2 q^* = \frac{F_0}{m_q} e^{i\omega t}$

$q_p^* = \lambda^* t e^{i\omega t}$

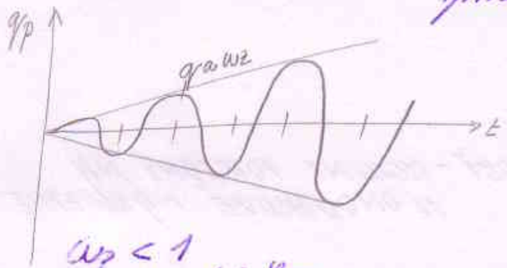
$\lambda^* = \frac{F_0}{m_q} \frac{1}{2i\omega} = \frac{F_0}{m_q} \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{2\omega}$

$i = \cos \pi/2 + i \sin \pi/2 = e^{i\pi/2}$

$q_p^* = \frac{F_0}{m_q} \cdot \frac{1}{2\omega} \cdot t e^{i(\omega t - \pi/2)}$

$q_p = Re\,(q_p^*) = \frac{F_0}{2 m_q \omega} t \cos(\omega t - \pi/2)$

AMPLITÚDA KMITANIA V REZONANCII



φ - fázový pomer

$\omega_p < 1$

$\sin\varphi = \frac{tg\,\varphi}{\sqrt{1+tg^2\varphi}} \qquad \sin\varphi = \frac{2b_p\omega_p}{\sqrt{(1-\omega_p^2)^2+(2b_p\omega_p)^2}}$

$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\varphi}} \qquad \cos\varphi = \frac{1-\omega_p^2}{\sqrt{(1-\omega_p^2)^2+(2b_p\omega_p)^2}}$

$tg\,\varphi = \frac{2b_p\omega_p}{1-\omega_p^2}$

$b_p = 0$ ak $\omega_p < 1$ $\omega_p < 1 \quad b_p = 0$

$\sin\varphi = 0$ $\omega_p > 1$ $\sin\varphi = 0$

$\cos\varphi = \frac{1-\omega_p^2}{(1-\omega_p^2)}$ $\cos\varphi = -1$

V REZONANCII $\pi/2$

$\varphi = \pi/2$ V REZONOVANÍ BEZ OHĽADU NA FÁZOVÝ UHOL JE STÁLE TEN ISTÝ $\pi/2$

$q_a = \frac{F_0}{k_q} z$

$z = f(\omega_p)$

$\frac{dz}{d\omega_p}\Big|_{\omega_{prez}} = 0$

$\omega_{prez} = \sqrt{1-2b_p^2}$

$z_{max} = z(\omega_{prez}) = \frac{1}{2b_p\sqrt{1-2b_p^2}}$

$1 - 2b_p^2 > 0$

$b_p < \sqrt{0{,}5}$

- PRI TAKOM TLMENÍ BUDÚ MAŤ FUNKCIE SVOJE MAXIMA b_p

$b_p > 0{,}5$ NEMÁ MAXIMUM

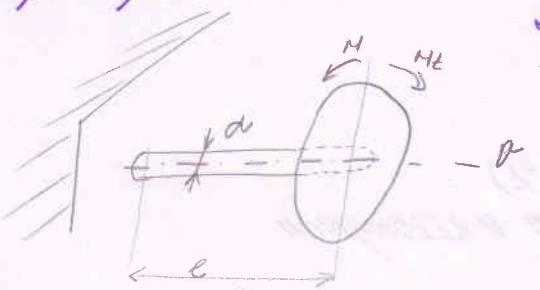
- PRE MALÉ TLMENIA $b_p = 0{,}1$ VEĽKÝ EXTERNÝ V BLÍZKOM OKOLÍ $\omega_p = 1$ VEĽKÉ HODNOTY OBLASŤ $\omega_p = 1$ - OBLASŤ REZONANCIE

PRÍKLAD

NA VOTKNUTEJ TYČI PRIEMERU d MODULU G JE UPEVNENÝ KOTÚČ HMOTNOSTI m, O POLOMERI r, DĹŽKA TYČE JE l. NA KOTÚČ PÔSOBÍ MOMENT, KTORÝ JE HARMONICKOU FUNKCIOU ČASU S KONŠTANTNOU AMPLITÚDOU M_0 A UHLOVOU FREKVENCIOU ω. URČTE MAXIMÁLNE NAPÄTIE V TYČI PRI USTÁLENOM STAVE KMITANIA. HMOTNOSŤ TYČE VOČI HMOTNOSTI KOTÚČA ZANEDBAJTE, TYČ PLNÍ LEN FUNKCIU PRUŽNÉHO ČLENA.

D: $d, G, M = M_0 \cdot \cos \omega t$, l, ω, M_0, m, R

H: τ_{max}



$\tau_{max} = \frac{M_k}{W_k}$

$W_p = \frac{J_p}{d/2} = \frac{\pi d^3}{16}$

$M_k = \max = k_t \cdot \varphi_{max}$ (TORZNÁ TUHOSŤ, UHOL ZATOČENIA)

TORZNÁ TUHOSŤ - MOMENT POTREBNÝ NA JEDNOUHLOVÉ NATOČENIE

$\varphi = \frac{M_k l}{G J_p}$

$1 = \frac{k_t l}{G J_p}$

$k_t = \frac{G J_p}{l}$

$M_t = k_t \cdot \varphi$

POHYBOVÁ ROVNICA KOTÚČA $\rightarrow I_k \varphi'' = M - M_t$

$I_k \varphi'' + k_t \cdot \varphi = M_0 \cos \omega t$

$\varphi'' + \frac{k_t}{I_k} \varphi = \frac{M_0}{I_k} \cos \omega t$

$I_k = \frac{1}{2} m r^2$

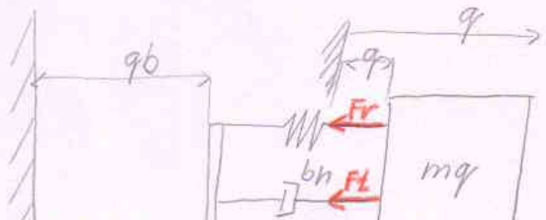
$\varphi_p = \varphi_0 \cdot \cos \omega t$

$\varphi_p'' = -\omega^2 \varphi_0 \cos \omega t$

$\varphi_0 = \frac{\Omega_0^2 - M_0/I_k}{\omega^2}$

$\varphi_{p\,max} = \varphi_0 \qquad \cos \omega t = 1$

$\tau_{max} = \frac{G d}{32 l^2 \omega^2 m r^2} (\pi G d^4 - 32 M_0 l)$



q - SÚRADNICA NEROVNÁ OD STAT. ROVNOVÁŽNEJ POLOHY

$q_b \neq f(t)$

$q > q_b$

$F_r = k_q (q - q_b)$

$F_t = b_q (\dot{q} - \dot{q}_b)$

$m_q q'' = -F_r - F_t$

$m_q q'' = -k(q - q_b) - b_q(\dot{q} - \dot{q}_b) \quad q(t)$

$m_q q'' + b_q \dot{q} + k_q q = k_q q_b + b_q \dot{q}_b$

$q_b(t)$ KANONICKÁ FUNKCIA ČASU

$q_b = q_0 \cdot \cos \omega t$ (UPRAVUJEM LEN PRAVÚ STRANU)

$k_q \cdot q_b + b_q \cdot \dot{q}_b = k_q\, q_0 \cos\omega t = -b_q\, q_0 \sin t - F_0 \cos\beta \cos\omega t - \sin\beta \cdot \cos\omega t) = F_0 \cos(\omega t + \beta)$

$F_0 = \sqrt{(k_q q_0)^2 + (b_q q_0 \omega)^2} = q_0 k_q \sqrt{1 + \left(\frac{b_q \omega}{k_q}\right)^2} = q_0 k_q \sqrt{1 + (2 b_p \omega_p)^2}$

$tg\,\beta = b_q \omega / k_q = 2 b_p \omega_p$

$2 b_p \omega_p = 2 b_q / b_{krit} \quad \omega/\Omega_0 = 2 \frac{b_q \omega}{\sqrt{m_q k_q} \sqrt{k_q/m_q}} = \frac{b_q \omega}{k_q}$

$m_q \ddot{q} + b_q \dot{q} + k_q q = F_0 \cos(\omega t + \beta)$

V USTÁLENOM STAVE BUDE CHARAKTERIZOVAŤ POHYB PARTIKULÁRNE RIEŠENIE

$q_p = \frac{F_0}{k_q} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-\omega_p^2)^2 - (2 b_p \omega_p)^2}} \cos(\omega t - \psi)$

S KONŠT. AMPLIT. BUDIACEJ SILY

$q_p = q_0 \frac{\sqrt{1 + (2 b_p \omega_p)^2}}{\sqrt{(1+\omega_p^2)^2 + (2 b_p \omega_p)}} \cos(\omega t + \beta - \psi)$

$\Psi = \psi - \beta$

$tg\,\Psi = tg(\psi - \beta) = \frac{\sin(\psi-\beta)}{\cos(\psi-\beta)} = \frac{\sin\psi \cos\beta - \cos\psi \sin\beta}{\cos\psi \cos\beta + \sin\psi \sin\beta} \cdot \frac{1/\cos\psi \cos\beta}{1/\cos\psi \cos\beta} = \frac{tg\,\psi - tg\,\beta}{1 + tg\,\psi\, tg\,\beta} =$

$= \frac{2 b_p \omega_p^3}{1 - \omega_p^2 + (2 b_p \omega_p^2)^2}$

$tg\,\psi = \frac{2 b_p \omega_p}{1 - \omega_p^2}$

$q_p = q_0 \cdot \bigcirc \cos(\omega t - \Psi)$

Ψ FÁZOVÝ POSUV, KT. URČUJE POSUV KMITU VOČI TUHERU ČASTI SÚSTAVY

$z_k = \sqrt{1 + (2 b_p \omega_p^2)^2} / (1 - \omega_p^2)^2 + (2 b_p \omega_p)^2$

– ZVÄČŠUJÚCI FAKTOR PRI KIN. BUDENÍ

$z_k = \frac{q_{ak}}{q_0}$

– KOLESO KEĎ SA V DÔSLEDKU KIN. BUDENIA, ZVÝŠI AMPLITÚDU KMITOV OPROTI AMPLITÚDE RÝCHLY KIN. BUDENIA

$z_k = z_k(\omega_p)$ → AMPLITÚDOVÁ CHARAKTERISTIKA

$\Psi = \Psi(\omega_p)$ → FÁZOVÁ CHARAKTERISTIKA

$* \longrightarrow$

Obr.

BUDENIE ODSTREDIVOU SILOU

BUDIACA SILA V SMERE POHYBU

$F_p(t) = m_1 e \cdot \omega^2 \cos\omega t = F_0 \cos\omega t$

TAM AKO PRI KONŠT. AMPLITÚDE BUDIACEJ SILY

PRI USTÁLENOM STAVE KMITANIA

$$q_p = \frac{m_1 e \omega^2}{k_q} z \cdot \cos(\omega t - \varphi) = \frac{m_1 e}{m_q} \frac{\omega_p^2}{\sqrt{(1-\omega_p^2)^2 + (2b_p \omega_p)^2}} \cos(\omega t - \varphi)$$

$$\Omega_0^2 = \frac{k_q}{m_q} \Rightarrow k_q = m_q \cdot \Omega_0^2$$

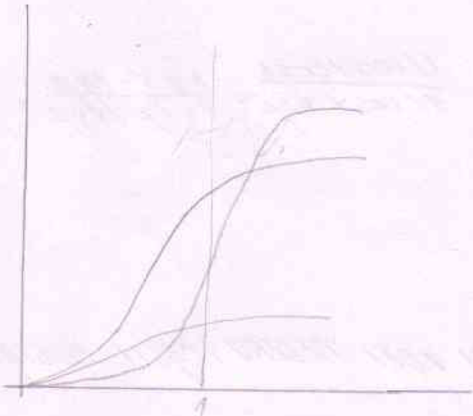
$$\frac{\omega}{\Omega_0} = \omega_p$$ - NALADENIE

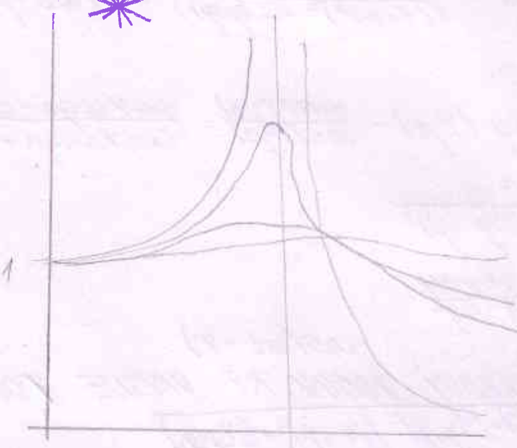
$$z_0 = \frac{\omega_p^2}{\sqrt{(1-\omega_p^2)^2 + (2b\omega_p)^2}}$$

- ZVÄČŠUJÚCI FAKTOR PRI BUDENÍ ODSTREDIVOU SILOU

$$q_p = \frac{m_1 e}{m_q} z_0 \cdot \cos(\omega t - \varphi)$$

$z_0 = z_0(\omega_p) \Rightarrow$ AMPLITÚDOVÁ CHARAKTERISTIKA PRI BUDENÍ ODSTREDIVOU SILOU





$\omega_p >> 1$

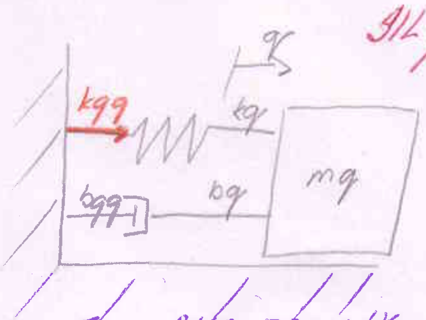
$\omega >> \Omega_0$

$\gamma_0 \equiv 1$

$q_{a0} = \frac{m_1 e}{\omega_p}$

! TVAR AKO S KONŠTANTNÝM BUDENÍM

SILA PRENÁŠANÁ DO ZÁKLADU



F_R - SILA PRENÁŠANÁ DO ZÁKLADU

$F_R = k_q q + b_q \dot{q}$

$q_{(P)} = q_a \cos(\omega t - \varphi)$

$\dot{q} = -q_a \omega \sin(\omega t - \varphi)$

$F_R = q_a[k_q \cos(\omega t - \varphi) - b_q \omega \sin(\omega t - \varphi)]$

$q_a \cdot k_q = F_{R0} \cdot \cos \varphi_R$

$q_a b\omega = F_{R0} \cdot \sin \varphi_R$

$F_R = F_{R0} \cos(\omega t - \varphi + \varphi_R)$

$F_R = q_a \cdot k_q \sqrt{1 + (2b_q \omega_p)^2}$

$\mathrm{tg}\, \varphi_R = 2 b_p \omega_p$

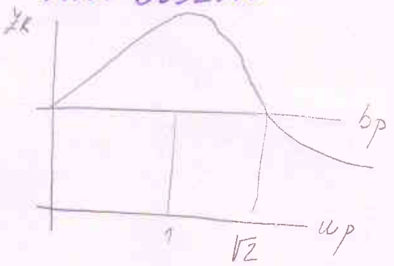
$$F_{R0} = \frac{F_0}{k_q} \cdot k_q \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-\omega_p^2)^2 + (2b_p\omega_p)^2}} \cdot \sqrt{1+(2b_p\omega_p)^2} = F_0 \sqrt{\frac{1+(2b_p\omega_p)^2}{(1-\omega_p^2)^2+(2b_p\omega_p)^2}}$$

$$\frac{F_{R0}}{F_0} = z_c = z_K$$ prenos sily

z_R - KOĽKOKRÁT SA ZVÝŠI AMPLITÚDA SILY PRENÁŠANEJ DO ZÁKLADU VOČI AMPLITÚDE BUDIACEJ SILY

$z_R = z_R(\omega_p)$

AMPLITÚDOVÁ CHARAKTERISTIKA PRENOSU SILY TAK ISTO, AKO PRI KIN. BUDENÍ



$\omega_p < \sqrt{2}$ VTEDY SILA PRENÁŠANÁ DO ZÁKLADU BOLA AKO SILA

PRACUJEM V OBLASTI NAD HODNOTU $\sqrt{2}$

PONDELOK } 50 ĽUDÍ
STREDA