Aplikácie derivácií v praktických príkladoch

Rýchlosť zmeny

Príklad (Odčerpávanie vody z nádrže):

Máme valcovú nádrž s vodou. Akou rýchlosťou sa bude meniť výška hladiny vody v nádrži, ak z nádrže odčerpávame vodu rýchlosťou 3000 litrov za minútu?

Riešenie:

Popis veličín:

t –čas (minúty)

valcová nádrž s polomerom r (konštanta) (metre)

výška hladiny vody h(t) (funkcia času) (metre)

objem vody v nádrži: $V(t) = \pi r^2 h$ (metre kubické)

$$V(t) = 1000\, \pi r^2 h \text{ (litre)}$$

Rýchlosť zmeny odčerpávanie vody z nádrže - pokračovanie

Zo zadania úlohy vieme: $\dfrac{dV}{dt} = -3000$

Úloha: Najsť $\dfrac{dh}{dt}$

Predpoklad: V aj h sú diferencovateľné funkcie $\dfrac{dV}{dt} = 1000\pi r^2 \dfrac{dh}{dt}$

Z toho: $\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{dV}{dt}\dfrac{1}{1000\pi r^2} = \dfrac{-3000}{1000\pi r^2} = \dfrac{-3}{\pi r^2}$

Záver: hladina klesá rýchlosťou $\dfrac{3}{\pi r^2}$ metrov za minútu

Rýchlosť zmeny

Príklad: (Letiaci balón)

Balón s horúcim vzduchom sa dvíha kolmo nahor.

Pozoruje ho diaľkomer umiestnený 500 metrov od

miesta vypustenia balóna. V istom čase je

elevačný uhol diaľkomera rovný $\pi/4$. Tento uhol sa

zvyšuje rýchlosťou 0.14 radiánov za minútu. Akou

rýchlosťou sa dvíha balón v tomto čase?

Rýchlosť zmeny – letiaci balón - pokračovanie

Riešenie: t – čas (minúty)

θ(t) – elevačný uhol (radiány)

y(t) - výška balóna (metre)

Predpoklad: funkcie θ(t) a y(t) sú diferencovateľné.

Zo zadania vieme: vzdialenosť diaľkomera od miesta vypustenia balóna ...500 metrov

Rýchlosť zmeny uhla...

$$\frac{d\theta}{dt} = 0.14$$ pre θ = π/4

Úloha: určiť $$\frac{dy}{dt}$$ pre dané hodnoty θ a dθ/dt

Rýchlosť zmeny – letiaci balón - pokračovanie

Z geometrie situácie platí:

$$y = 500\tan\theta$$

alebo

$$\frac{y}{500} = \tan\theta$$

A teda

$$\frac{dy}{dt} = \frac{500}{\cos^2\theta}\frac{d\theta}{dt} = 500(\sqrt{2})^2 0.14 = 140$$ metrov za min.

Záver: v uvedenom čase sa balón dvíha rýchlosťou 140 metrov za minútu.

Rýchlosť zmeny

Príklad: (sledovanie kolóny)

Kolóna A sa približuje z východu k skladišťu rýchlosťou 60 km za hodinu, kolóna B sa od skladišťa vzďaľuje smerom na sever rýchlosťou 50 km za hodinu. Ako rýchlo sa mení vzdialenosť medzi kolónami v čase, keď A je 4 km od skladišťa a B je 3 km od skladišťa?

Rýchlosť zmeny – sledovanie kolóny - pokračovanie

Riešenie:

$x(t)$ - pozícia kolóny A v čase t (kilometre)

$y(t)$ - pozícia kolóny B v čase t (kilometre)

$s(t)$ – vzdialenosť medzi kolónami v čase (km)

Predpoklad: x,y,s sú diferencovateľné funkcie.

Vieme: v určitom čase t platí: $x(t)=4$, $y(t)=3$,

$dx/dt = -60$, $dy/dt=50$

Treba určiť: ds/dt v tomto čase.

Rýchlosť zmeny – sledovanie kolóny - pokračovanie

Platí: $s^2(t) = x^2(t) + y^2(t)$

Nájdeme deriváciu tejto funkcie danej implicitne:

$$2s(t)\frac{ds}{dt} = 2x(t)\frac{dx}{dt} + 2y(t)\frac{dy}{dt}$$

A teda $\frac{ds}{dt} = \frac{1}{s(t)}(x(t)\frac{dx}{dt} + y(t)\frac{dy}{dt})$ $\frac{ds}{dt} = \frac{1}{5}(4(-60) + 3(50)) = -18$

Záver: V tomto čase sa vzdialenosť medzi kolónami zmenšuje rýchlosťou 18 km za hodinu

Úlohy na extrém

Príklad: (Kovovýroba.)

Z kovového plechu tvaru štvorca so stranou dlhou

12 cm treba urobiť krabicu vystrihnutím

štvorcových rohov tak, aby mala čo najväčší

objem.

Riešenie: Nech vystrihnuté štvorcové rohy majú

stranu dlhú x. Objem krabice potom bude

$V(x) = (12-2x)^2\, x.$

Úlohy na extrém – kovovýroba-pokračovanie

Ak má byť jeho objem čo najväčší, hľadáme extrém (maximum) tejto funkcie pre $0 \leq x \leq 6$.

Budeme mať: $\frac{dV}{dx} = 2(12-2x)(-2)x + (12-2x)^2 = 12(2-x)(6-x)$

Stacionárne body:x =2 a x=6

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 12x^3 - 96x + 144$$

$$\frac{d^2V(2)}{dx^2} < 0 \qquad \frac{d^2V(6)}{dx^2} > 0$$

Maximum V(2) = 128

V(0)=0=V(6)

Záver: Maximálny objem krabice bude 128 cm kubických ak výška krabice bude 2 cm.

Úlohy na extrém

Príklad: (Výrobný design). Treba navrhnúť design pre litrovú konzervu na olej valcového tvaru. Aké Rozmery musí mať konzerva, aby výrobok spotreboval najmenej materiálu?

Riešenie: Rozmery, ktoré určujú tvar valcovej konzervy sú polomer podstavy r a výška konzervy

h. Konzerva má mať 1 liter = 1 dm^3 = 1000 cm^3.

Platí: $V = \pi r^2 h = 1000$ (rozmery r a h budú v

Úlohy na extrém – výrobný design -pokračovanie

Z tohto vzťahu môžeme vyjadriť h:

h= $1000/(\pi r^2)$. Ak máme minimalizovať použitý

Materiál, musí byť povrch konzervy minimálny.

Povrch je: $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 2000/r$.

Hľadáme extrém tejto funkcie:

$$\frac{dS}{dr} = 4\pi r - \frac{2000}{r^2}$$

Stacionárny bod:

$$r_0 = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$$

Úlohy na extrém – výrobný design -pokračovanie

$$\frac{d^2S}{dr^2} = 4\pi + \frac{4000}{r^3} \qquad \frac{d^2S(r_0)}{dr^2} > 0$$

Teda minimálna hodnota materiálu bude pre rozmery konzervy:

$$r_0 = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5.42\text{cm} \qquad h_0 = 2r_0 \approx 10.84\text{cm}$$

Úlohy na extrém

Ekonomické aplikácie:

Funkcia nákladov $C(x)$, kde x je počet výrobkov.

$C(x) = C_{var}(x) + C_{fix}(x)$ variabilné a fixné náklady.

$AC(x)$ – priemerné náklady: $AC(x)=C(x)/ x$.

Funkcia príjmov $R(x)$. Ak $p(x)$ je cena výrobku vyjadrená z dopytovej funkcie ako vzťah medzi počtom výrobkov a ich cenou, potom $R(x) = p(x).x$

Zisková funkcia $P(x) = R(x)-C(x)$

Úlohy na extrém – ekonomické aplikácie

Veta:

Maximálny zisk sa dosiahne na takej úrovni produkcie, pri ktorej sa marginálna hodnota príjmov rovná marginálnej hodnote nákladov.

$$R'(x) = C'(x)$$

Úlohy na extrém – ekonomické aplikácie

Príklad: Nech je daná príjmová funkcia

$R(x) = 9x$ a funkcia nákladov

$C(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$. Nájdite hodnotu kedy sa dosiahne maximálny zisk.

Riešenie: $R'(x) = 9$, $C'(x) = 3x^2 - 12x + 15$

$3x^2 - 12x + 15 = 9$ $x_1 = 2+\sqrt{2}$, $x_2 = 2-\sqrt{2}$

$P(x_1) = 9.6568$ $P(x_2) = -1.6568$

Záver: Maximálny zisk sa dosiahne pre hodnotu produkcie 3.41421 a bude 9.6568

Úlohy na extrém – ekonomické aplikácie

Veta: Úroveň produkcie, kde sa dosiahne minimálna hodnota priemerných nákladov je rovná marginálnym nákladom.

$$C'(x) = C(x)/x.$$

Úlohy na extrém – ekonomické aplikácie

Príklad: Predpokladajme, že funkcia nákladov má tvar: $C(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$. Existuje úroveň produkcie, ktorá minimalizuje priemerné náklady?

Riešenie: $C'(x) = 3x^2 – 12x + 15$ a

$$C(x)/x = x^2 - 6x + 15$$

$$3x^2 – 12x + 15 = x^2 - 6x + 15$$

$x_1=0$, $x_2=3$, keďže úroveň produkcie musí byť kladná, minimálne priemerné náklady sa dosiahnu pre úroveň produkcie 3.

Úlohy na extrém

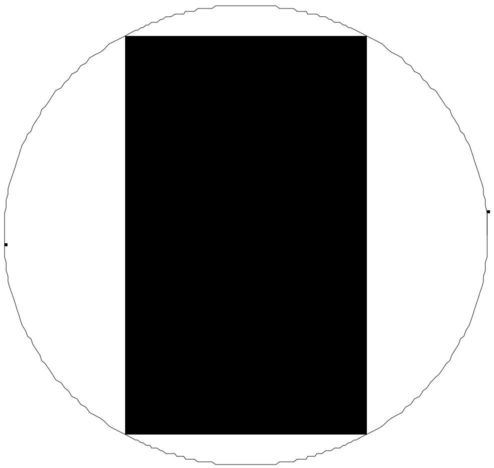
Tuhosť nosníka : Tuhosť S pravouhlého nosníka je úmerná jeho šírke vynásobenej treťou mocninou jeho hrúbky.

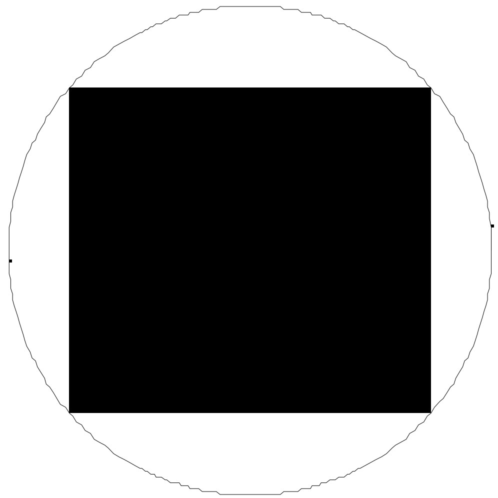
Nájdite rozmery nosníka s maximálnou tuhosťou, ktorý sa dá vyrezať z guľatiny s priemerom 12 palcov.

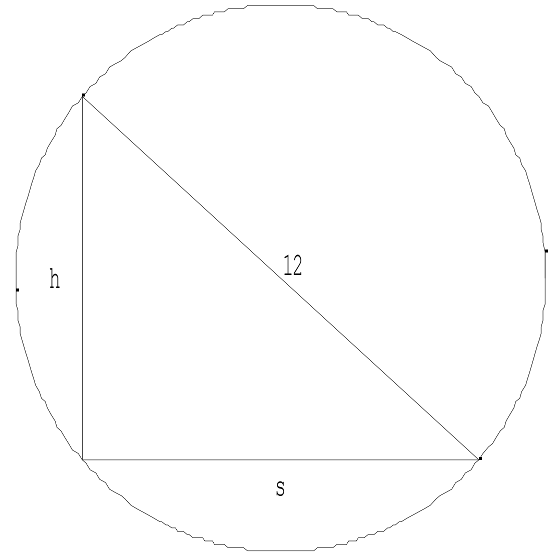
Riešenie: $S= k\ s.h^3$, kde k je konštanta úmernosti, s je šírka nosníka a h jeho hrúbka.

Pre rozmery platí:

Úlohy na extrém – tuhosť nosníka - pokračovanie







$$h^2 + s^2 = 144 \qquad s = \sqrt{144 - h^2}$$

$$S = k\sqrt{144 - h^2}\,h^3$$

Úlohy na extrém – tuhosť nosníka - pokračovanie

$$S' = -\frac{2kh^4}{\sqrt{144-h^2}} + 3k\sqrt{144-h^2}\,h^2 = \frac{-2kh^4 + 3k(144-h^2)h^2}{\sqrt{144-h^2}} =$$

$$\frac{-5kh^4 + 432kh^2}{\sqrt{144-h^2}} = kh^2\,\frac{432-5h^2}{\sqrt{144-h^2}}$$

Stacionárne body: $h_1=0$, $h_2=\sqrt{432/5}=12\sqrt{3/5}$

$$s = \sqrt{144-432/5} = 12\sqrt{2/5}$$