Štatistika 1
Pravdepodobnosť

4. prednáška

(Hromadný) náhodný pokus a náhodná udalosť (jav)

- **náhodný pokus** - dej (činnosť) prebiehajúci za určitých podmienok, ktorého výsledky pozorujeme, môže sa opakovať
- **náhodná udalosť (jav)** – výsledok náhodného pokusu ovplyvnený okrem známych faktorov, neznámymi (náhodnými) činiteľmi

Elementárne udalosti

- **elementárna udalosť** (jav) ω - bezprostredný („najjednoduchší") výsledok náhodného pokusu
- **priestor elementárnych javov** Ω - množina všetkých elementárnych udalostí (vzťahujúcich sa na konkrétny náhodný pokus)

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$$

Náhodný jav

- je podmnožinou množiny Ω , ale takou ktorá patrí do pravdepodobnostného pola *S*, *označenie A, B, …*
- *S* je systém náhodných javov definovaných na množine Ω :

1. je neprázdny
2. ak jav A patrí do *S*, potom do *S* patrí aj doplnok javu A,
3. ak spočitateľná postupnosť javov A_1, A_2,... patrí do *S*, potom aj ich zjednotenie patrí do *S.*

Vzťahy medzi náhodnými udalosťami

- náhodná udalosť A „nastala“, ak výsledkom náhodného pokusu je elementárna udalosť $\omega \in A$
- istá udalosť Ω – pri existencii daného súboru podmienok musí nastať
- nemožná udalosť $\varnothing$ - nikdy nemôže za daných podmienok nastať

- **jav opačný** k javu A – spočíva v nenastatí javu, je **doplnkom** k javu A
- jav A je **časťou** javu B – pri každom nastatí javu A nastane aj jav B, teda jav A má za **následok** jav B, jav A je **podmnožinou** javu B
- javy A a B sú **rovnocenné** – ak nastane jav A súčasne nastane jav B

- **zjednotenie** javov A a B – nastane aspoň jeden z javov A a B
- **prienik javov** A a B – jav spočívajúci v súčasnom nastatí oboch javov
- **nezlúčiteľné** (nezávislé, disjunktné) javy A a B - javy nemôžu súčasne nastať, ich prienik je jav nemožný

Pravdepodobnosť

- Pravdepodobnosť je číslo z intervalu <0;1> charakterizujúce mieru výskytu náhodného javu

Definície pravdepodobnosti:

- klasická
- štatistická
- Kolmogorovova axiomatická
- geometrická

Klasická definícia pravdepodobnosti

- Nech $\Omega=\{\omega_1,\dots,\omega_n\}$ je konečná a neprázdna množina. Nech každý z javov ω_i je rovnako možný. Potom pravdepodobnosť náhodného javu je daná vzťahom $$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$$ kde $|\Omega|$ je počet prvkov množiny (počet všetkých možných elementárnych výsledkov náhodného pokusu) a $|A|$ je počet priaznivých výsledkov, t.j. elementárnych výsledkov, ktoré znamenajú nastatie náhodného javu).

Vlastnosti pravdepodobnosti

- $0 \le P(A) \le 1$ pre každú náhodnú udalosť A
- $P(\Omega) = 1$
- ak $A \cap B = \emptyset$, tak $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
  a z týchto vlastností sa dajú odvodiť:
- $P(A^c) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(\emptyset) = 0$

Geometrická definícia pravdepodobnosti

- Nech Ω je časť priestoru s konečnou mierou $\|\Omega\|$ (napr. dĺžka, obsah, objem). Potom pre pravdepodobnosť náhodnej udalosti $A \subseteq \Omega$ s mierou $\|A\|$ platí

$$P(A) = \frac{\|A\|}{\|\Omega\|}.$$

Štatistická definícia pravdepodobnosti

- Ak pri nezávislom n-násobnom opakovaní pokusu nastane jav A práve m krát, jeho relatívna početnosť $f_n(A)$ sa rovná $\frac{m}{n}$. Ak platí $\lim_{n\to\infty} f_n(A) = p$, tak číslo p nazveme pravdepodobnosťou javu A.

Axiomatická definícia pravdepodobnosti (Kolmogorov 1933)

- Nech Ω je neprázdna množina a nech S je systém náhodných javov definovaných na Ω. Potom pravdepodobnosťou nazveme funkciu

$P : S \to [0,1]$, pre ktorú platí

1. $P(\Omega) = 1$
2. $P(A) \geq 0$ pre každé $A \in S$
3. ak máme ľubovoľné po dvojiciach disjunktné javy $A_1, A_2, \ldots \in S$: $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Nezávislosť javov

- trojicu (Ω, S, P) nazývame pravdepodobnostný priestor
- Náhodné javy $A, B \subset S$ sú **nezávislé**, ak platí $P(A \cap B) = P(A).P(B).$

Náhodná premenná

- Nech je daný pravdepodobnostný priestor

(Ω, S, P). Zobrazenie $X : \Omega \to R$ nazývame náhodnou premennou, ak pre každé reálne číslo x platí

$$\{\omega \in \Omega; X(\omega) < x\} \in S$$

Označenie: náhodná premenná X, Y, Z,...

konkrétna hodnota (realizácia) NP: x, y, z, ...

Typy náhodnej premennej

- **diskrétna** – môže nadobúdať len konečný alebo spočítateľne nekonečný počet hodnôt
- **spojitá** – môže nadobudnúť ľubovoľnú hodnotu z konečného alebo nekonečného intervalu

Zákon rozdelenia pravdepodobnosti

náhodnej premennej je pravidlo, ktoré každej prípustnej hodnote alebo intervalu hodnôt priraďuje pravdepodobnosť, že náhodná premenná nadobudne túto hodnotu alebo hodnoty z určitého intervalu.

Je daný napríklad pravdepodobnostnou funkciou alebo distribučnou funkciou.

Pravdepodobnostná funkcia

- je funkcia, ktorá každej prípustnej hodnote x_i diskrétnej náhodnej premennej priradí pravdepodobnosť nadobudnutia tejto hodnoty, teda

$$P(x_i) = P(X = x_i) = P(\{\omega, X(\omega) = x_i\}).$$

- Platí $\sum_{i\geq 1} P(x_i) = 1$
- Prav. funkcia môže byť daná tabuľkou

Distribučná funkcia

- je funkcia $F: R \to R$, ktorá každému reálnemu číslu priradí pravdepodobnosť, že náhodná premenná X nadobudne hodnoty menšie ako x , t. j.

$$F(x) = P(\{\omega \in \Omega; X(\omega) < x\}) = P(X < x), x \in R.$$

Vlastnosti distribučnej funkcie:

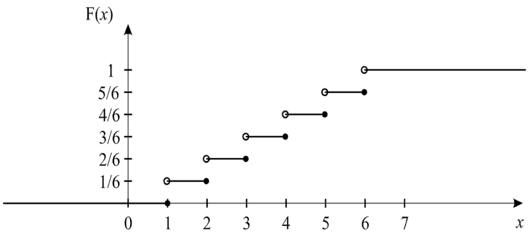
- pre každé reálne číslo x platí, že $0 \leq F(x) \leq 1$,
- F je neklesajúca funkcia,
- F je v ľubovoľnom bode spojitá zľava,
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$
- nech a, b sú ľubovoľné reálne čísla a $a < b$ potom

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a).$$

Distribučná funkcia diskrétnej náhodnej premennej

- pre DNP vypočítame hodnotu NP podľa vzťahu

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i).$$



Distribučná funkcia spojitej náhodnej premennej

- Pre SNP vypočítame hodnotu distribučnej funkcie podľa vzťahu:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t,$$

- kde *f* je nezáporná integrovateľná funkcia a nazýva sa **hustota** rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej

Vlastnosti hustoty

- f je nezáporná funkcia
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$
- $f(x) = F'(x)$
- $P(a \leq X < b) = P(X \in \langle a, b)) = \int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$

Číselné charakteristiky NP

- stredná hodnota NP

$E[X] = \sum_x xP(X = x)$ $\qquad E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x$

- disperzia NP

$$D[X] = E[(X - E[X])^2],$$

- smerodajná odchýlka $\sigma[X] = \sqrt{D[X]}$

Kvantil

- Číslo u_α nazveme α . 100 % kvantilom rozdelenia spojitej náhodnej premennej X s rastúcou distribučnou funkciou, ak platí

$$P(X < u_\alpha) = \alpha$$