Derivácia funkcie

Motivácia pojmu derivácia

Zaujíma nás priemerná intenzita zmeny nejakej veličiny (dráhy, rastu populácie, veľkosti elektrického náboja, hmotnosti), vzhľadom na inú veličinu (čas, dĺžka)

Fyzika - mechanika

Priemerná rýchlosť pri pohybe rovnomernom priamočiarom je $v = s/t$,

s – dráha

t – čas

Dráha ale môže byť funkciou času (mení sa s časom). Potom priemerná rýchlosť bude:

$$v = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Geometria

Je daná funkcia y = f(x) a na nej dva rôzne body $[x_1, f(x_1)]$, $[x_2, f(x_2)]$. Priamka, ktorá prechádza týmito dvoma bodmi sa nazýva sečnica grafu funkcie a má rovnicu:

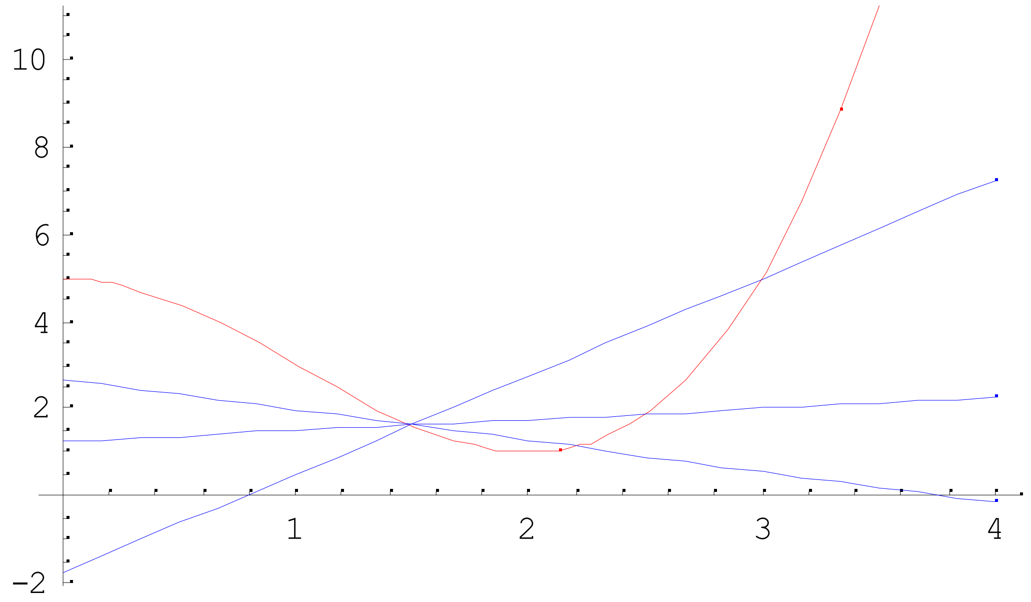
$$y = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} x + f(x_1) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} x_1$$

$$= \frac{\Delta f}{\Delta x} x + f(x_1) - \frac{\Delta f}{\Delta x} x_1$$

Geometria - pokračovanie

Smernica tejto priamky – sečnice je

$$k = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$



Motivácia pojmu derivácia

Vo všetkých uvedených prípadoch nás bude

zaujímať situácia, keď sa veličina v menovateli

bude zmenšovať, to jest bude sa skracovať časový úsek v príklade z fyziky

alebo sa bude skracovať vzdialenosť medzi dvoma bodmi pri rovnici sečnice...

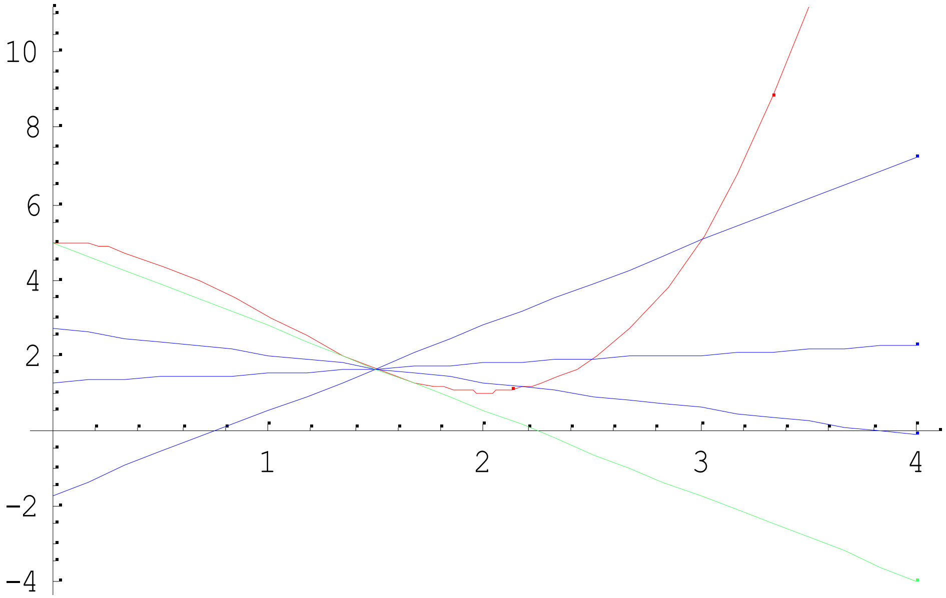
Pojem derivácie

Napríklad pre rovnicu sečnice. Keď sa dva body budú k sebe približovať a teda ich vzdialenosť sa bude limitne blížiť k nule, sečnica sa zmení na dotyčnicu ku grafu tejto funkcie v bode. Hodnota jej smernice bude teda

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Pojem derivácie

Geometrický význam derivácie



Definícia derivácie

Nech je daná funkcia f a bod x∈ D(f). Derivációu funkcie f v bode x nazveme limitu

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

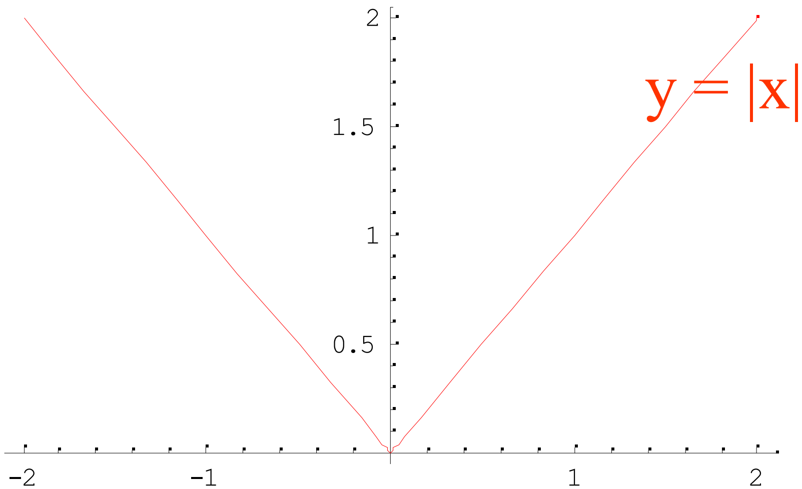
Derivácia nemusí existovať v každom bode definičného oboru. Ak derivácia existuje, hovoríme, že funkcia má deriváciu (je diferencovateľná) v bode x

Iné označenia:

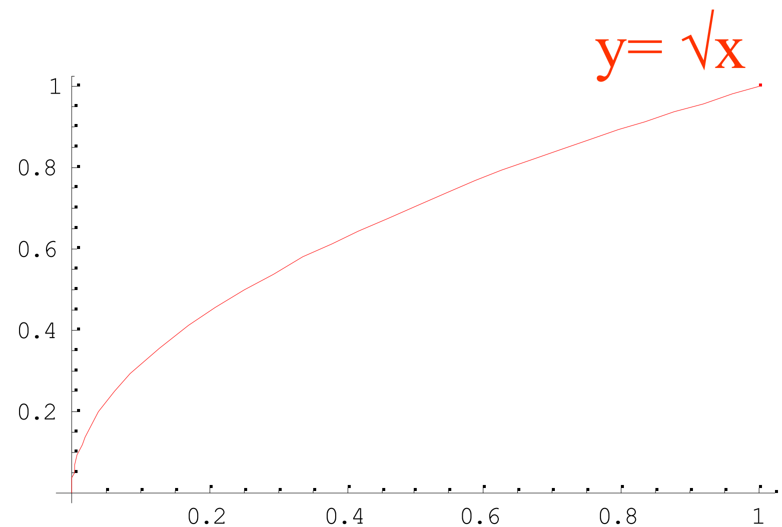
$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{df}{dx}, \quad D_x(f), \quad \frac{d}{dx}(f)$$

Neexistuje derivácia

Príklad funkcií, ktoré nemjú deriváciu



nemá deriváciu v bode 0



nemá deriváciu v bode 0

Derivácia ako funkcia

Ak existuje derivácia funkcie f pre každé $x \in M \subset D(f)$, potom zobrazenie

$$f' : M \to R$$

také, že $x \mapsto f'(x)$

voláme derivácie funkcie (je to opäť funkcia). Funkcia je diferencovateľná na uzavretom intervale ak má deriváciu v každom vnútornom bode intervalu a v koncových bodoch existujú príslušné jednostranné limity pre deriváciu.

Vlastnosti diferencovateľných funkcií

Veta: Ak funkcia f má deriváciu v bode x =c, potom je v tomto bode spojitá.

Poznámka: Opačná veta neplatí.

Príklad: funkcia y = |x| je spojitá na celom R, ale nemá deriváciu v bode 0

Derivácie elementárnych funkcií

Konštantná funkcia	$y = c$	$y' = 0$
Polynomické funkcie	$y = x^n$	$y' = n\,x^{n-1}$
(platí aj pre ľubovoľné reálne číslo n)		
Exponenciálne funkcie	$y = e^x$	$y' = e^x$
	$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
Logaritmické funkcie	$y = \ln x$	$y' = 1/x$
	$y = \log_a x$	$y' = 1/(x\ln a)$
Goniometrické funkcie	$y = \sin x$	$y' = \cos x$
	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
	$y = \mathrm{tg}\, x$	$y' = 1/\cos^2 x$
	$y = \mathrm{cotg} x$	$y' = -1/\sin^2 x$

Derivácie elementárnych funkcií

Cyklometrické funkcie

y = arcsinx $$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

y=arccos x $$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

y = arctg x $$y' = \frac{1}{1+x^2}$$

y = arccotg x $$y' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Pravidlá pre derivovanie

Veta: Nech funkcie f a g sú diferencovateľné.

Potom platí:

$(c\,f)' = c\,f'$, kde c je ľubovoľné reálne číslo

$(f+g)' = f'+g'$

$(f-g)' = f'-g'$

$(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f$

$(f/g)' = (f' \cdot g - g' \cdot f)/g^2$

$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Derivácie výšších rádov

Nech funkcia f´ je opäť diferencovateľná funkcia. Potom jej deriváciu voláme druhá derivácia funkcie f a označujeme f´´. Podobne sa definujú aj derivácie vyšších rádov.

Označenie: f´´,f´´´, f^{iv}, ...

Ďalšie príklady

Fyzika: Zrýchlenie je derivácia rýchlosti:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

Ďalšie príklady

Ekonómia: marginálna hodnota

Nákladová funkcia C(x): sú náklady firmy na výrobu x výrobkov. Potom

$$\frac{C(x+h)-C(x)}{h}$$

udáva priemerný nárast nákladov na výrobok

Marginálna hodnota nákladovej funkcie je C´(x).

Ekonomické vysvetlenie: ak firma zvýši produkciu o 1 výrobok, to jest $\Delta C = C(x+1)-C(x) \sim C'(x)$, teda marginálna hodnota odhaduje výrobné náklady na jeden výrobok pri danom počte výrobkov

Ďalšie príklady

Príjmová funkcia $R(x)$ udáva množstvo financií, ktoré

sa získajú predajom x výrobkov.

Marginálny príjem $R´(x)$ odhaduje nárast príjmu,

ktorý sa dosiahne jednotkovým zvýšením hodnoty

predaných výrobkov na súčasnej hladine

predávaných výrobkov

Derivácia inverznej funkcie

Nech je funkcia f monotónna na intervale (a,b) a pre každé x $\in$(a, b) existuje f´(x)≠0. Potom platí

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$