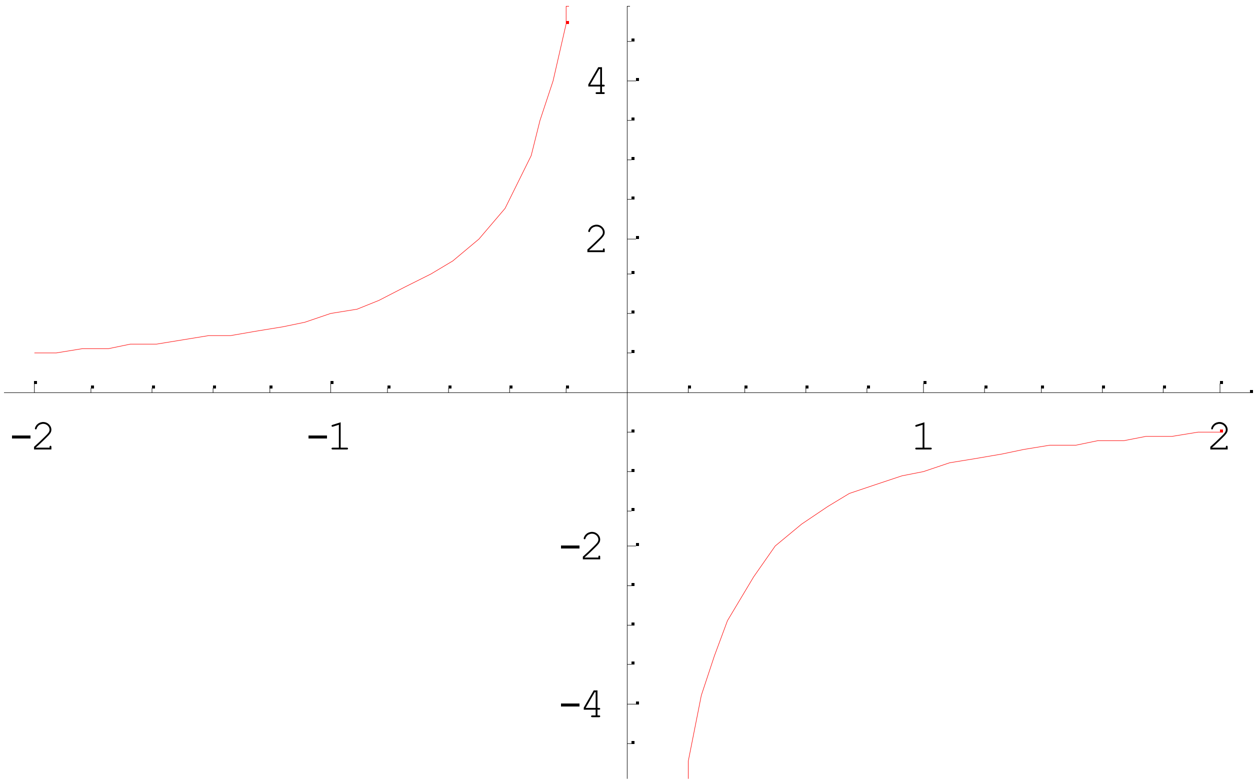
Limita a spojitosť funkcie

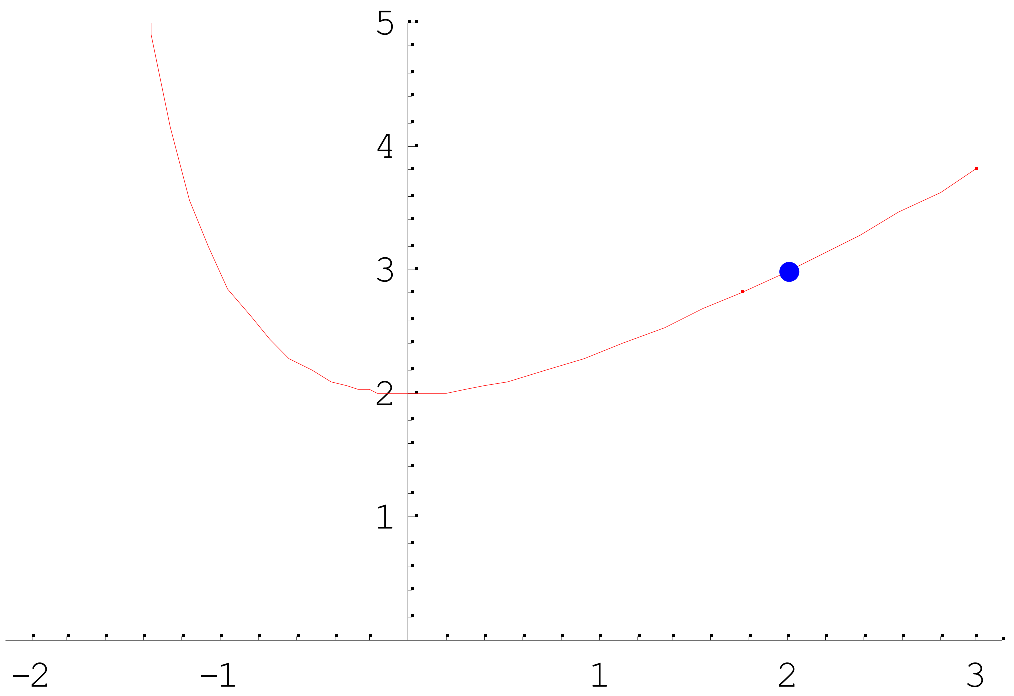
Príklady

- Máme funkciu, ktorá nie je definovaná vo všetkých reálnych číslach, ako môže vyzerať situácia okolo týchto bodov?

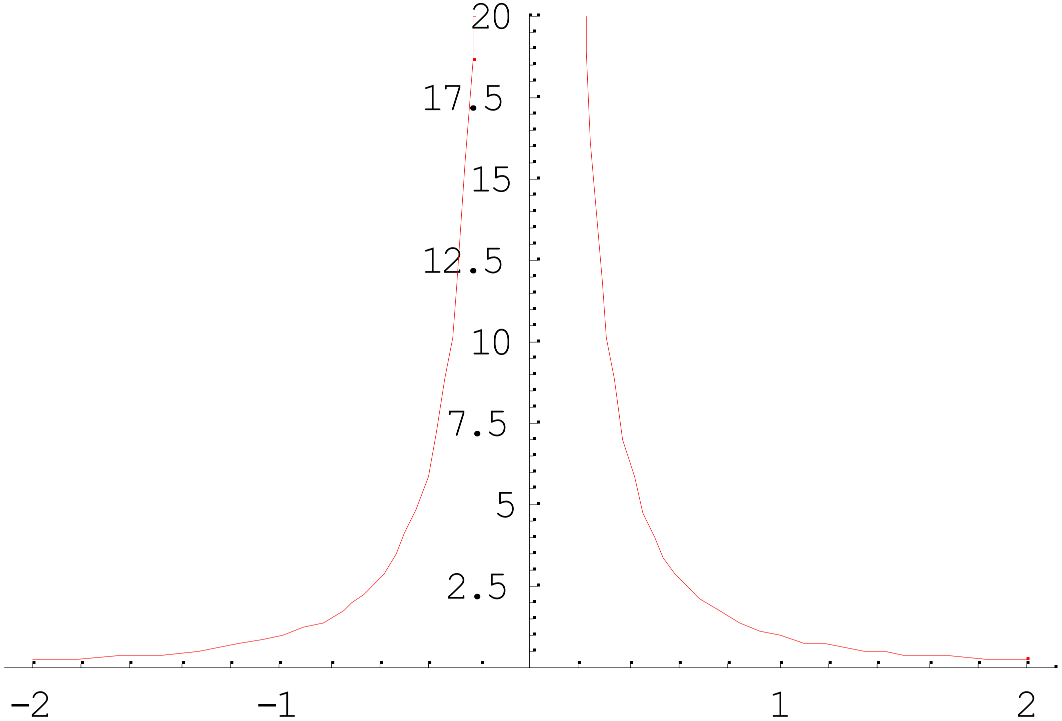
y = -1/x, nie definovaná v bode 0



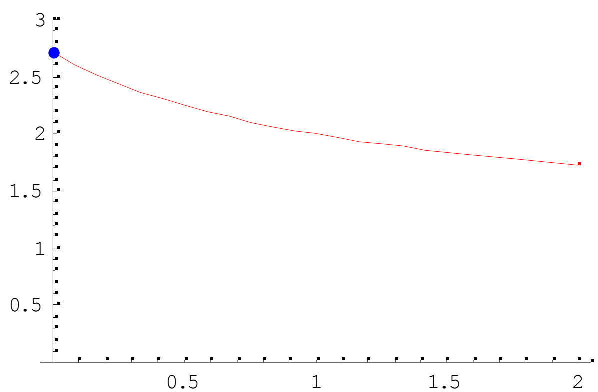
$y = (x^3-8)/(x^2-4)$, nie je definovaná v bode 2



$y = 1/x^2$ nie je definovaná v bode 0



$y = (1+x)^{1/x}$, nie je definovaná v bode 0

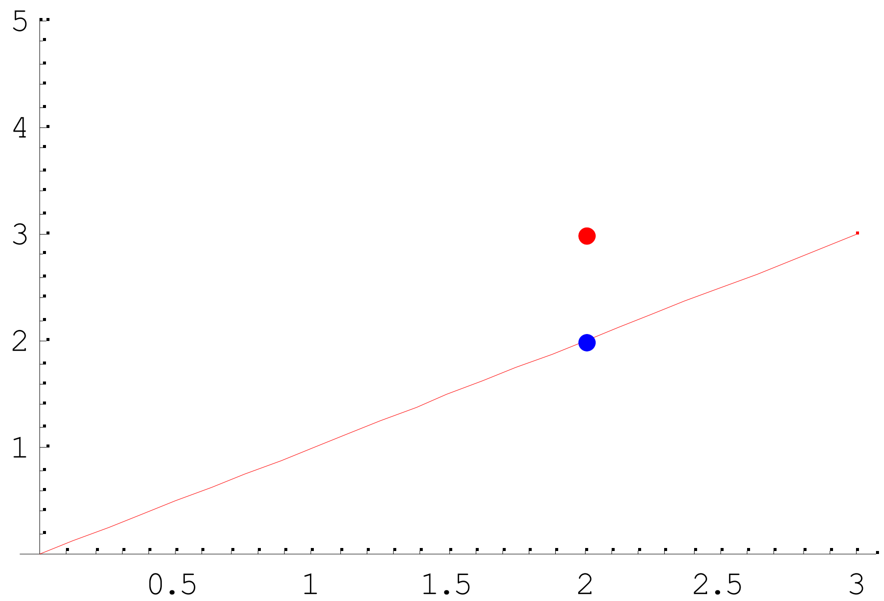



```
In[46]:= Do[Print[x, "      ", (1 + x)^(1  x)],
          {x, 0.1, 0.000000001, -0.01}]

0.1      2.59374
0.09      2.60525
0.08      2.61696
0.07      2.62886
0.06      2.64098
0.05      2.6533
0.04      2.66584
0.03      2.6786
0.02      2.69159
0.01      2.70481
```

Funkcia definovaná predpisom:

$$y = \begin{cases} x, & x \neq 2 \\ 3, & x = 2 \end{cases}$$



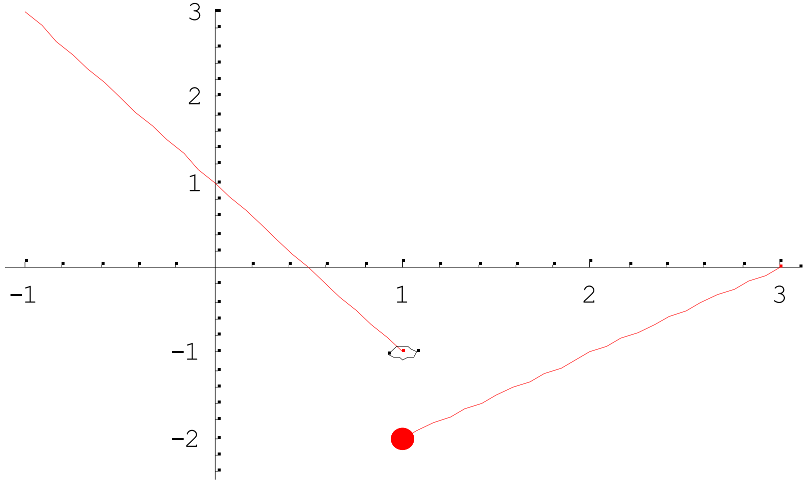
Neformálna definícia limity

- Ak sa hodnoty funkcie f(x) blížia k hodnote L v prípade, že sa hodnoty x blížia k číslu c, hovoríme, že funkcia f má v bode c limitu rovnú L:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

Funkcia definovaná predpisom:

$$f(x)=\begin{cases}1-2x, x<1\\ x-3, x\geq 1\end{cases}$$



Jednostranné limity

$$\lim_{x \to c^+} f(x)$$

Limita sprava

$$\lim_{x \to c^-} f(x)$$

Limita zľava

Pre náš príklad:

$$\lim_{x \to 1^-} 1 - 2x = -1$$

$$\lim_{x \to 1^+} x - 3 = -2$$

Veta:

- Funkcia f má v bode c limitu práve vtedy keď

existujú limita sprava aj limita zľava a rovnajú sa.

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c} f(x) = L$$

Príklady

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

Existujú nevlastné jednostranné limity, ale sú rôzne

Neexistuje obojstranná limita

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$$

Príklady

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Existuje nevlastná limita
(vo vlastnom bode)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Existuje vlastná limita
v nevlastnom bode

Veta: Vlastnosti limít

Ak existujú vlastné limity

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \quad \text{a} \quad \lim_{x\to c} g(x) = K$$

Potom platí:

$$\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) = L + K$$

$$\lim_{x\to c}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x) = L - K$$

$$\lim_{x\to c}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x) = L \cdot K$$

Veta: Vlastnosti limít -pokračovanie

$$\lim_{x \to c}(kf(x)) = k \cdot \lim_{x \to c} f(x) = k \cdot L, \quad k \in R$$

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)} = \frac{L}{K}, \quad K \neq 0$$

Veta: Porovnávanie limít

Nech platí:

$$g(x) \le f(x) \le h(x)$$ pre všetky

$x \neq c$ v nejakom otvorenom intervale okolo bodu c.

Nech platí $$\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$$

Potom platí $$\lim_{x\to c} f(x) = L$$

Veta: Vlastnosti limít

Ak $\lim_{x \to c} f(x) = 0$

a funkcia g je ohraničená v okolí bodu c, tak

$$\lim_{x \to c} (f \cdot g)(x) = 0$$

Dôležité limity

$$\lim_{x\to\infty} x^a = 0, \quad ak \quad a < 0$$

$$\lim_{x\to\infty} x^a = \infty, \quad ak \quad a > 0$$

$$\lim_{x\to\infty} a^x = 0, \quad ak \quad 0 < a < 1$$

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \infty, \quad ak \quad a > 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log_a(x)}{x} = 0, \quad a > 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x\to\infty} (1+\frac{1}{x})^x = e$$

Spojitosť funkcie

Nech bod c je vnútorným bodom definičného oboru funkcie f. Hovoríme, že funkcia je spojitá v bode c, práve vtedy, keď platí:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

Nech bod c je ľavý (pravý) koncový bod definičného oboru funkcie f. Hovoríme, že funkcia je spojitá v bode c, práve vtedy, keď platí:

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$$

c je ľavý koncový bod

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$$

c je pravý koncový bod

Spojitosť funkcie - pokračovanie

Funkcia je spojitá na množine M, ak je spojitá

v každom bode množiny M.

Príklady: Polynomické funkcie sú spojité na

celom R.

Funkcia 1/x je na definičnom obore spojitá, v

bode 0, ktorý nie je bod definičného oboru je

nespojitá

Veta: Vlastnosti spojitých funkcií

1. Ak sú funkcie f a g spojité v bode c, potom aj súčet, rozdiel, súčin a podiel (za predpokladu, že $g(c) \neq 0$) týchto funkcií je spojitá funkcia
2. Zúženie spojitej funkcie je spojitá funkcia
3. Ak funkcia f je spojitá v bode c a funkcia g je spojitá v bode f(c), potom aj $g \circ f$ je spojitá v bode c.
4. Ak je prostá funkcia spojitá v bode c, potom aj k nej inverzná funkcia je spojitá v bode c.

Asymptoty grafu funkcie

Zaujíma nás, ako sa graf funkcie správa, ked sa premenná vzďaluje do nekonečna, prípadne v bodoch, ktoré nie sú v definičnom obore.

Body grafu sa môžu približovať k nejakej priamke. Takúto priamku voláme asymptota.

Asymptota bez smernice je priamka x=b, taká,že

$$\lim_{x\to b^{\pm}} f(x) = \pm\infty$$

Asymptoty grafu funkcie

Asymptota so smernicou je priamka y = kx +q, kde

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad q = \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - kx \right)$$

Okolie bodu

Definícia: Nech a, $\delta>0$ sú ľubovoľné reálne čísla. Interval $(a-\delta, a+\delta)$ budeme nazývať okolím (δ-okolím) bodu a. Označenie $O_\delta(a)$.

Interval $(a-\delta, a\rangle$ nazývame ľavým okolím bodu a

Interval $\langle a, a+\delta)$ nazývame pravým okolím bodu a

Interval (N, ∞) pre ľubovoľné reálne číslo N nazývame okolie bodu ∞

Interval $(-\infty, N)$ pre ľubovoľné reálne číslo N nazývame okolie bodu $-\infty$

Okolie bodu

Interval $(a-\delta, a+\delta)$ je množina takých x, pre ktoré platí:

$$|x-a| < \delta$$

Definícia limity

Nech je funkcia definovaná v okolí bodu a pričom v tomto samotnom bode nemusí byť definovaná. Hovoríme, že funkcia f má v bode a limitu L práve vtedy, keď platí:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0; \ \ \forall x \in D(f); \ \ |x - a| < \delta \ \ \Rightarrow \ \ |f(x) - L| < \varepsilon$$