2. zadanie

DYNAMIKA HMOTNÉHO BODU

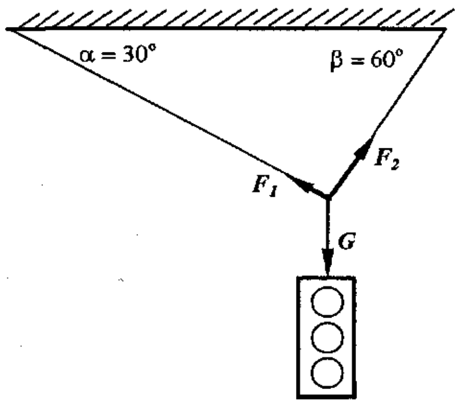
Za vyriešenie každého príkladu možno získať **najviac 10 bodov. Riešte najskôr všeobecne, až potom číselne.**

Tiažové zrýchlenie $g = 10$ m.s^{-2}

1. Pilot v stíhačke vykonáva "looping", t.j. opisuje vo vertikálnej rovine kružnicu s polomerom $r = 2{,}7$ km konštantnou rýchlosťou $v = 225$ m.s^{-1}. Vypočítajte, akou silou pôsobí pilot na sedadlo v najnižšom a najvyššom bode dráhy, ak jeho hmotnosť je $m = 70$ kg. Túto silu vyjadrite aj vo vzťahu k tiaži pilota, t.j. určte pomer tejto sily a tiaže pilota !

2. Rušeň ťahá vlak s hmotnosťou $m = 1\,000$ ton konštantnou ťažnou silou $F = 15.10^4$ N. Na rovnom úseku trate bez stúpania s dĺžkou $s = 0{,}5$ km vzrástla rýchlosť vlaku z hodnoty $v_1 = 32{,}4$ km/h na hodnotu $v_2 = 54$ km/h. Vypočítajte, aká celková sila F_c pôsobila v smere proti pohybu vlaku . Čo je príčinou vzniku tejto sily ?

3. Dopravný semafor je zavesený na dvoch tenkých lanách so zanedbateľnou hmotnosťou a rôznymi dĺžkami tak, že prvé lano zviera s horizontálnou rovinou uhol $\alpha = 30^0$ a druhé lano zviera s horizontálnou rovinou uhol $\beta = 60^0$. Hmotnosť semaforu je $m = 12{,}5$ kg. Vypočítajte, akými silami sú napínané závesné laná .Úlohu riešte najskôr všeobecne pre všeobecne zvolené uhly α, β !



4. Štvormiestne športové auto má hmotnosť $m_1 = 1\,380$ kg, hmotnosť vodiča je $m_2 = 70$ kg. Ťažná sila motora je podľa údajov výrobcu $F = 7\,000$ N.
   a) Vypočítajte, s akým zrýchlením sa môže auto pohybovať !
   b) Akú veľkú dráhu vykoná auto za prvých $t = 10$ s, ak bolo na začiatku v pokoji ?
   c) O koľko sa zmení jeho zrýchlenie, keď auto bude obsadené 4 osobami takej istej hmotnosti, ako má vodič ? (Trenie neuvažujeme.)

5. Náboj s hmotnosťou m_1 = 0,005 kg bol vstrelený vodorovným smerom do kocky z mäkkého materiálu s hmotnosťou m_2 = 3 kg a uviazol v nej. V dôsledku nárazu sa kocka posunula po vodorovnej podložke o dráhu s = 25 cm. Ako dlho sa kocka pohybovala a aká bola rýchlosť náboja tesne pred jeho vniknutím do materiálu kocky ? Koeficient kinetického trenia kocky o podložku je μ_k = 0,2.

6. V delovej hlavni dĺžky l = 2m sa počas výstrelu pohybuje delostrelecký náboj hmotnosti m = 2 kg rovnomerne zrýchleným pohybom za čas t = 0,1 s. Hmotnosť dela je M = 100 kg. Akou rýchlosťou sa bude delo pohybovať bezprostredne po výstrele v dôsledku spätného nárazu?

7. Na akej vodorovnej dráhe dosiahne automobil s hmotnosťou 800 kg z pokoja rýchlosť 54 km.h^{-1}, ak motor pôsobí silou 2 000 N ? Trenie a odpor prostreddia zanedbajte.
a) 60 m b) 45 m c) 30 m d) 50 m

8. Akú rýchlosť mal automobil s hmotnosťou 500 kg pred brzdením, ak za 5 s znížil rýchlosť na 36 km.h^{-1} konštantnou bzrdiacou silou 1 000 N ? Trenie a odpor prostredia zanedbajte.
a) 30 m.s^{-1} b) 15 m.s^{-1} c) 20 m.s^{-1} d) 25 m.s^{-1}

9. Aké zaťaženie musí vydržať lano kabíny výťahu, ktorý pri celkovej hmotnosti 1 600 kg má dosiahnuť za 5 s z pokoja rýchlosť 12 m.s^{-1} smerom nahor ?
a) 16 960 N b) 22 650 N c) 19 840 N d) 18 280 N

10. Motor auta s tiažou 10 000 N má ťažnú silu 1 600 N. Za aký čas môže auto z pokoja dosiahnuť rýchlosť 54 km.h^{-1} ? Trenie a odpor prostredia zanedbajte.
a) 9,375 s b) 6,275 s c) 11,275 s d) 8,125 s

2. zadanie

RIEŠENIA PRÍKLADOV Z DYNAMIKY HMOTNÉHO BODU

1. príklad:

$m = 70$ kg, $v = 225$ m.s^{-1}, $r = 2{,}7$ km $= 2{,}7.10^3$ m, $g = 10$ m.s^{-2}

V najnižšom bode kruhovej dráhy s polomerom r pôsobí pilot na sedadlo celkovou silou

$$F_d = mg + \frac{mv^2}{r} = mg\left(1 + \frac{v^2}{gr}\right) =$$

$$= 70 \text{ kg} \,.\, 10 \text{ m.s}^{-2}.\left(1 + \frac{(225 m.s^{-1})^2}{10 m.s^{-2}.2{,}7.10^3 m}\right) = 2\,012{,}5 \text{ N}$$ **(3 b)**

V najnižšom bode dráhy pôsobí pilot na sedadlo silou 2 012,5 N. **(0,5 b)**

Vyjadrenie tejto sily v pomere k tiaži pilota je:

$$\frac{F_d}{mg} = 1 + \frac{v^2}{gr} = 1 + \frac{(225 m.s^{-1})^2}{10 m.s^{-2}.2{,}7.10^3 m} = 2{,}875$$ **(1 b)**

Pomer veľkosti sily F_d k tiaži pilota je 2,875. **(0,5 b)**

V najvyššej polohe kruhovej dráhy s polomerom r pôsobí pilot na sedadlo celkovou silou

$$F_h = \frac{mv^2}{r} - mg = mg\left(\frac{v^2}{gr} - 1\right) =$$

$$= 70 \text{ kg} \,.\, 10 \text{ m.s}^{-2}\left[\frac{(225 m.s^{-1})^2}{10 m.s^{-2}.2{,}7.10^3 m} - 1\right] = 612{,}5 \text{ N}$$ **(3 b)**

V hornej polohe pôsobí pilot na sedadlo celkovou silou 612,5 N. **(0,5 b)**

$$\frac{F_h}{mg} = \frac{v^2}{gr} - 1 = \frac{(225 m.s^{-1})^2}{10 m.s^{-2}.2{,}7.10^3 m} - 1 = 0{,}875$$ **(1 b)**

Pomer veľkosti sily F_h k tiaži pilota je 0,875. **(0,5 b)**

2. príklad:

$F = 15.10^4$ N, $m = 10^6$ kg, $s = 500$ m, $v_1 = 32{,}4$ km/h $= 9$ m.s^{-1},
$v_2 = 54$ km/h $= 15$ m.s^{-1} **(1 b)**

Veľkosť výslednej sily pôsobiacej na vlak je $F_c = F - F_p = ma$ **(2 b)**

kde F_p je sila pôsobiaca proti smeru pohybu vlaku.

Zrýchlenie vlaku je možné určiť z kinematických údajov o pohybe vlaku:

$v_2 = v_1 + at$ **(1 b)**

$s = v_1 t + \frac{1}{2}at^2$ **(1 b)**

Z prvej z týchto rovníc vychádza pre čas zrýchľovania $t = \dfrac{v_2 - v_1}{a}$ **(1 b)**

Po dosadení času zrýchľovania do druhej rovnice dostaneme

$$s = v_1\frac{v_2 - v_1}{a} + \frac{1}{2}a\left(\frac{v_2 - v_1}{a}\right)^2 = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2a} \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2s}$$ **(1 b)**

Pre silu pôsobiacu proti smeru pohybu vlaku vychádza

$$F_p = F - ma = F - m\frac{v_2^2 - v_1^2}{2s} = 15.10^4\ \text{N} - 10^6\ \text{kg}.\frac{(15m.s^{-1})^2 - (9m.s^{-1})^2}{2.500m} = 6\,000\ \text{N}$$

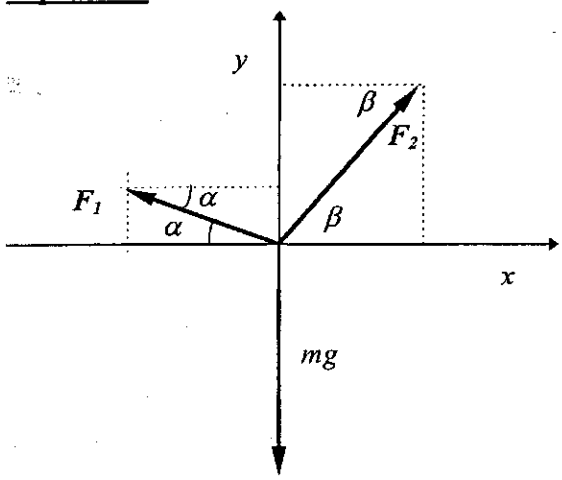
(1 b)

Proti smeru pohybu vlaku pôsobí sila 6 000 N. **(1 b)**

Proti smeru pohybu vlaku pôsobia: a) sily trenia **(0,5 b)**

b) odpor vzduchu **(0,5 b)**

<u>3. príklad:</u> $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$, $m = 12{,}5$ kg, $g = 10$ m.s^{-2}



V stave rovnováhy síl platí pre teleso zavesené na dvoch lanách, ktoré majú zanedbateľnú hmotnosť, vektorová rovnica

$$\boldsymbol{F_1 + F_2 + mg = 0}$$

Túto rovnicu možno napísať aj v zložkovom tvare, takže pre x-ové a y-ové súradnice jednotlivých síl dostávame rovnice

V smere osi x: $-F_1 \cos\alpha + F_2 \cos\beta = 0$ (1) **(2 b)**

V smere osi y: $F_1 \sin\alpha + F_2 \sin\beta - mg = 0$ (2) **(2 b)**

Z rovnice (1) dostaneme pre silu F_2: $F_2 = F_1\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ (3) **(1 b)**

a po dosadení do rovnice (2) vychádza

$$F_1 \sin\alpha + F_1\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\sin\beta - mg = 0$$ **(1 b)**

Vynásobením poslednej rovnice výrazom $\cos\beta$ máme

$$F_1 (\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta) - mg\cos\beta = 0$$

a teda pre silu F_1 platí:

$$F_1 = \frac{mg\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{12{,}5kg.10m.s^{-2}.0{,}5}{1} = 62{,}5\ \text{N}$$ **(2 b)**

Pre silu F_2 bude platiť

$$F_2 = \frac{mg\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{12{,}5kg.10m.s^{-2}.0{,}866}{1} = 108{,}25\ \text{N}$$ **(1 b)**

Jednotlivé sily vychádzajú $F_1 = 62{,}5$ N a $F_2 = 108{,}25$ N. **(1 b)**

4. príklad:

$m_1 = 1\,380$ kg, $m_2 = 70$ kg, $F = 7\,000$ N, $t = 10$ s

a) Celková hmotnosť sústavy auto + vodič je: $m = m_1 + m_2$

Pre zrýchlenie sústavy teda platí:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{7000N}{1380kg + 70kg} = 4{,}83 \text{ m.s}^{-2}$$ **(2 b)**

Auto obsadené iba vodičom dosiahne zrýchlenie 4,83 m.s^{-1}. **(1 b)**

b) Pretože začiatočná rýchlosť je nulová ($v_o = 0$) a čas $t = 10$ s, pre dráhu pri rovnomerne zrýchlenom pohybe platí:

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{Ft^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{7000N.(10s)^2}{2.(1380kg + 70kg)} = 241{,}4 \text{ m}$$ **(2 b)**

Za prvých 10 sekúnd prejde auto dráhu 241,4 m. **(1 b)**

c) Celková hmotnosť sústavy auto + 4 osoby: $m* = m_1 + 4m_2$ **(1 b)**

Zrýchlenie takejto sústavy, ktoré motor môže vyvinúť, bude:

$$a* = \frac{F}{m*} \quad \Rightarrow \quad \Delta a = a - a* = \frac{F}{m_1 + m_2} - \frac{F}{m_1 + 4m_2}$$ **(1 b)**

$$\Delta a = 4{,}83 m.s^{-2} - \frac{7000N}{1380kg + 4.70kg} = 0{,}61 \text{ m.s}^{-2}$$ **(1 b)**

Zrýchlenie auta obsadeného 4 osobami sa bude oproti zrýchleniu auta obsadeného len vodičom líšiť iba o 0,61 m.s^{-2}.

5. príklad:

$m_1 = 0{,}005$ kg, $m_2 = 3$ kg, $s = 25$ cm = 0,25 m, $\mu_k = 0{,}2$

Sila trenia, ktorá zapríčiňuje rovnomerne spomalený pohyb kocky, v ktorej sa už nachádza aj uviaznutý náboj, je daná vzťahom

$$T = \mu_k g(m_1 + m_2)$$ **(1 b)**

takže spomalenie sústavy je $a = \dfrac{T}{m_1 + m_2} = \mu_k g$ **(1 b)**

Dráha s, po ktorej sa sústava pohybovala do svojho úplného zastavenia, sa môže vyjadriť vzťahom pre rovnomerne spomalený pohyb

$$s = v_o t - \frac{1}{2}at^2$$ **(1 b)**

kde v_o je rýchlosť sústavy tesne po vniknutí náboja do kocky. Pre okamžitú rýchlosť pri rovnomerne spomalenom pohybe platí

$$v = v_o - at = v_o - \mu_k gt$$ **(1 b)**

Na konci pohybu je však $v = 0$, takže $v_o = \mu_k gt$ **(1 b)**

Po dosadení v_o do rovnice pre dráhu s dostaneme čas, ktorý uplynie do úplného zastavenia sústavy

$$t = \sqrt{\frac{2s}{\mu_k g}} = \sqrt{\frac{2.0{,}25m}{0{,}2.9{,}81m.s^{-2}}} = 0{,}5 \text{ s}$$ **(1 b)**

Čas pohybu sústavy do úplného zastavenia bol 0,5 s. **(1 b)**

Pri nepružnej zrážke platí zákon zachovania hybnosti (kocka mala pred vstrelením náboja nulovú rýchlosť)

$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_o$ **(1 b)**

Pre rýchlosť náboja vstreleného do kocky platí

$$v_1 = \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} v_0 = \ldots = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{2 s \mu_k g}$$

$$v_1 = \frac{0{,}005kg + 3kg}{0{,}005kg} \sqrt{2.0{,}25m.0{,}2.9{,}81m.s^{-2}} = 595{,}26 \text{ m.s}^{-1}$$ **(1 b)**

Rýchlosť náboja tesne pred jeho vniknutím do kocky bola 595,26 m.s^{-1}. **(1 b)**

Poznámka: Druhú časť príkladu možno riešiť vzhľadom na dokonale nepružnú zrážku aj porovnaním kinetickej energie sústavy tesne po zrážke a práce, ktorú "vykonali" sily trenia pri spomaľovaní sústavy:

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_o^2 = Ts = (m_1 + m_2)\, \mu_k g s$$

Z tejto rovnice možno vyjadriť v_o a dosadiť ju do rovnice vyjadrujúcej zákon zachovania hybnosti. Umožňuje to určiť rýchlosť náboja v_1 tesne pred jeho vniknutím do kocky.

6. príklad:

$l = 2$ m, $m = 2$ kg, $t = 0{,}1$ s, $M = 100$ kg

$$l = \frac{1}{2} a t^2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2\,l}{t^2}$$ **(2 b)**

Pre rýchlosť náboja v čase výstrelu teda platí $v = at = \dfrac{2l}{t}$. **(2 b)**

Zo zákona zachovania hybnosti po dosadení za rýchlosť v máme

$$mv = M v_{dela} \quad \Rightarrow \quad v_{dela} = \frac{2\,m\,l}{M\,t}$$

(3 b) **(2 b)**

Delo sa po výstrele bude v dôsledku spätného nárazu pohybovať rýchlosťou

$$v_{dela} = \frac{2\,.\,2\text{ kg}\,.\,2\text{ m}}{100\text{ kg}\,.\,0{,}1\text{ s}} = \mathbf{0{,}8\ m.s^{-1}}.$$ **(1 b)**

7. príklad:

$m = 800$ kg, $v = 54$ km.h^{-1}, $F = 2\,000$ N

$$F = m\,a \qquad v = a\,t \qquad s = \frac{1}{2} a\,t^2 = \frac{m\,v^2}{2\,F}$$ **$s = 45$ m** **b**

8. príklad:

$m = 500$ kg, $t = 5$ s, $v = 36$ km.h^{-1}, $F = 1\,000$ N

$$F\,\Delta t = m\,\Delta v = m\left(v_0 - v\right) \qquad v_0 = \frac{F\,\Delta t + m\,v}{m}$$ **$v_0 = 20$ m.s^{-1}** **c**

9. príklad:

$m = 1\,600$ kg, $t = 5$ s, $v = 12$ m.s^{-1}

$F_1 = m\,a \qquad v = a\,t \qquad F = G + F_1 = m\,g + m\dfrac{v}{t}$ **F = 19 840 N** **c**

10. príklad:

$G = 10\,000$ N, $F = 1\,600$ N, $v = 54$ km.h^{-1}

$v = a\,t \qquad G = m\,g \qquad F = m\,a \qquad t = \dfrac{v\,G}{g\,F}$ **t = 9,375 s** **a**