Funkcie

Funkcie

- Funkcia f z množiny D do množiny R je predpis, ktorým každému prvku z množiny D priradíme jediný prvok z množiny R
- $x \in D$ nezávislá premenná ... vzor
- $y \in R$ závislá premenná ...obraz

$$y = f(x)$$

Dve funkcie sa rovnajú, práve vtedy keď sa rovnajú ich definičné obory D a pre rovnaké vzory dávajú rovnaké výsledky

Reálne funkcie

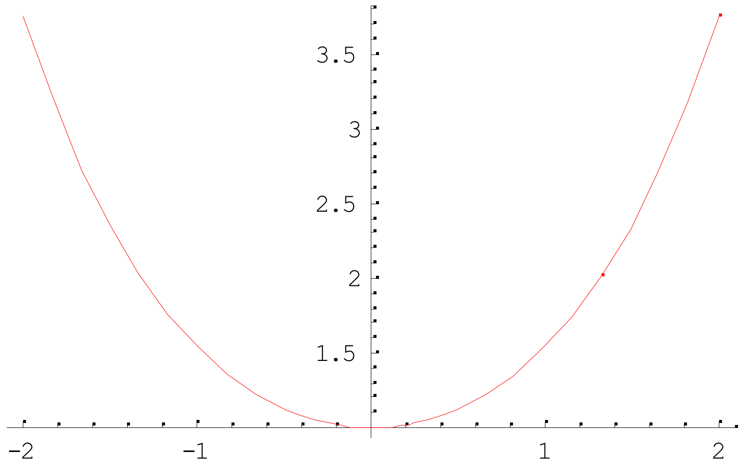
- Ak množina D je podmnožina reálnych čísel, hovoríme o reálnej funkcii jednej reálnej premennej
- D(f) – definičný obor funkcie f. Ak nie je povedané inak je to taká podmnožina reálnych čísel, pre ktorú pre každé x z definičného oboru existuje reálne číslo y dané predpisom y = f(x)
- H(f) – obor hodnôt funkcie f. Je množina všetkých obrazov prvkov z definičného oboru

Príklady funkcií

- Plocha kruhu ako funkcia polomeru: $P(r) = \pi r^2$
- Rýchlosť telesa pri voľnom páde ako funkcia času: $v(t) = g\, t$

Graf funkcie

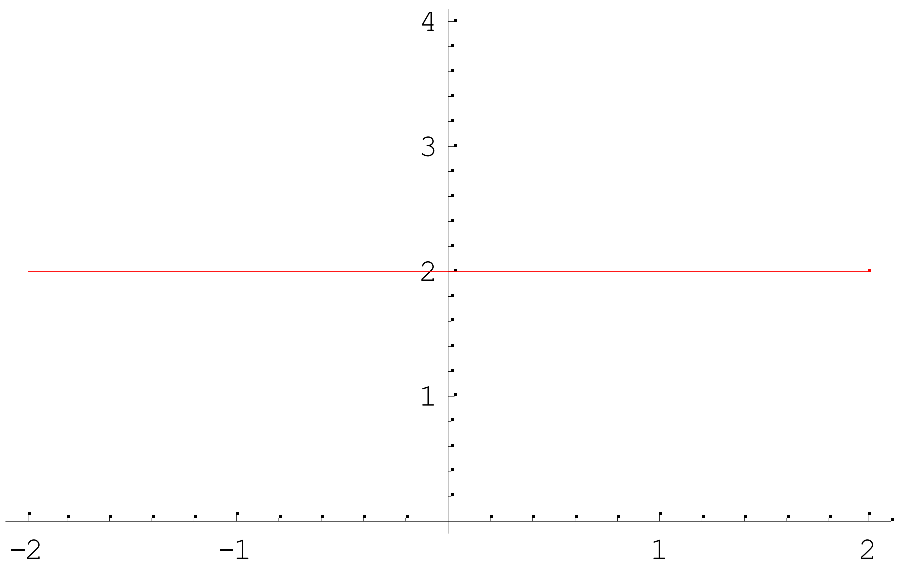
- Všetky body (x, y) v rovine, pre ktoré platí y = f(x), tvoria graf funkcie



reťazovka

Elementárne funkcie

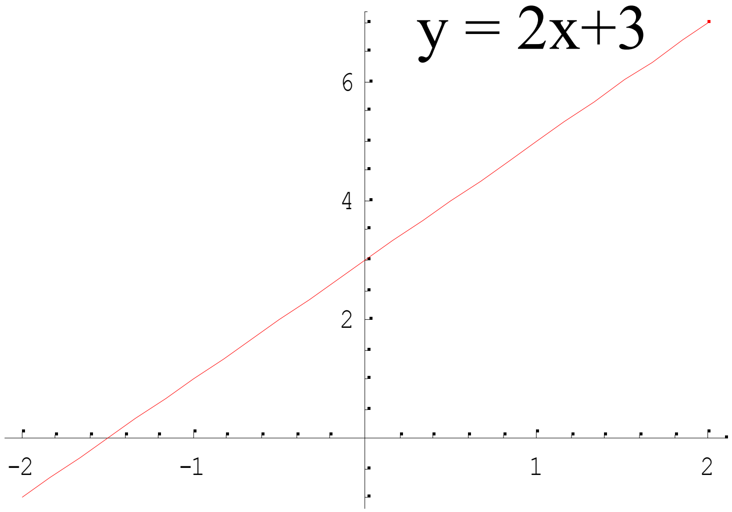
- Konštantná funkcia $y = c$ c-konštanta , grafom je rovnobežná priamka s osou x

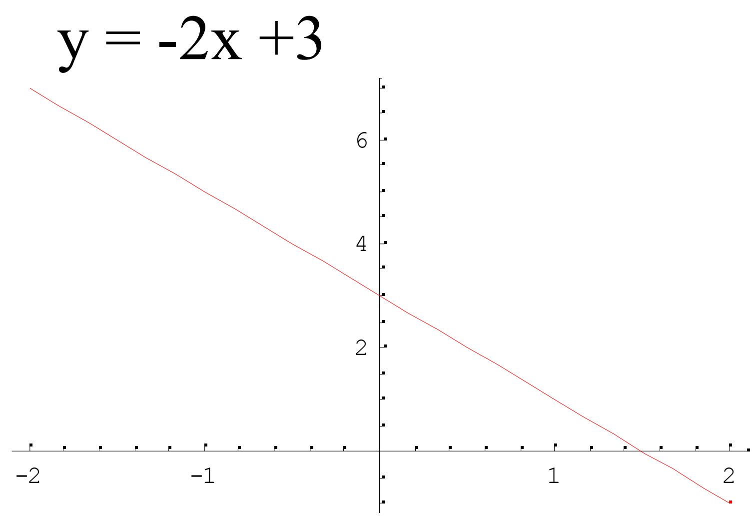


$y=2$

Elementárne funkcie

- Lineárna funkcia $y = kx+q$ k,q konštanty, grafom je priamka

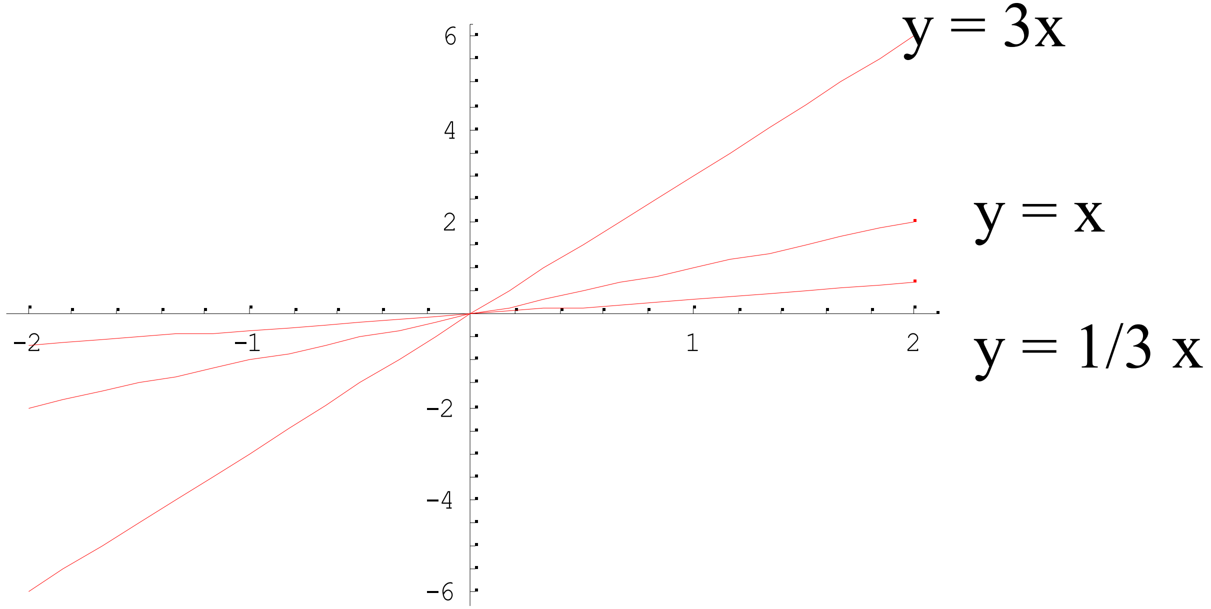




$\forall$ $\Rightarrow$

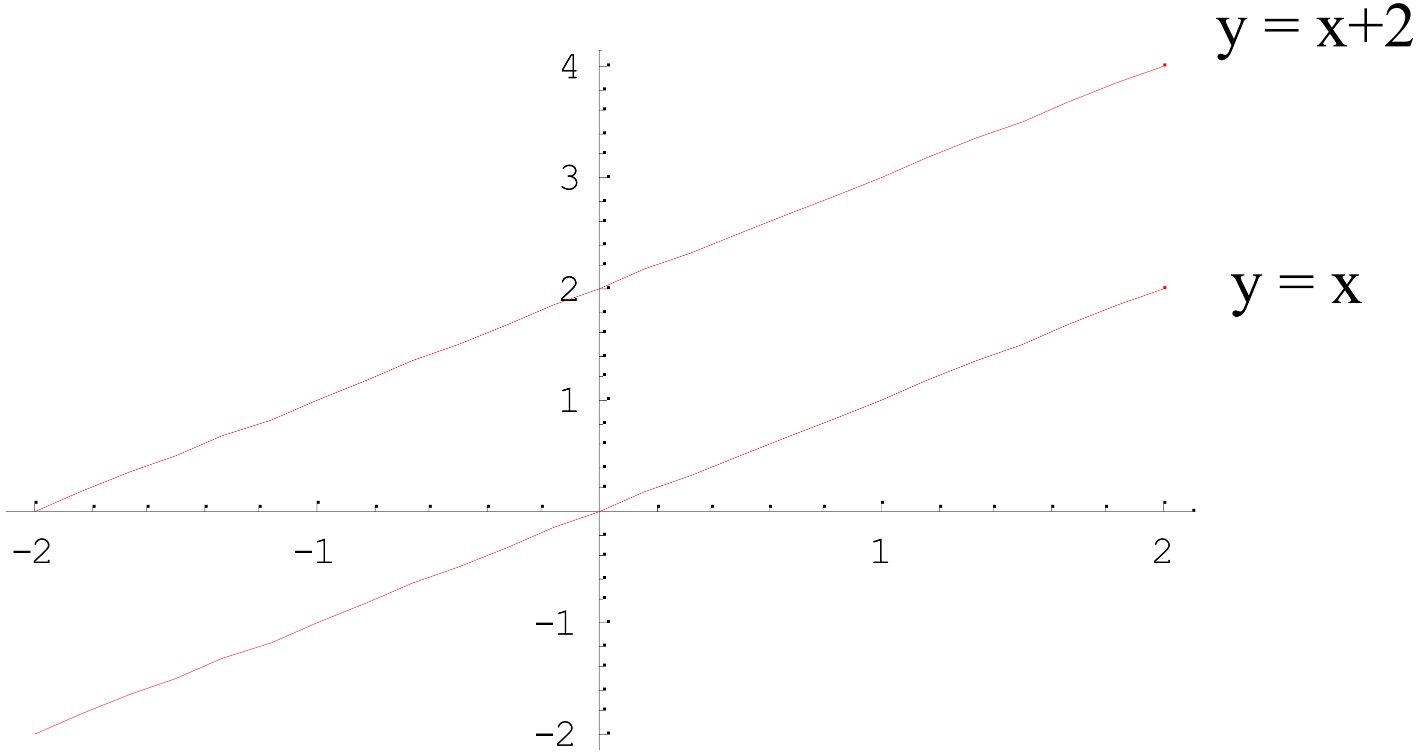
Rastúca funkcia : pre všetky a,b ϵ D(f): také že a<b platí f(a)<f(b)
Klesajúca funkcia: pre všetky a,b ϵ D(f): také že a<b platí f(a)>f(b)

Priamky rôzne k, q =0



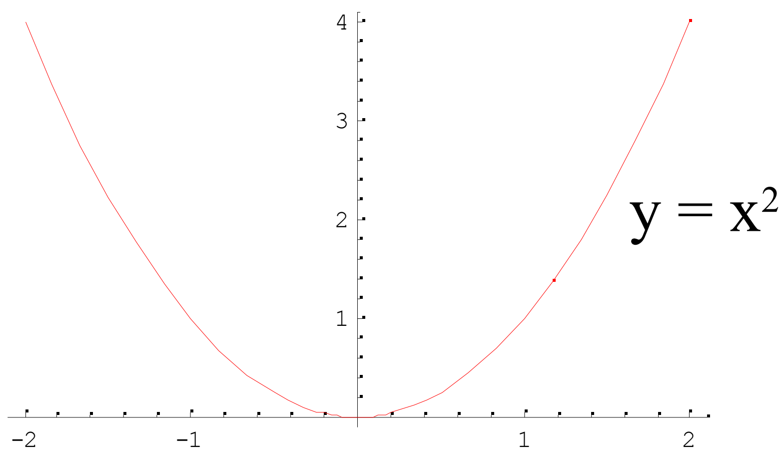
Rastúca funkcia, klesajúca funkcia...Prosté funkcie

Priamky k =1, rôzne q



Elementárne funkcie

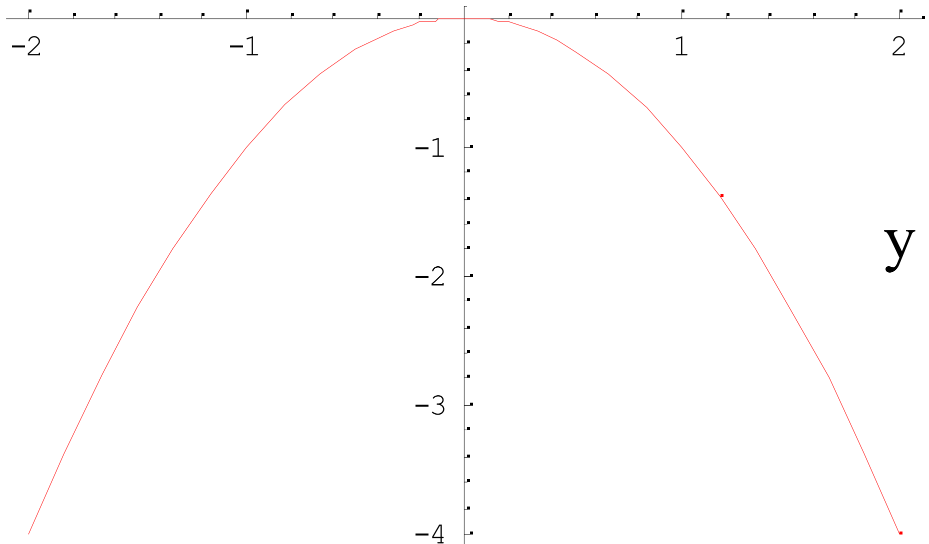
- Kvadratická funkcia: $y = ax^2 + bx + c$, a,b,c konštanty. Grafom je parabola



Funkcia je zdola ohraničená, ak je zdola ohraničený jej obor hodnôt.

Táto funkcia je zdola ohraničená : $H(f) = \langle 0, \infty)$

Elementárne funkcie



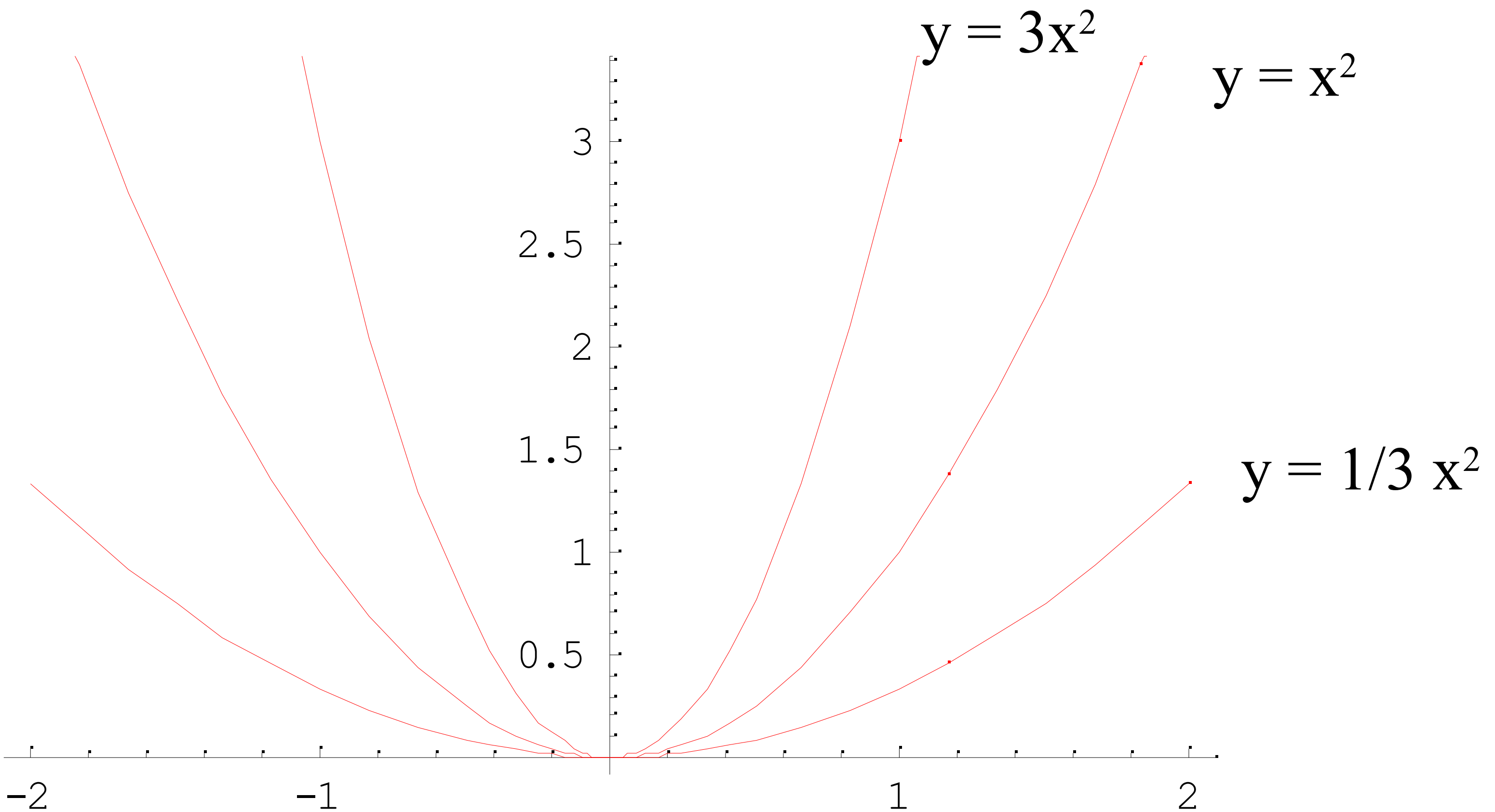
$y = -x^2$

Funkcia je zhora ohraničená, ak je zhora ohraničený jej obor hodnôt.

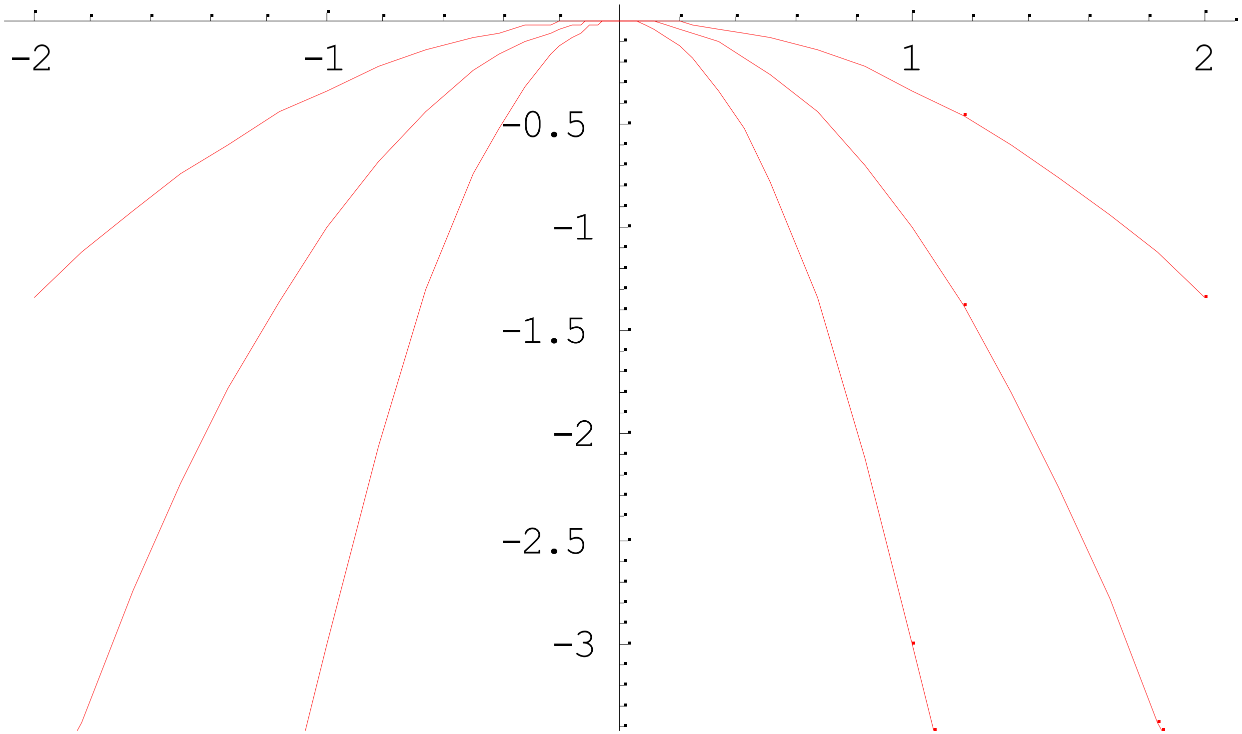
Táto funkcia je zhora ohraničená : H(f) =(-∞.0>

Ak je funkcia ohraničená zdola aj zhora, hovoríme, že je ohraničená

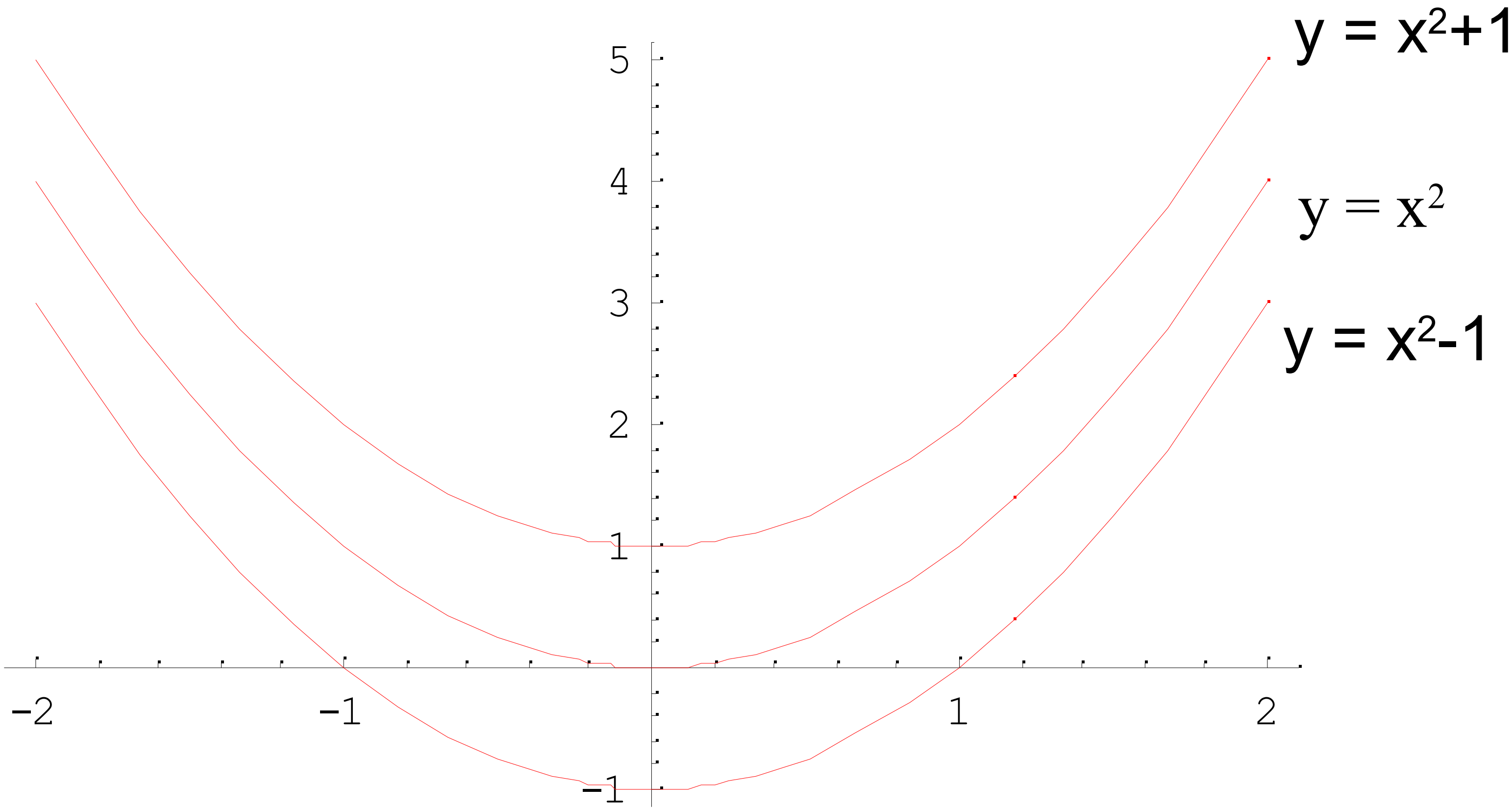
Paraboly rôzne a>0, b = c =0



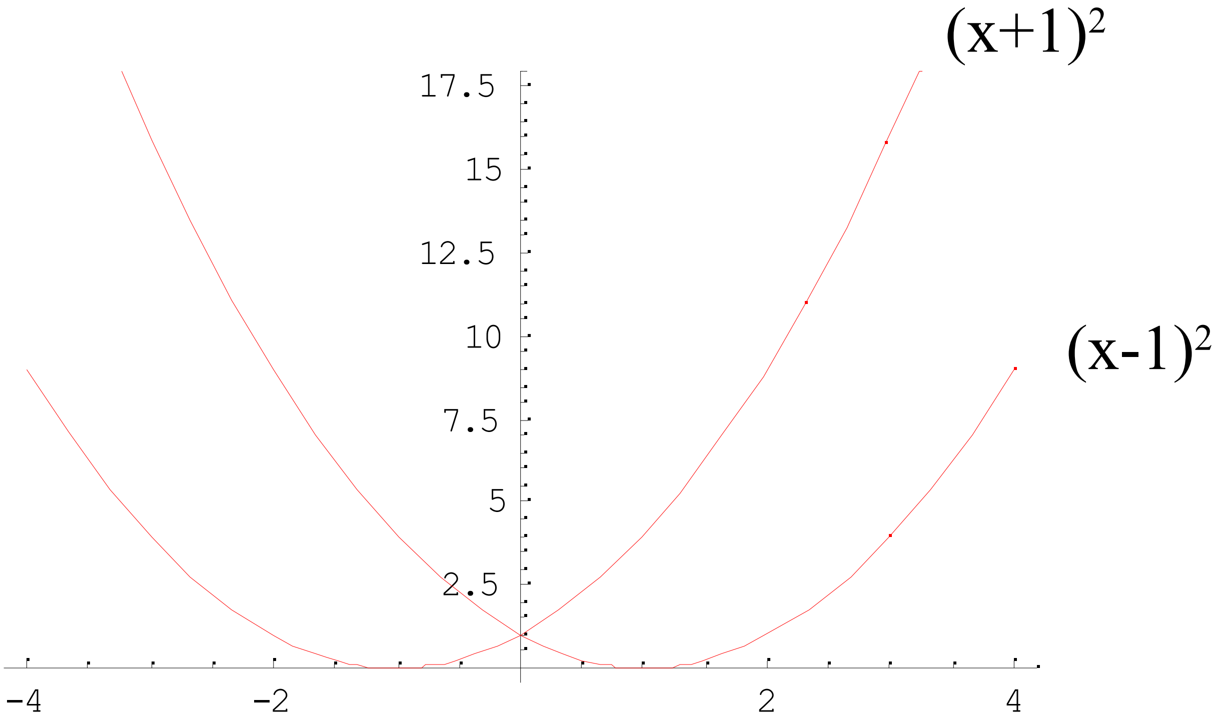
Paraboly rôzne a<0, b = c =0



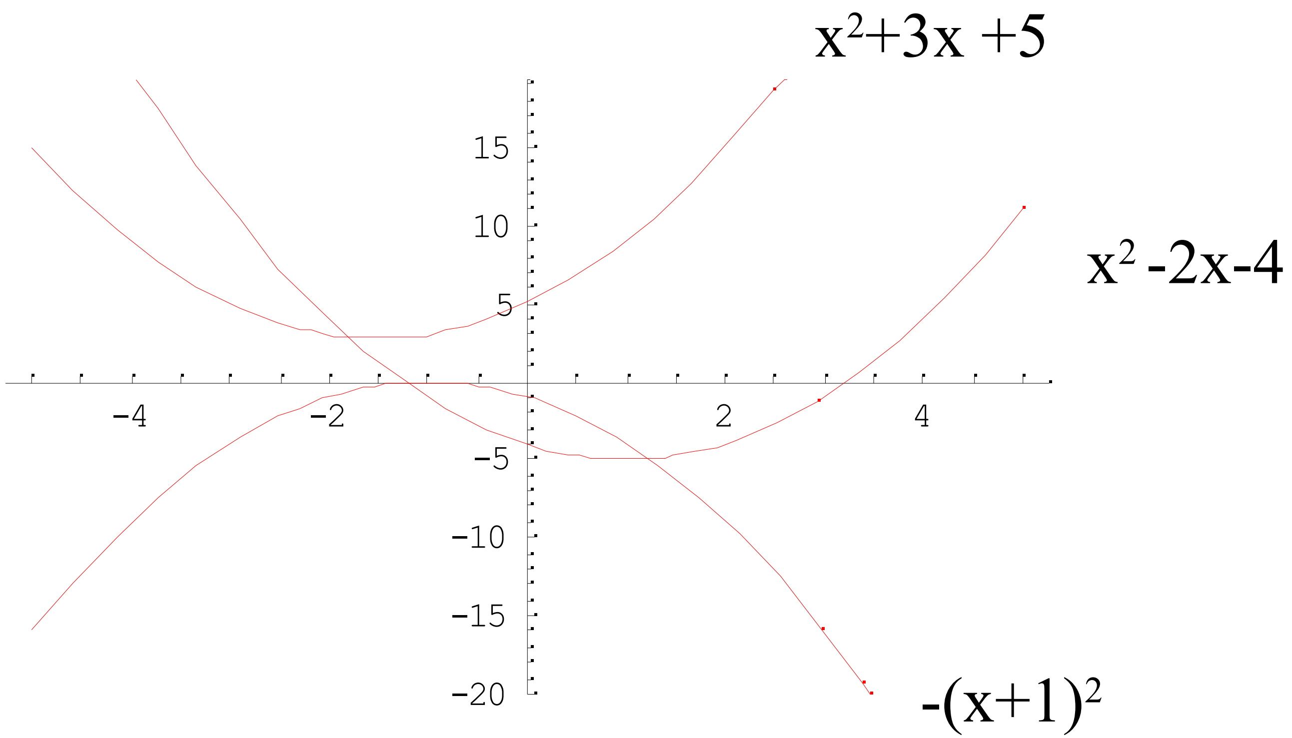
Paraboly a = 1, b = 0, rôzne c



Paraboly dvojčlen na kvadrát



Všeobecné paraboly



Elementárne funkcie

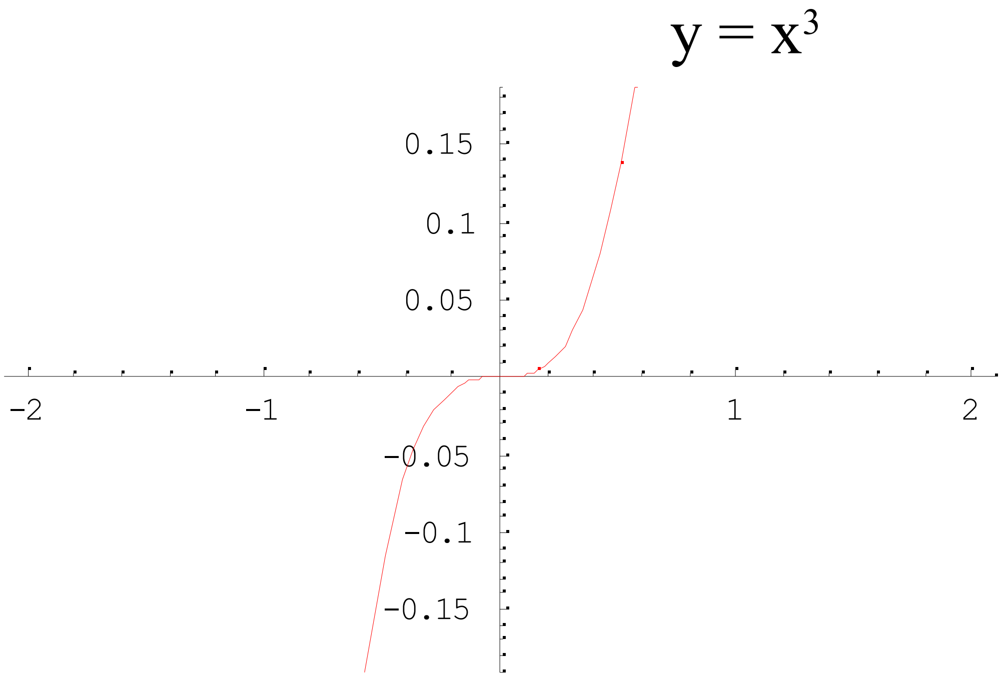
Schodovitá funkcia

$y = \lfloor x \rfloor$ dolná celá časť najvačšie celé číslo menšie ako x

$y = \lceil x \rceil$ horná celá časť najmenšie celé číslo vačšie ako x

Elementárne funkcie – vyššie polynomické funkcie

- Kubická funkcia $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, a,b,c,d konštanty

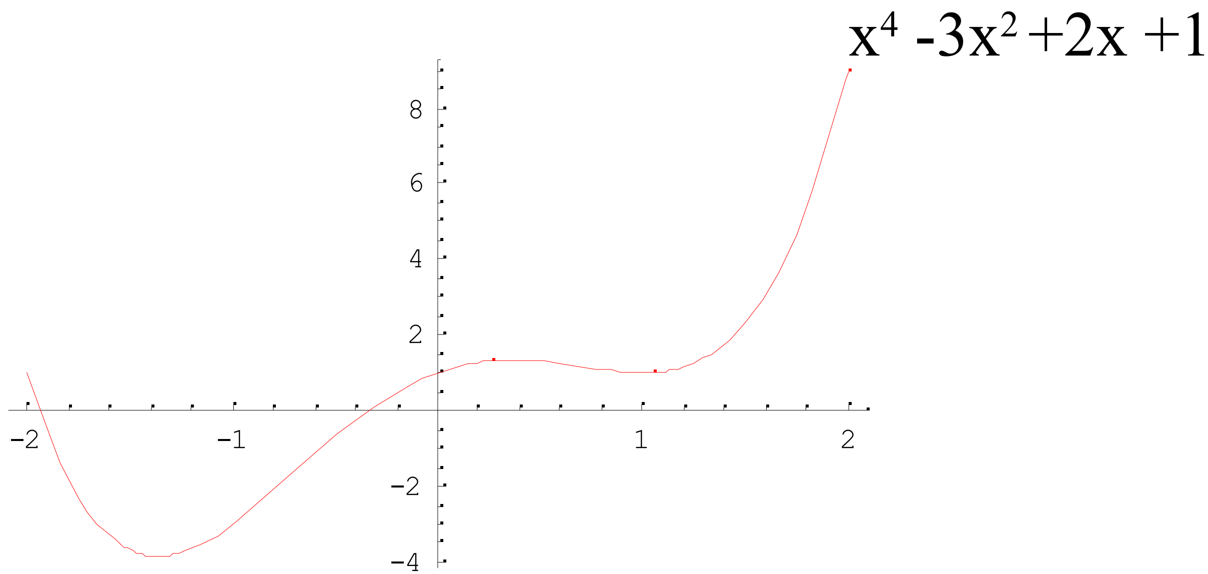


Elementárne funkcie – vyššie polynomické funkcie

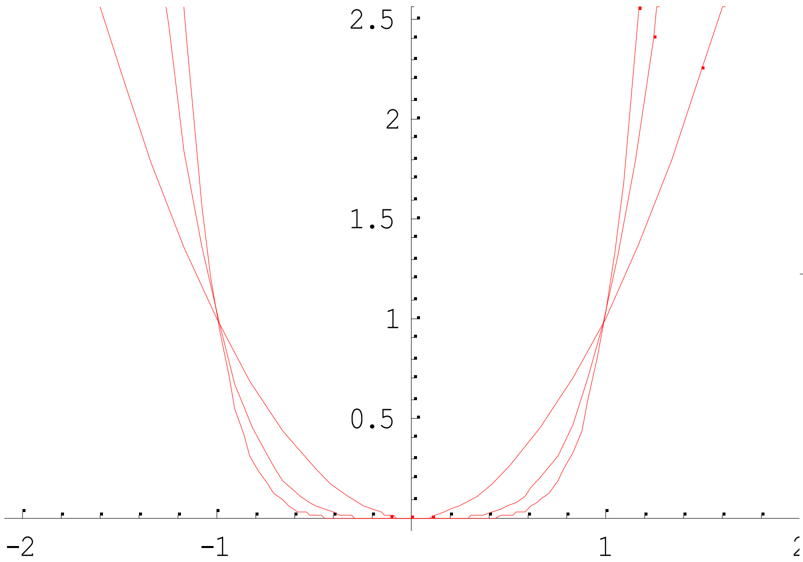
- Polynomická funkcia n- tého stupňa:

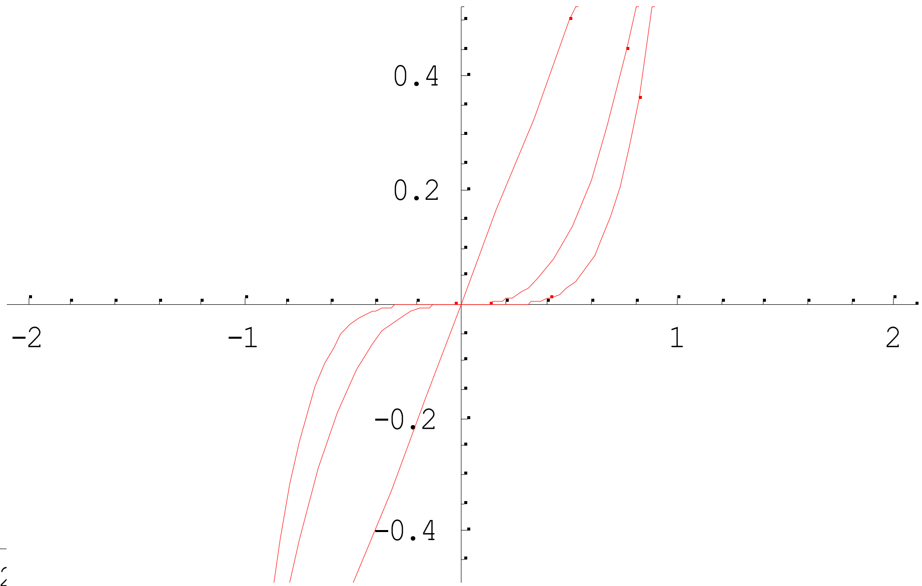
$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

$$a_i \; i = 0,\ldots n \text{ sú konštanty}$$



Elementárne funkcie - vyššie polynomické funkcie





Párna mocnina

Párna funkcia: f(x) = f(-x)

Nepárna mocnina

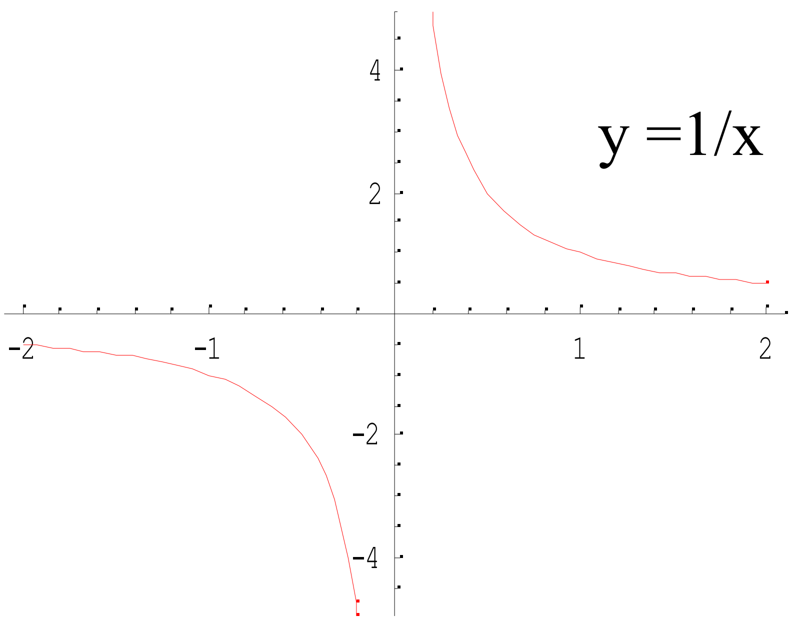
Nepárna funkcia: f(x) = - f(-x)

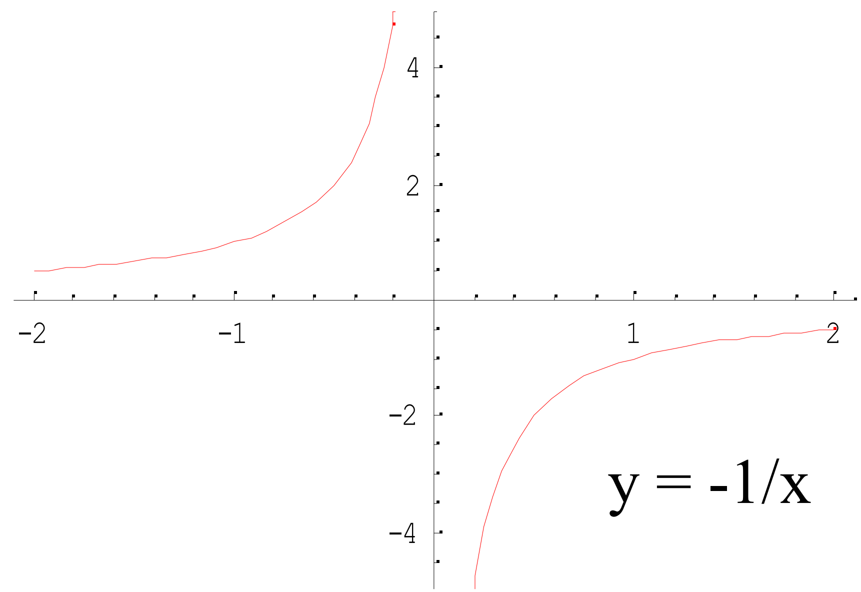
Elementárne funkcie

- Lineárna lomená funkcia

  D(f)= { x ϵ R, cx+d ≠ 0}

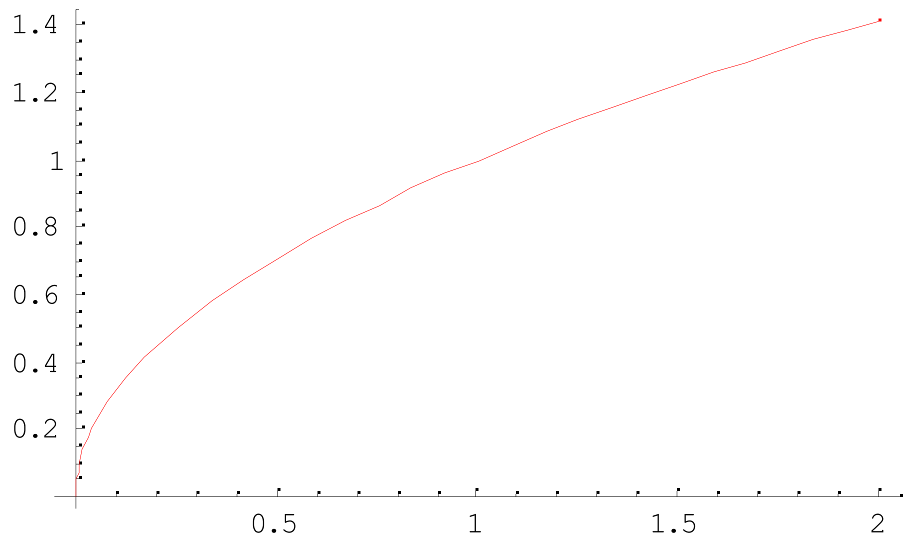
$$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$





Elementárne funkcie mocniny s racionálnym exponentom

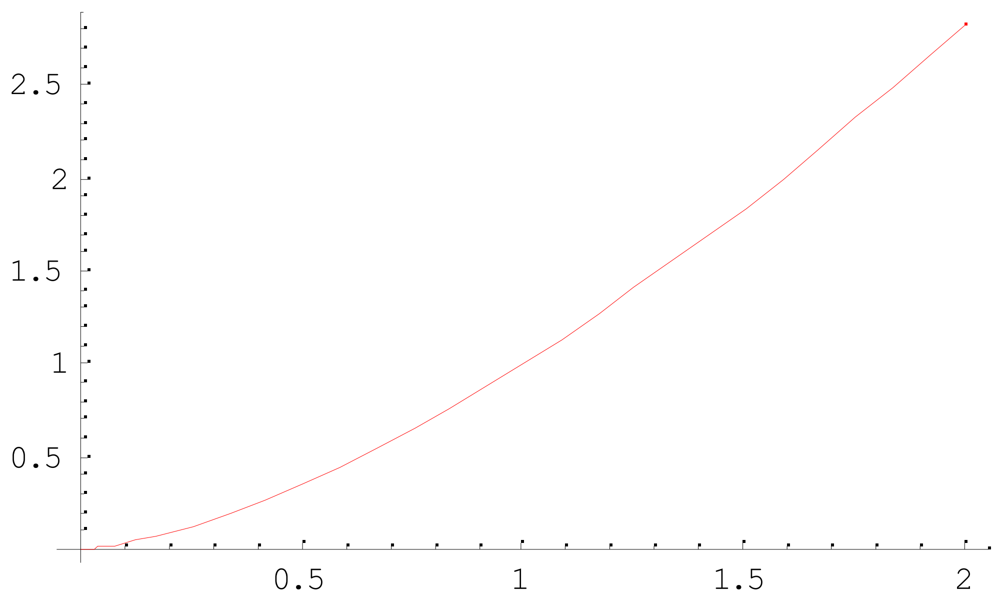
- Odmocninová funkcia $y = x^{1/2}$



Elementárne funkcie mocniny s racionálnym exponentom

- Funkcie s mocninou vyššou ako 1

$$y = x^{3/2}$$



Funkcie s absolútnou hodnotou

- Absolútna hodnota reálneho čísla x:

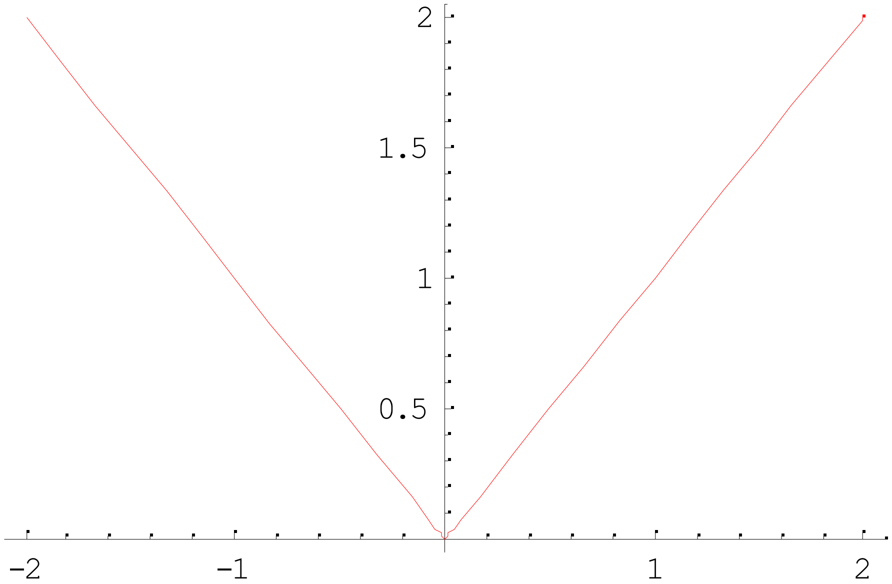
$$|x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

- Pre všetky reálne čísla platí:

$$\sqrt{x^2} = |x| \qquad |-x| = |x|$$

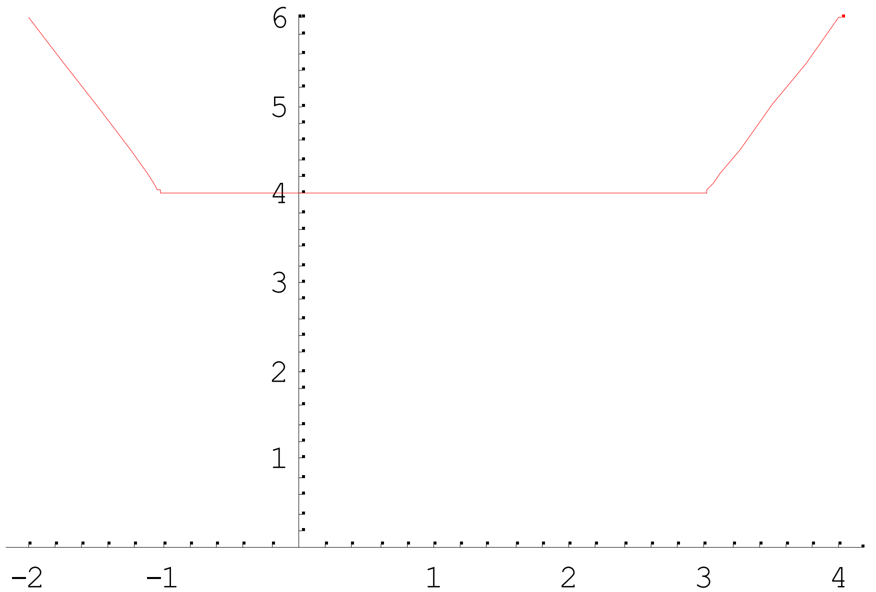
$$|x + y| \leq |x| + |y|$$ trojuholníková nerovnosť

Funkcie s absolútnou hodnotou



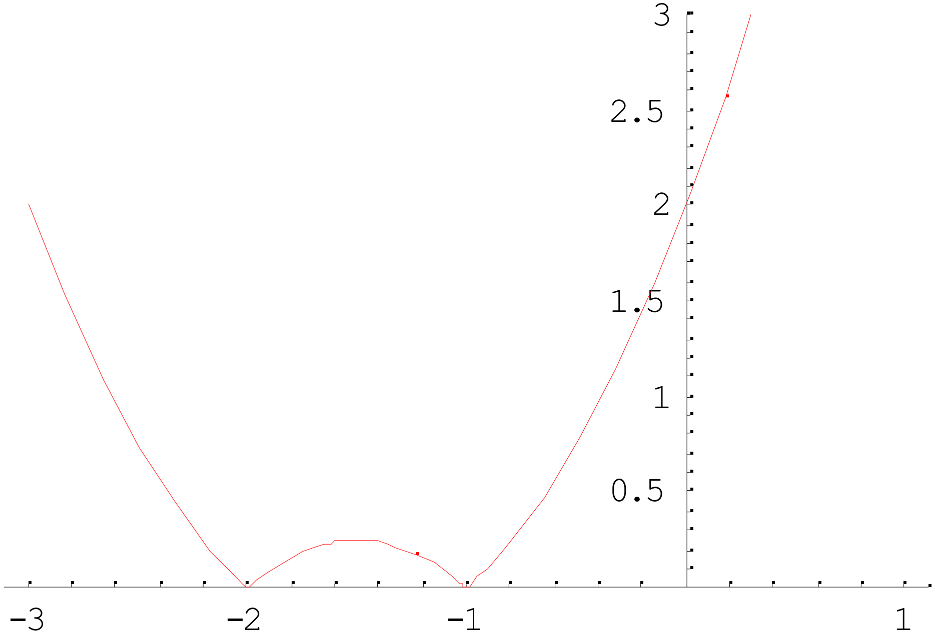
y= |x|

Funkcie s absolútnou hodnotou



$y = |x+1|+|x-3|$

Funkcie s absolútnou hodnotou



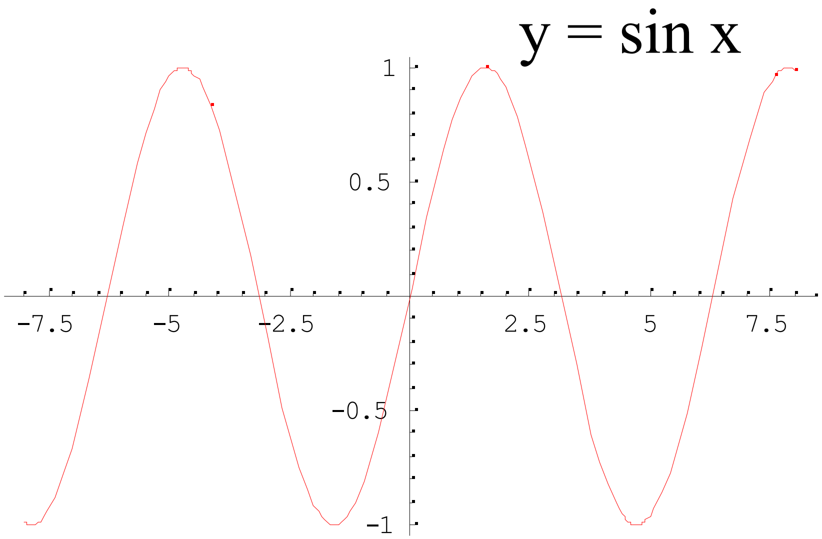
$y = |x^2 + 3x + 2|$

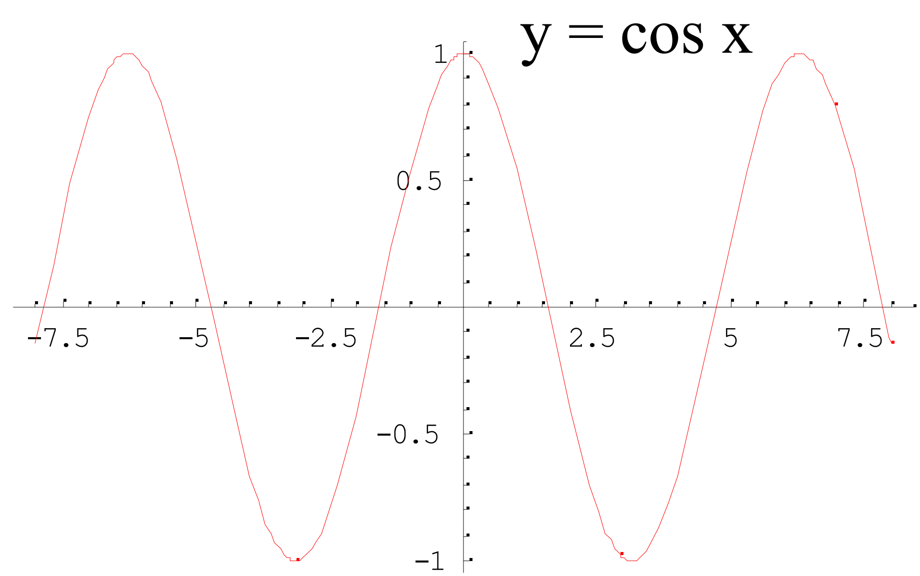
Elementárne funkcie – trigonometrické funkcie

- y = sin x nepárna, periodická T = 2π, ohraničená
- y = cos x párna, periodická T = 2π, ohraničená
- y = tg x (tan x) nepárna, periodická T = π D(f)={x $\in$ R, x$\neq$ (2k+1)π/2, k$\in$ Z (celé číslo)}
- y = cotg x (cot x) nepárna, periodická T = π D(f)={x $\in$ R, x$\neq$ kπ, k$\in$ Z (celé číslo)}

Periodická funkcia: f je periodická funkcia, ak existuje kladné reálne číslo T také, že pre všetky x $\in$ D(f) platí: f(x+T) = f(x)

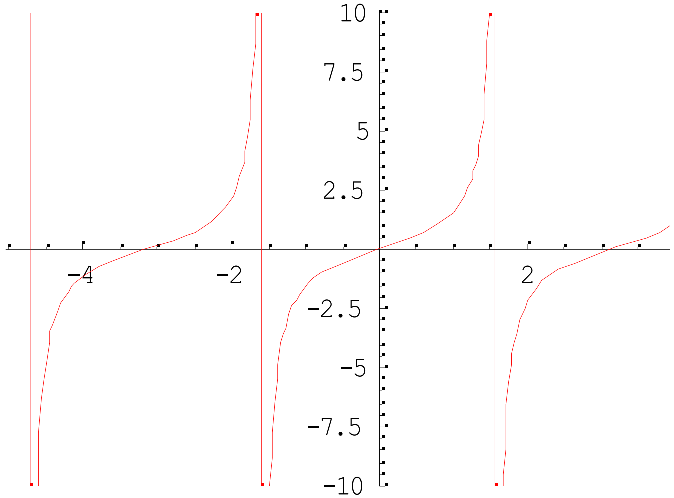
Elementárne funkcie – trigonometrické funkcie



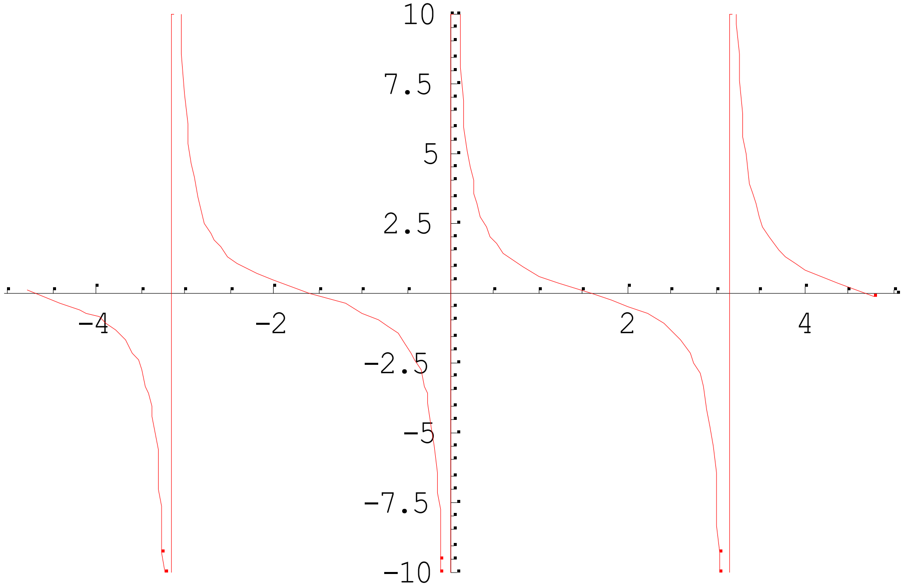


Elementárne funkcie – trigonometrické funkcie

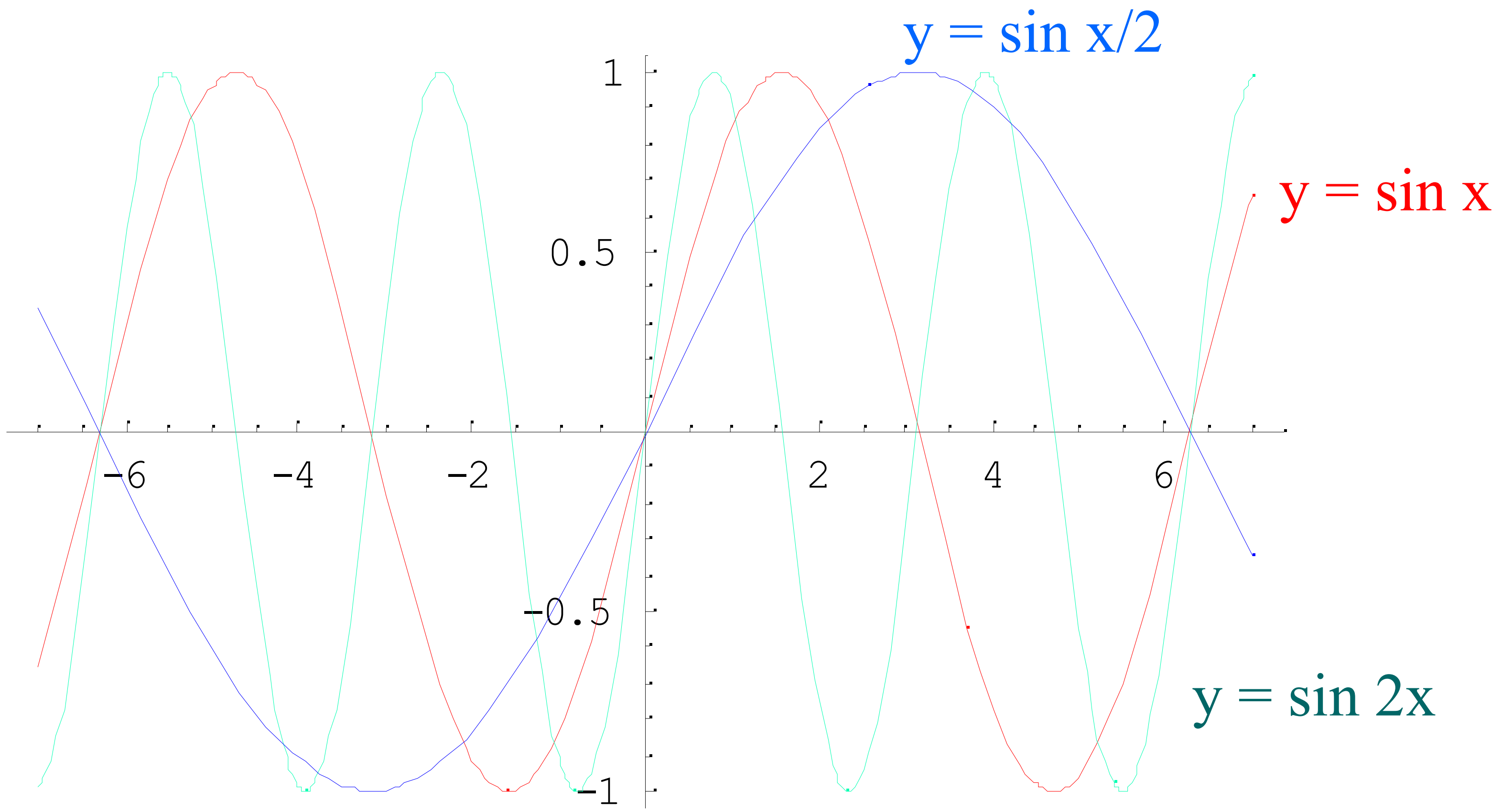
y = tg x



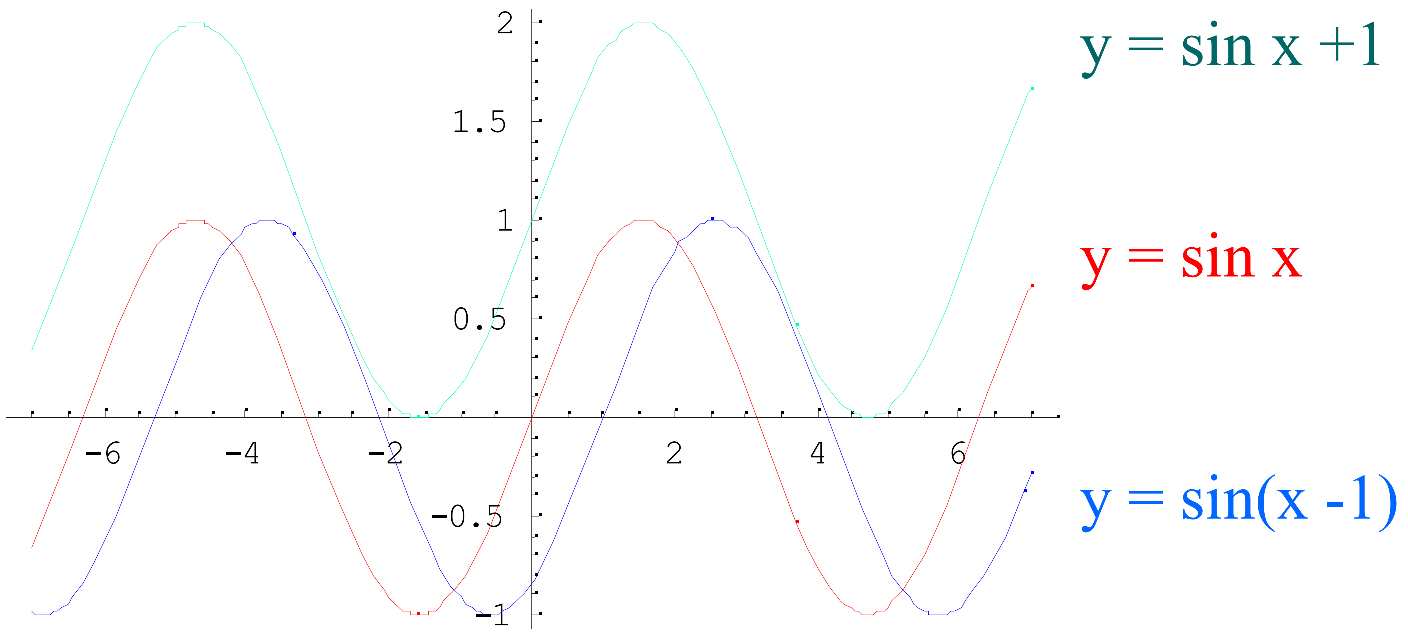
y = cotg x



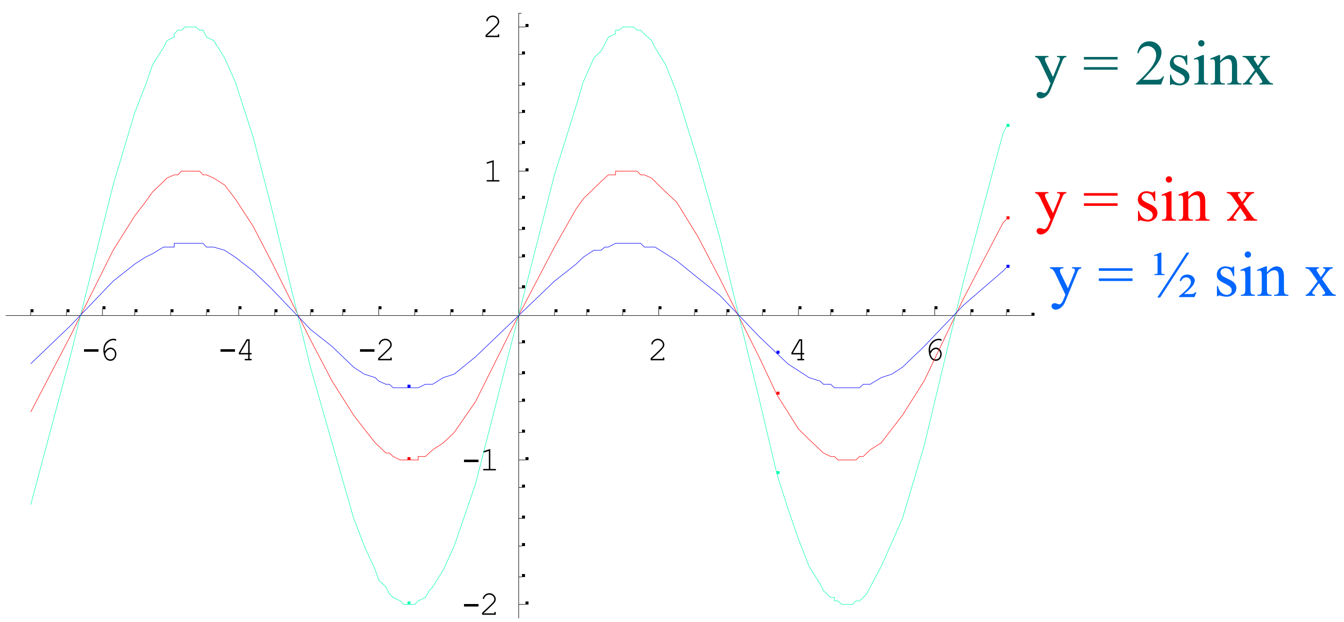
Elementárne funkcie – trigonometrické funkcie



Elementárne funkcie – trigonometrické funkcie

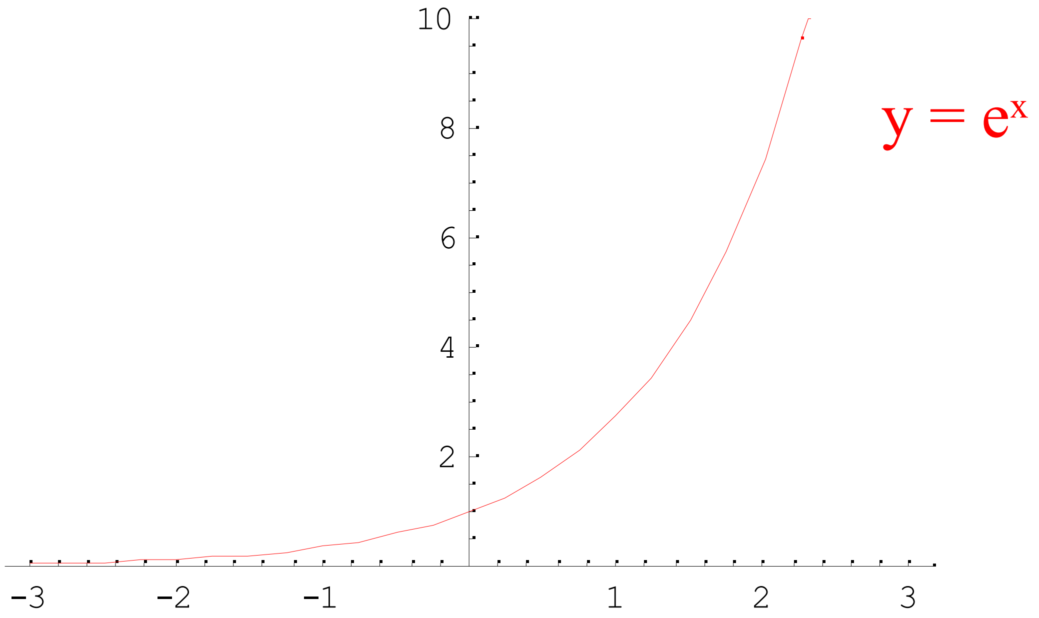


Elementárne funkcie – trigonometrické funkcie



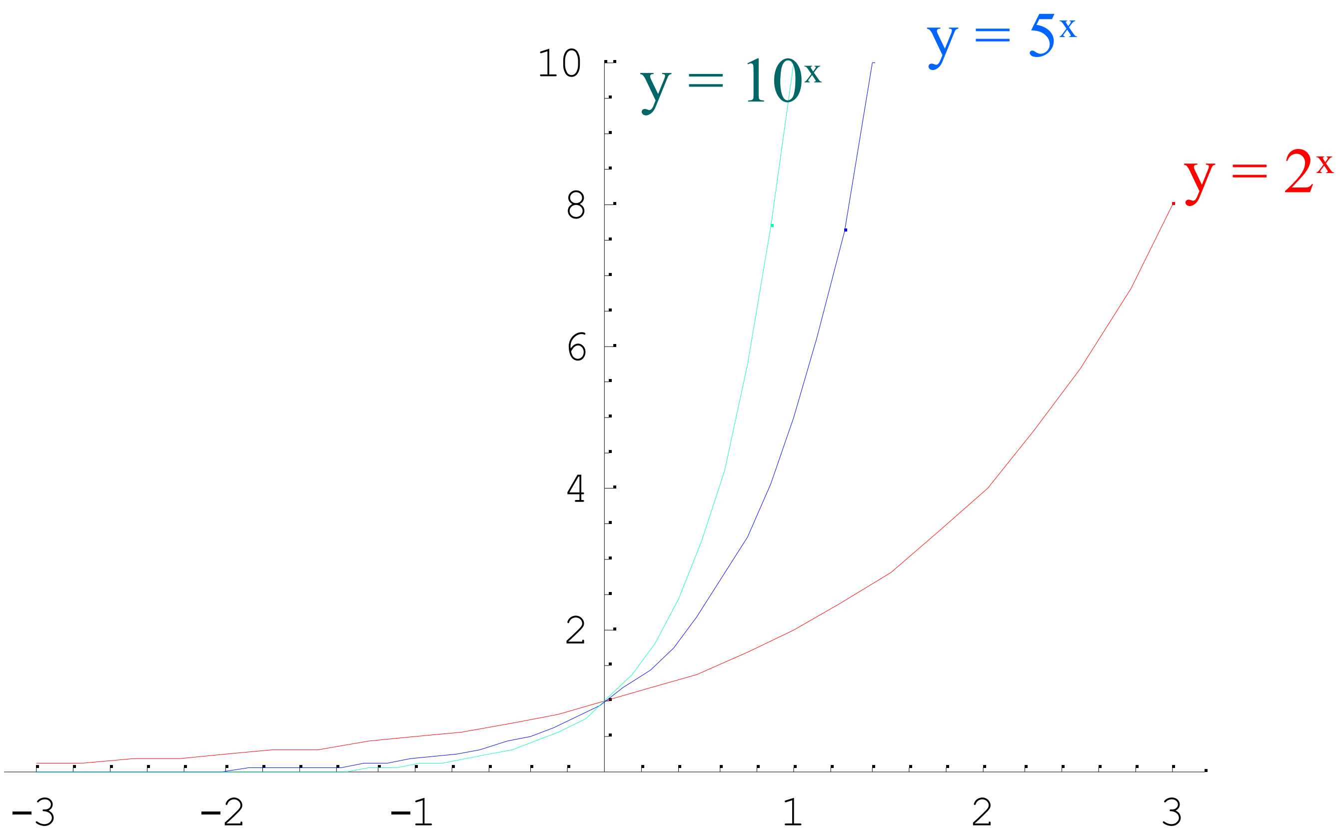
Elementárne funkcie

- Exponenciálna funkcia: $y = a^x$ $a>0, a\neq 1$

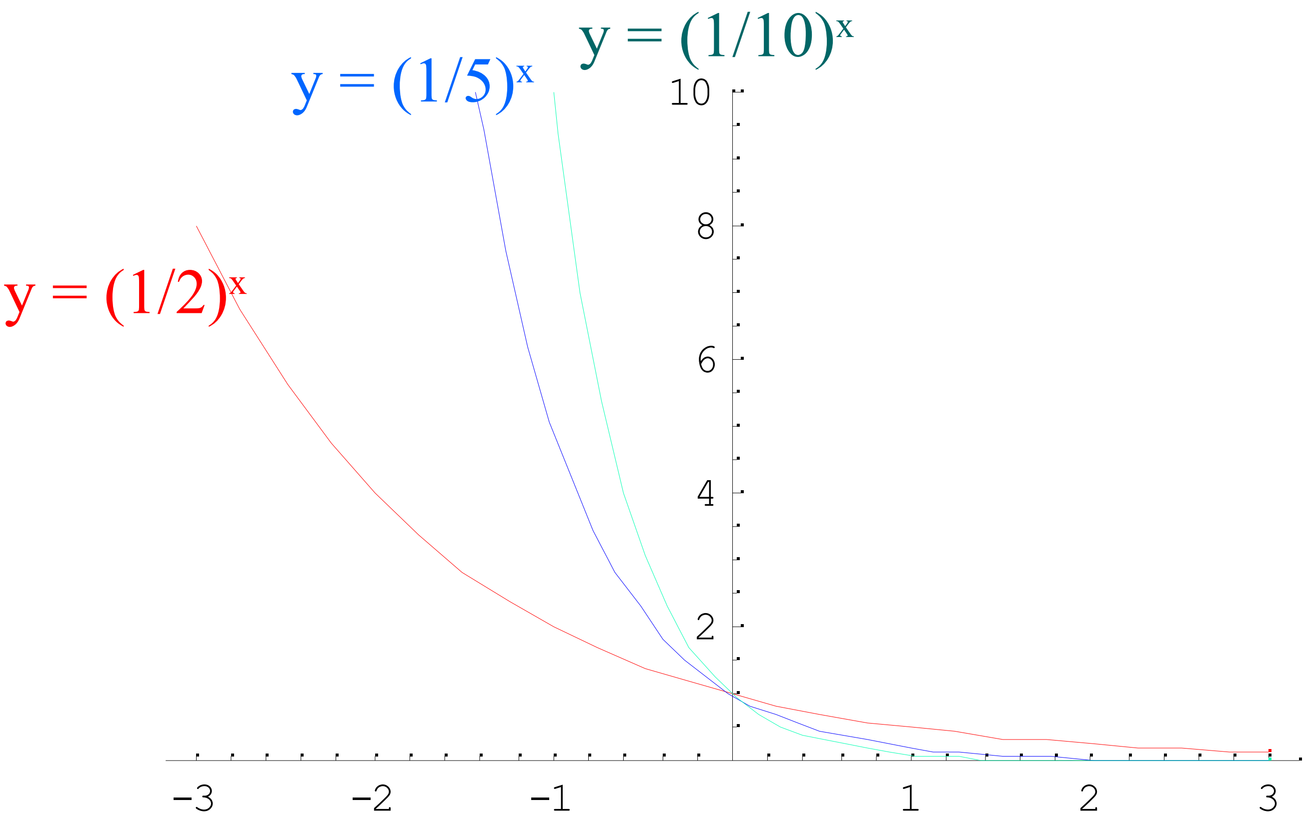


e - Eulerovo číslo 2.71828

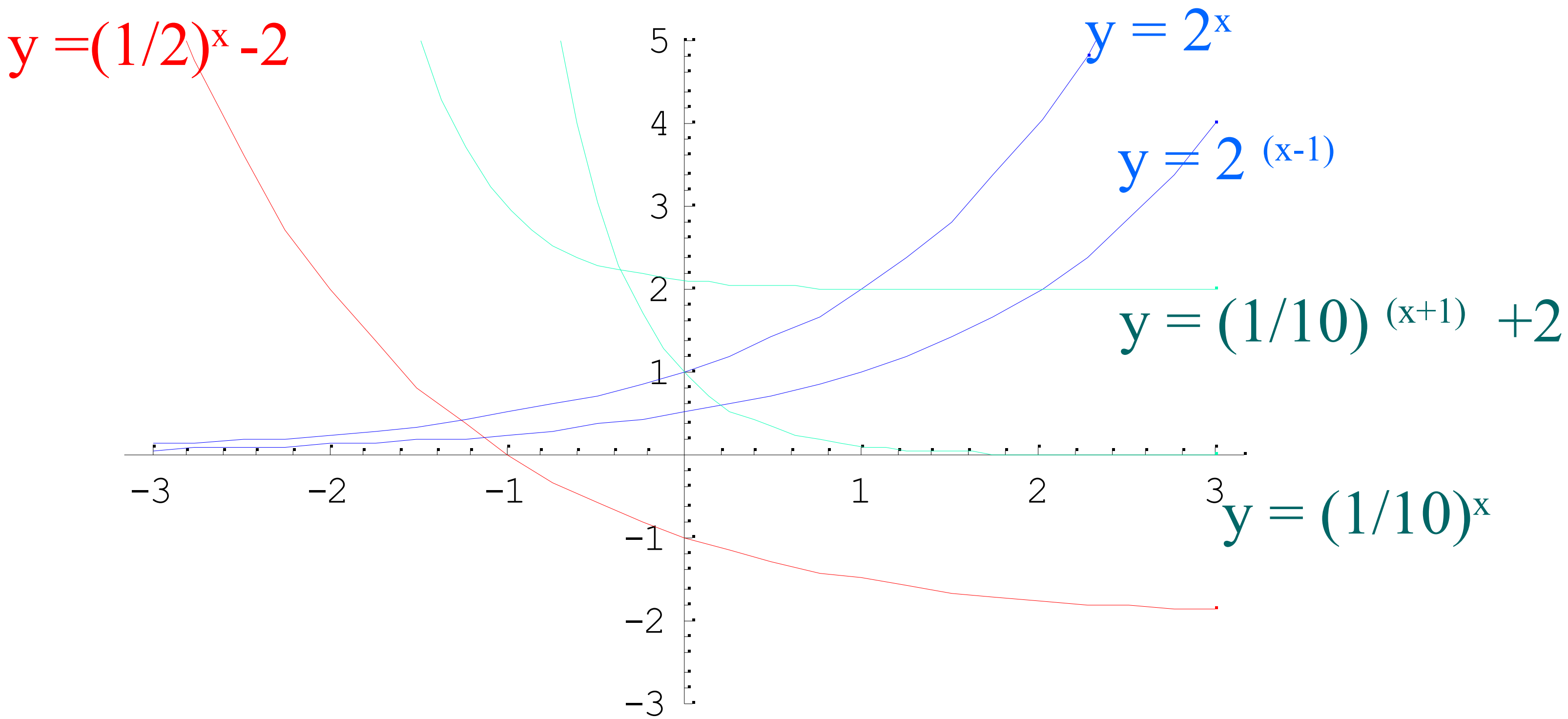
Exponenciálne funkcie so základom väčším ako 1



Exponenciálne funkcie so základom menším ako 1



Rôzne exponenciálne funkcie



D(f) = R, obor hodnôt ohraničený zdola, všetky prosté

Operácie s funkciami

- Sčítanie funkcií: $h(x) = f(x)+g(x)$,
  $D(h) = D(f) \cap D(g)$
- Násobenie funkcií $k(x) = f(x).g(x)$, $D(k) = D(f) \cap D(g)$
- Zúženie funkcie f na množinu $M \neq\subset D(f)$ je funkcia $f_{/M}$ taká, že jej definičný obor je množina M a pre každé $x \in M$ platí $f_{/M}(x) = f(x)$
- Skladanie funkcií: $f \circ g(x) = f(g(x))$ pričom
  $D(f \circ g) = D(f) \cap H(g)$

Operácie s funkciami zložená funkcia

- Príklady: $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sqrt{x}$

$f \circ g(x) = \sin \sqrt{x}$ $D(f \circ g) = \langle 0, \infty)$

$g \circ f(x) = \sqrt{\sin x}$ $D(g \circ f) = \cup \langle 2k\pi, 2(k+1)\pi \rangle$
$k \in Z$

Záver: vo všeobecnosti $f \circ g \neq g \circ f$

Inverzná funkcia

- f je prostá funkcia (jedno-jednoznačná), práve vtedy keď, pre každé $x_1, x_2 \in D(f)$ také že $x_1 \neq x_2$ platí $f(x_1) \neq f(x_2)$
- Nech f a g sú funkcie, pre ktoré platí

$$f \circ g(x) = x\,,\ \forall x \in D(g), \quad g \circ f(x) = x\,, \forall x \in D(f)$$

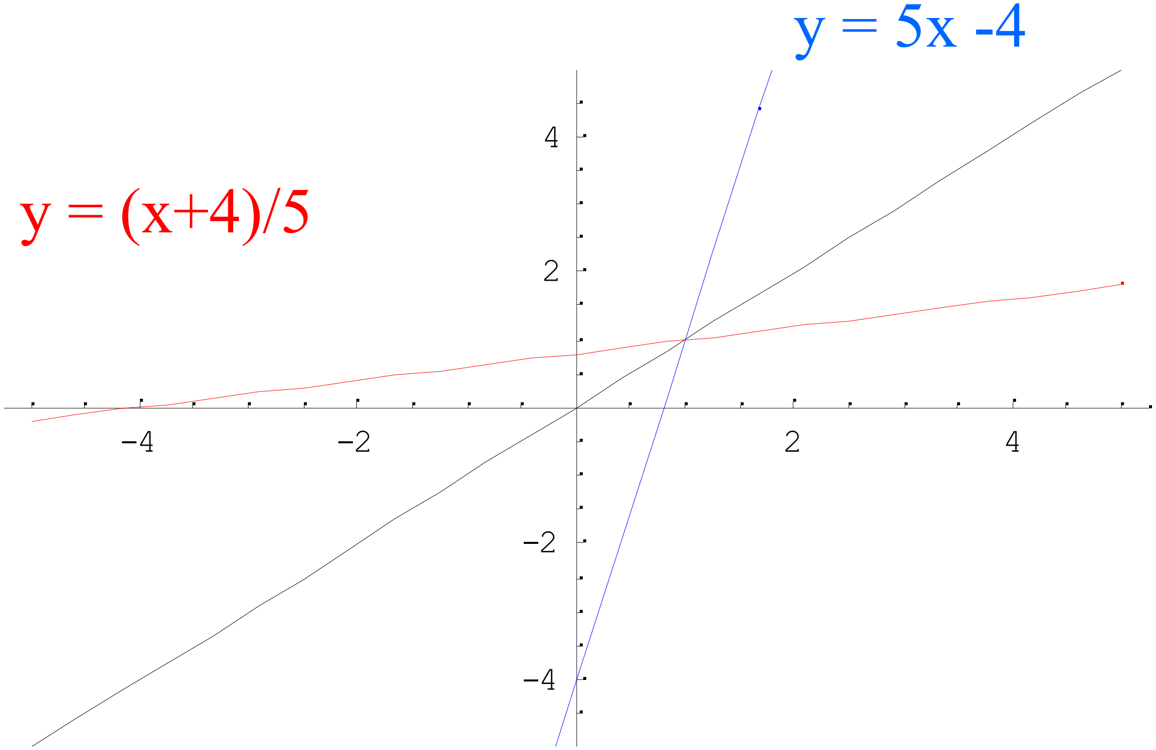
Potom funkcia g je inverzná k funkcii f a označuje sa f^{-1}.
Grafy dvoch navzájom inverzných funkcií sú symetrické podľa osi $y = x$.
Platí: $D(f) = H(f^{-1})$ a $D(f^{-1}) = H(f)$

Inverzná funkcia

- Nie každá funkcia má inverznú funkciu
- Veta: Funkcia má inverznú funkciu vtedy a len vtedy, keď je prostá
- Príklad: f: $y = 5x - 4$ je prostá funkcia (rastúca). Jej inverzná funkcia je

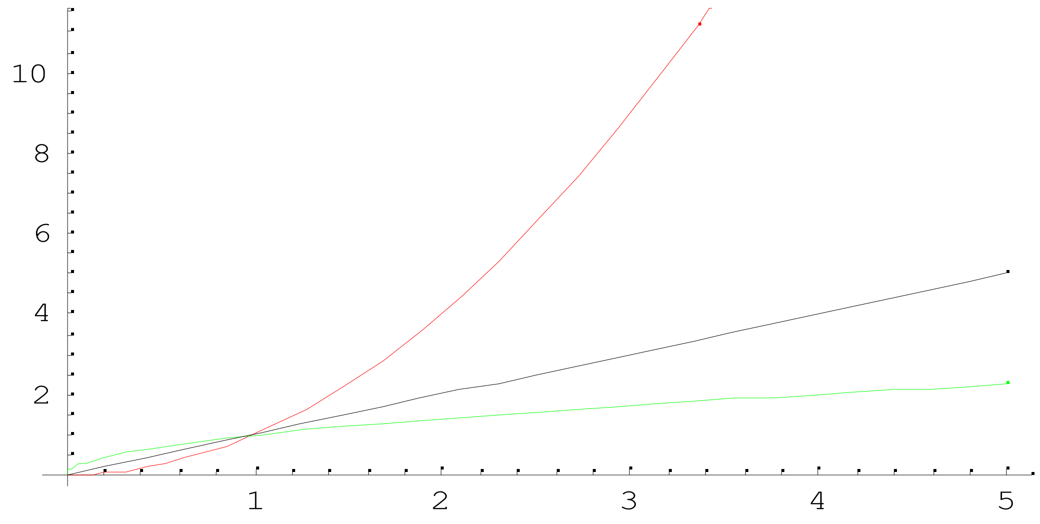
  f^{-1}: $y = (x+4)/5$

Inverzná funkcia



Inverzná funkcia

- Kvadratická funkcia ne definičnom obore nie je prostá, jej zúženie môže byť prostá funkcia
- Príklad: $f_{/<0,\,\infty)}$ $y = x^2$ má inverznú funkciu odmocninu:



Elementárne funkcie

- Logaritmická funkcia $y = \log_a(x)$, $a>0$, $a \neq 1$
- Ak a=e, Eulerovo číslo: $y = \ln(x)$
- Exponenciálna funkcia

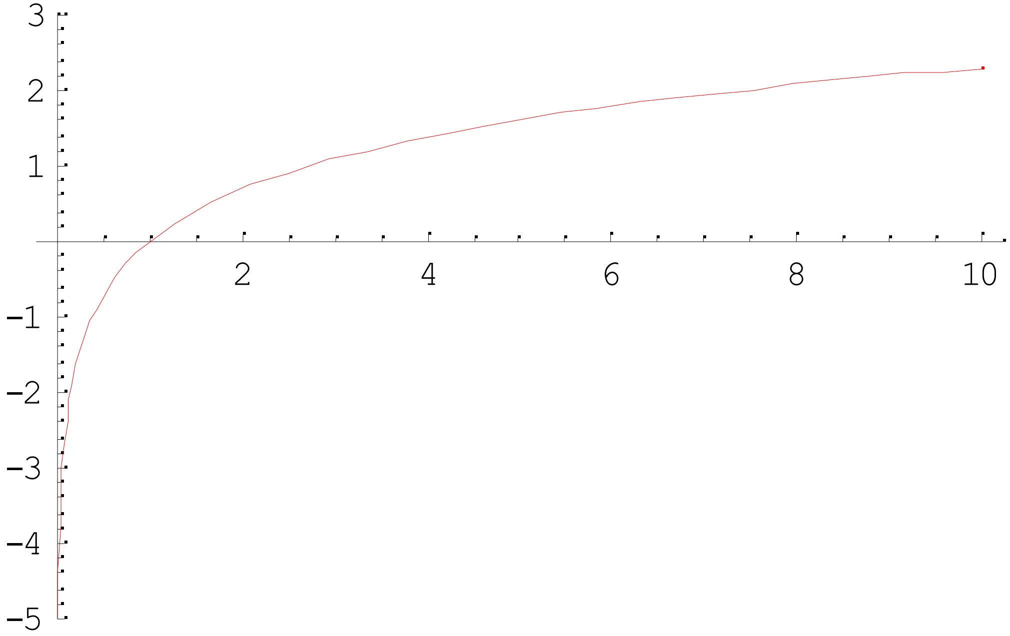
$$y = a^x$$

a logaritmická funkcia

$$y = \log_a(x),$$

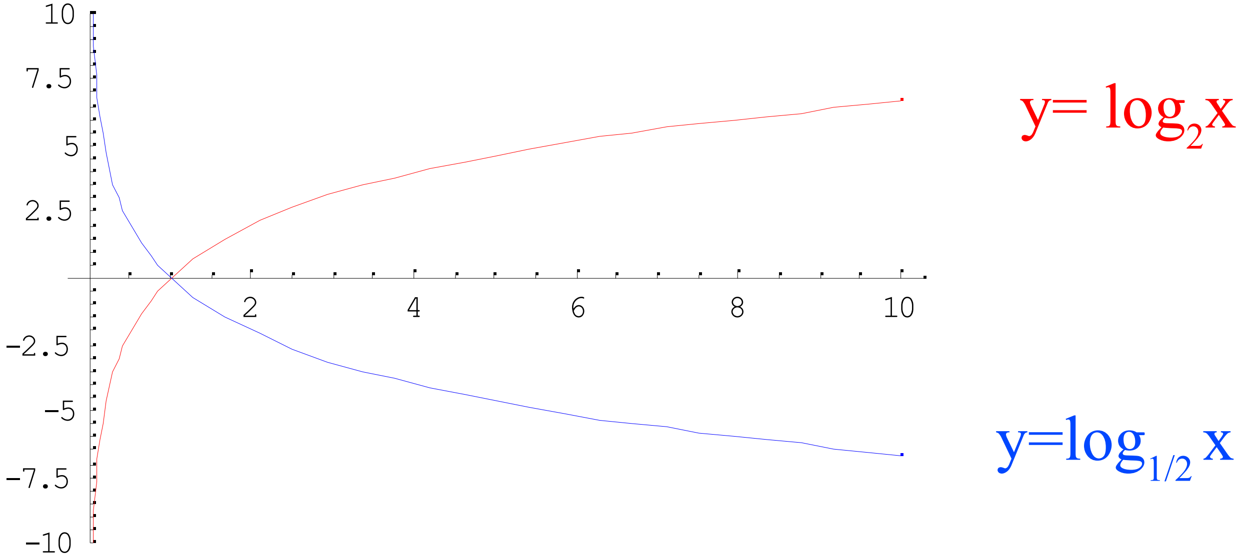
Sú navzájom inverzné

Elementárne funkcie - logaritmická funkcia



$y = \ln x$

Elementárne funkcie - logaritmická funkcia



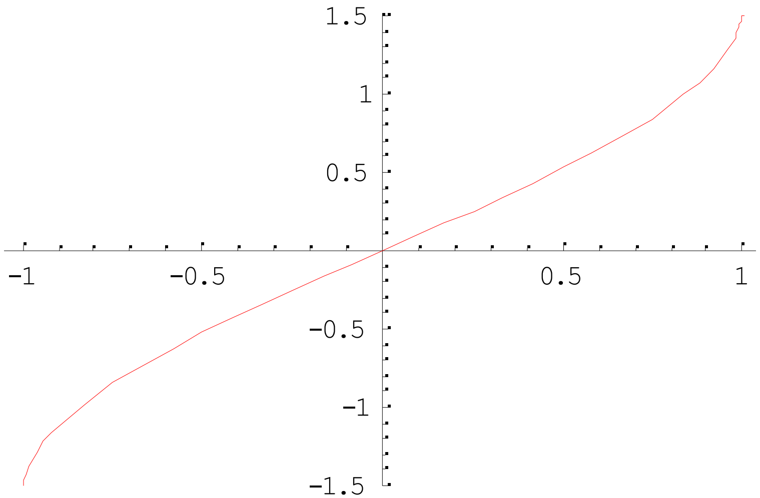
Elementárne funkcie - cyklometrické funkcie

- Inverzná funkcia k funkcii y = $\sin_{/<-\pi/2,\pi/2>}(x)$ je y = arcsin(x)
- Inverzná funkcia k funkcii y = $\cos_{/<0,\pi>}(x)$ je y = arccos(x)
- Inverzná funkcia k funkcii y = $\mathrm{tg}_{/<-\pi/2,\pi/2>}(x)$ je y = arctg(x)
- Inverzná funkcia k funkcii y = $\mathrm{cotg}_{/<0,\pi>}(x)$ je y = arccotg(x)

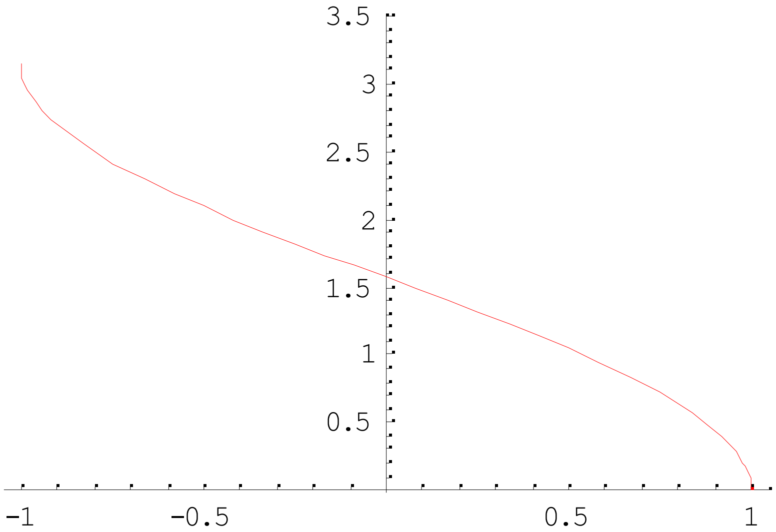
Cyklometrické funkcie

- $\sin_{/<-\pi/2,\pi/2>}$: $<-\pi/2, \pi/2> \rightarrow <-1,1>$
- arcsin : $<-1,1> \rightarrow <-\pi/2, \pi/2>$
- $\cos_{/<0,\pi>}$: $<0, \pi> \rightarrow <-1,1>$
- arccos: $><-1,1> \rightarrow <0, \pi>$
- $tg_{/<-\pi/2,\pi/2>}$: $<-\pi/2, \pi/2> \rightarrow R$
- arctg: $R \rightarrow <-\pi/2, \pi/2>$
- $cotg_{/<0,\pi>}$: $<0, \pi> \rightarrow R$
- arccotg : $R \rightarrow <0, \pi>$

Cyklometrické funkcie

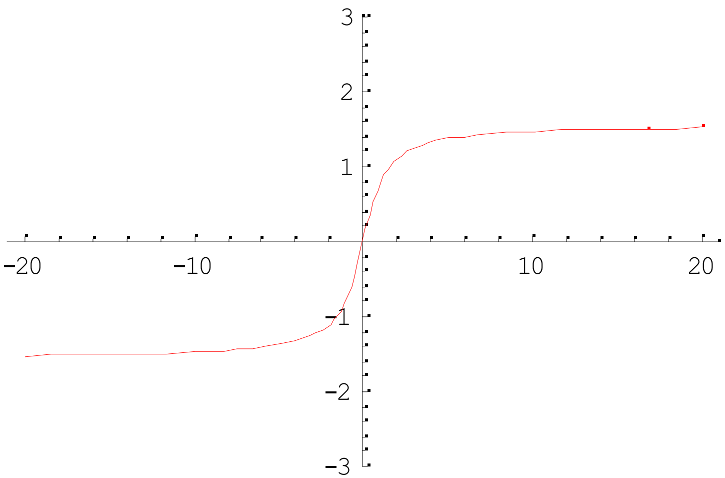


y =arcsin(x)

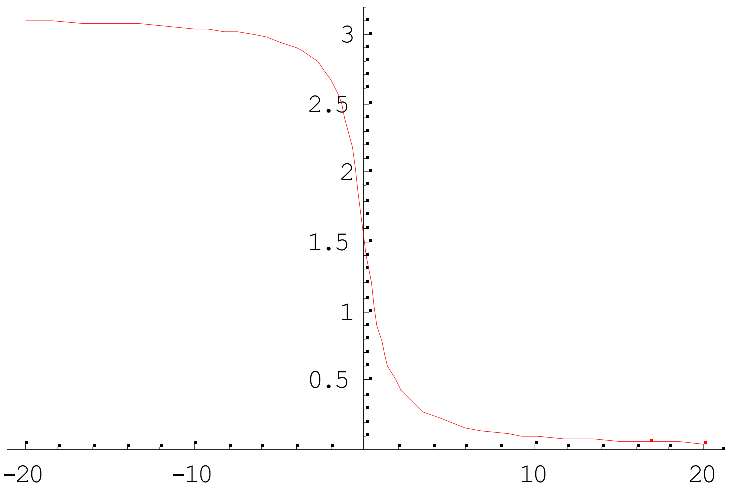


y =arccos (x)

Cyklometrické funkcie



y =arctg (x)



y =arccotg (x)