Využitie derivácií

Rovnica dotyčnice a normály ku grafu

Majme funkciu y = f(x) a bod (x_0y_0), kde y_0 =f(x_0).

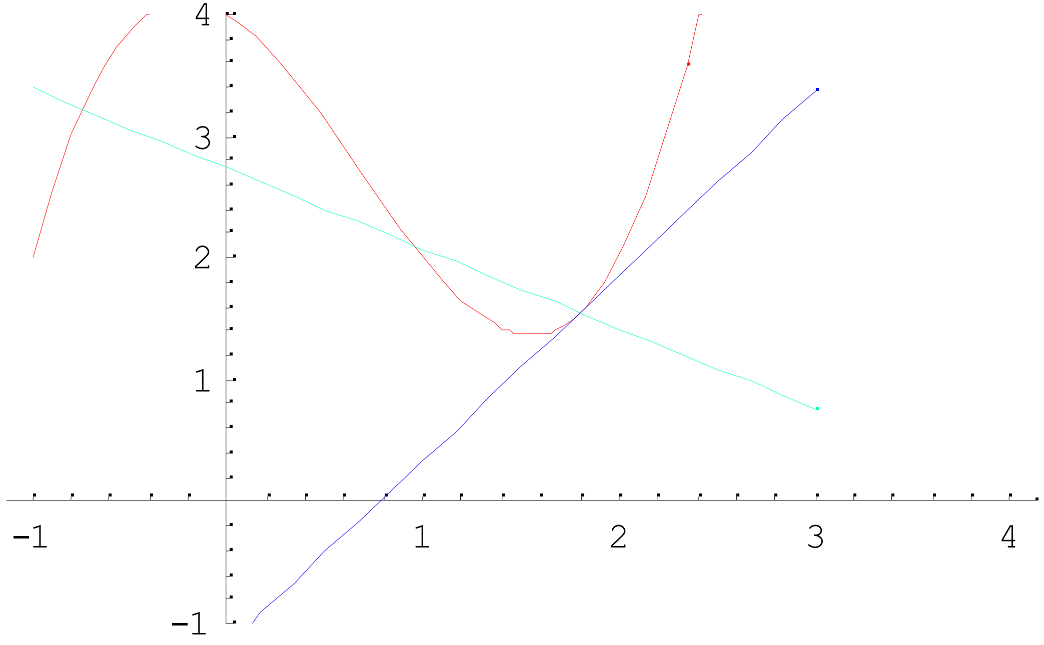
Rovnica dotyčnice v bode (x_0y_0):

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Rovnica normály v bode (x_0y_0):

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Dotyčnica a normála ku grafu

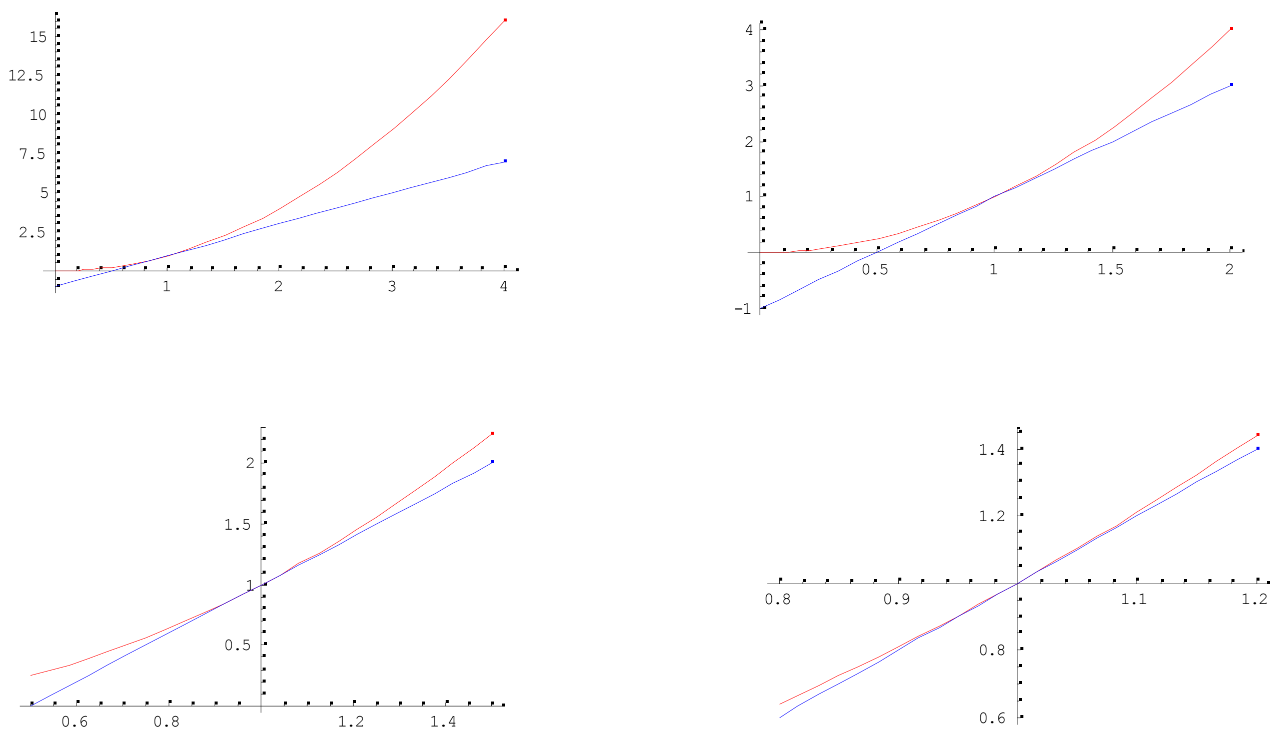


$f(x) = x^3-2x^2 - x + 4$, bod (1.8; 1.552)

t: $y= 1.552+1.52(x-1.8)$

n: $y = 1.552-0.657895(x-1.8)$

Linearizácia



$y = x^2$ $\quad$ $y = 2x-1$ $\quad$ rôzne škály

Linearizácia

Nech je funkcia $y = f(x)$ diferencovateľná v bode a.

Potom

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

je linearizácia funkcie f v bode a

Aproximácia $f(x) \sim L(x)$ je štandartná lineárna aproximácia f v bode a.

Diferencia a diferenciál

Nech x je bod z D(f) a h>0.

Rozdiel $f(x+h) - f(x)$ nazývame diferencia funkcie f pre prírastok h.

Nech f má v bode x deriváciu.

Výraz $f'(x)h$ nazývame diferenciál v bode x pre prírastok h

Pre malú hodnotu prírastku h diferenciál aproximuje hodnotu diferencie

Použitie diferenciálu - príklad

$f(x) = 2x^2 -2.$

Vypočítajte hodnotu diferencie a diferenciálu v

bode 3 pre prírastok $h = 0,01$.

$f(3,01) – f(3)= 16,1202 – 16 = 0,1202$

$f´(3)(3,01-3) = 12.\ 0,01= 0,12$

Monotónnosť funkcie

Veta: Nech je funkcia f spojitá na uzavretom intervale J a má deriváciu v každom vnútornom bode J. Ak pre každé x vnútri intervalu J platí

$f'(x)>0$, rastúca

$f'(x)<0$ tak je f na intervale J klesajúca

$f'(x)\geq 0$ neklesajúca

$f'(x)\leq 0$ nerastúca

Lokálne extrémy

Nech bod $c \in D(f)$. Číslo $f(c)$ je

lokálne maximum funkcie f ak $f(x) \leq f(c)$ pre všetky body z definičného oboru z nejakého otvoreného intervalu I.

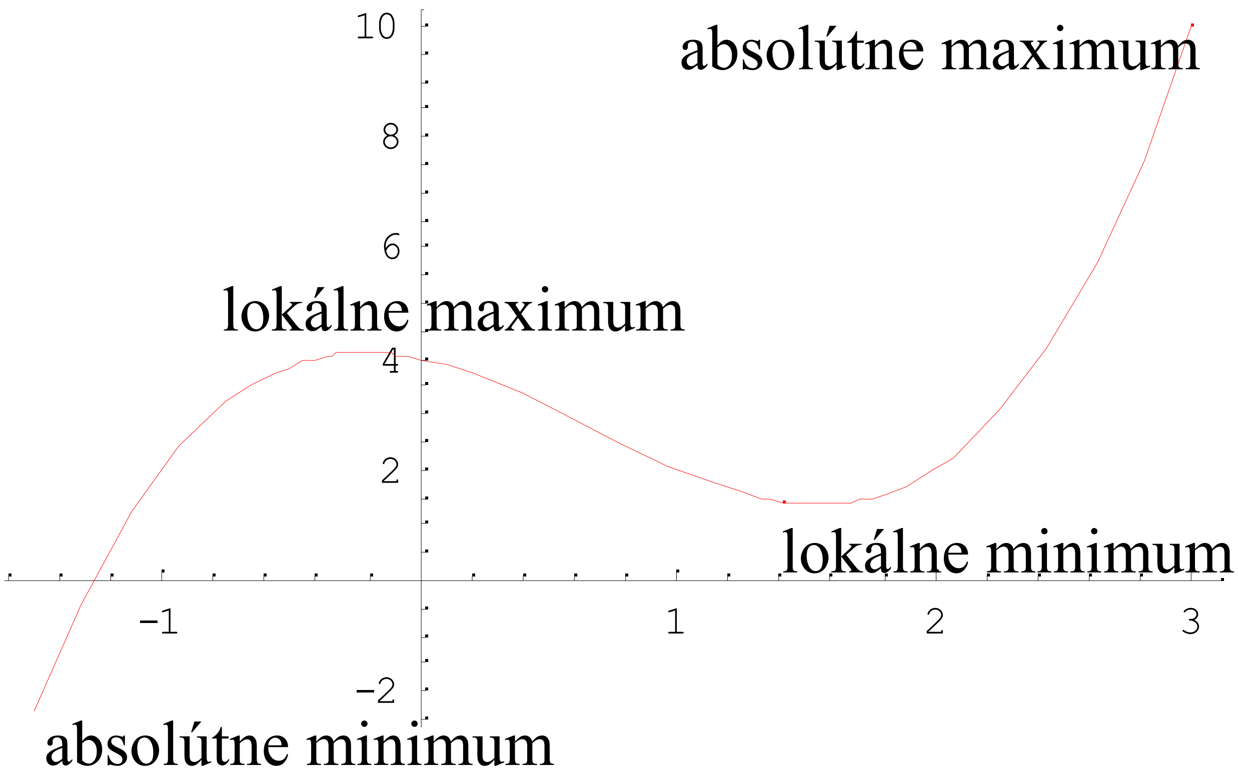
lokálne minimum funkcie f ak $f(x) \geq f(c)$ pre všetky body z definičného oboru z nejakého otvoreného Intervalu I.

Ak platia ostré nerovnosti, hovoríme o ostrom lokálnom maxime, minime

Absolútne extrémy na množine

Nech je $M \subset D(f)$, $c \in M$. Hodnota $f(c)$ je
absolútne lokálne maximum ak $f(x) \leq f(c)$ pre všetky $x \in M$.
absolútne lokálne minimum ak $f(x) \geq f(c)$ pre všetky $x \in M$.

Ukážka extrémov



$M = \langle -1.5; 3 \rangle$

Extrémy

Veta: Nech je funkcia f v bode x_0 spojitá a nech existuje také okolie $U(x_0)$, že v ňom naľavo od bodu x_0 je funkcia rastúca (klesajúca) a napravo od bodu x_0 je klesajúca (rastúca).

Potom funkcia f má v bode x_0 ostré lokálne maximum (ostré lokálne minimum).

Extrémy

Veta: Nech má funkcia f v bode x_0 lokálny extrém a má v tomto bode deriváciu $f'(x_0)$.

Potom $f(x_0)=0$.

Dôsledok: Funkcia f môže mať lokálny extrém len v tých bodoch, v ktorých sa jej derivácia rovná nule, alebo v ktorých derivácia neexistuje.

Je to nutná podmienka extrému, nie postačujúca.

Ak je splnená podmienka $f'(x_0)=0$, potom bod x_0 nazývame stacionárny bod.

Extrémy

Veta: Nech má funkcia f v bode x_0 prvú a druhú deriváciu a platí:

$f'(x_0)=0$ a $f''(x_0)\neq 0$.

Potom má funkcia v tomto bode lokálny extrém a

to minimum ak $f''(x_0)>0$

maximum ak $f''(x_0)<0$

Extrémy

Veta: Nech má funkcia f v bode x_0 prvú až n-tú deriváciu a platí:

$f'(x_0)=0 \ldots, f^{n-1}(x_0)=0,\ f^{n}(x_0)\neq 0.$

Potom ak n je párne číslo má funkcia v tomto bode

lokálny extrém a

to minimum ak $f^{n}(x_0)>0$

maximum ak $f^{n}(x_0)<0$

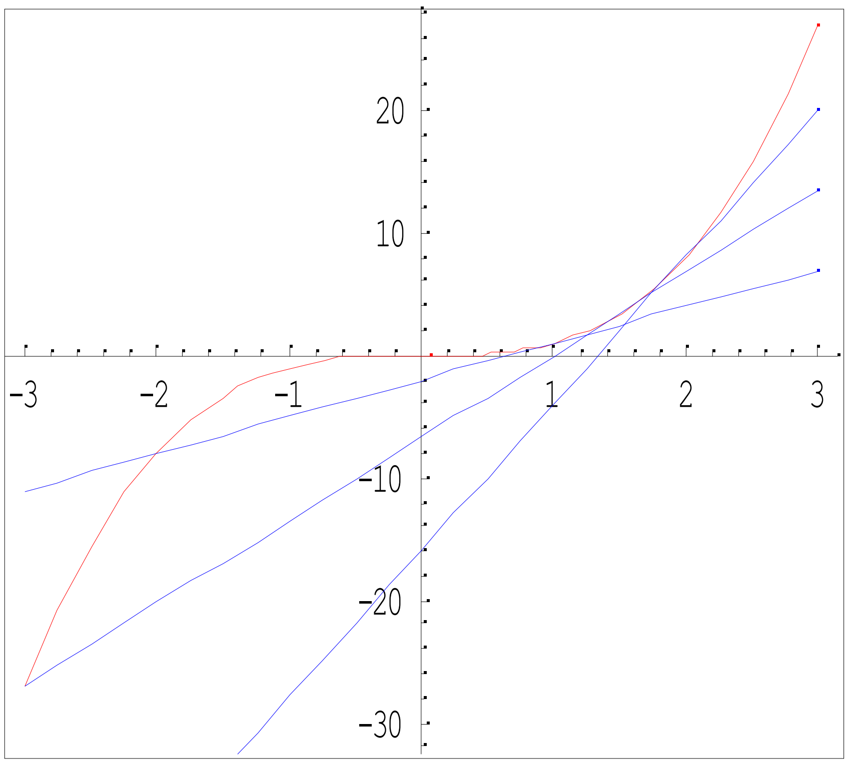
Ak n je nepárne, nie je v tomto bode extrém

Konvexnosť a konkávnosť

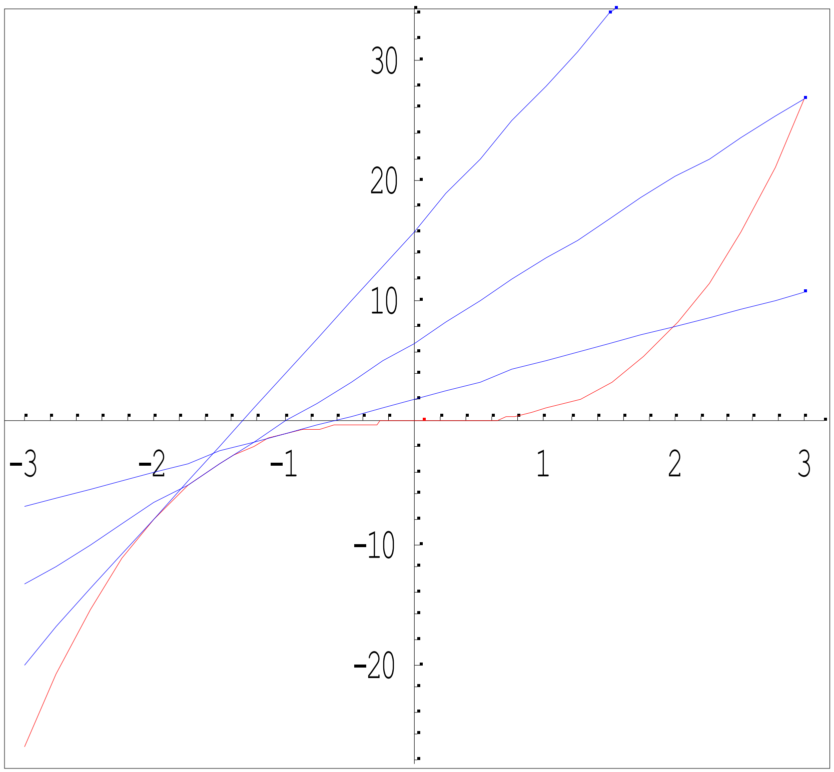
Definícia: Nech f je funkcia definovaná a spojitá na intervale J a v každom vnútornom bode tohto intervalu má deriváciu. Hovoríme, že funkcia f je konvexná (konkávna) na intervale J, ak pre každú dotyčnicu v bode tohto intervalu platí, že všetky body grafu funkcie okrem dotykového ležia nad (pod) touto dotyčnicou.

- Konvexná: ak $f'(x)$ je rastúca pre všetky $x \in J$
- Konkávna: ak $f'(x)$ je klesajúca pre všetky $x \in J$

Funkcia x^3 a jej dotyčnice



Derivácia rastie



Derivácia klesá

Veta o konvexnosti a konkávnosti

Nech funkcia je spojitá na intervale J a v

každom vnútornom bode intervalu má druhú

deriváciu. Ak pre každé x zvnútra intervalu platí

$f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$), tak je funkcia na intervale

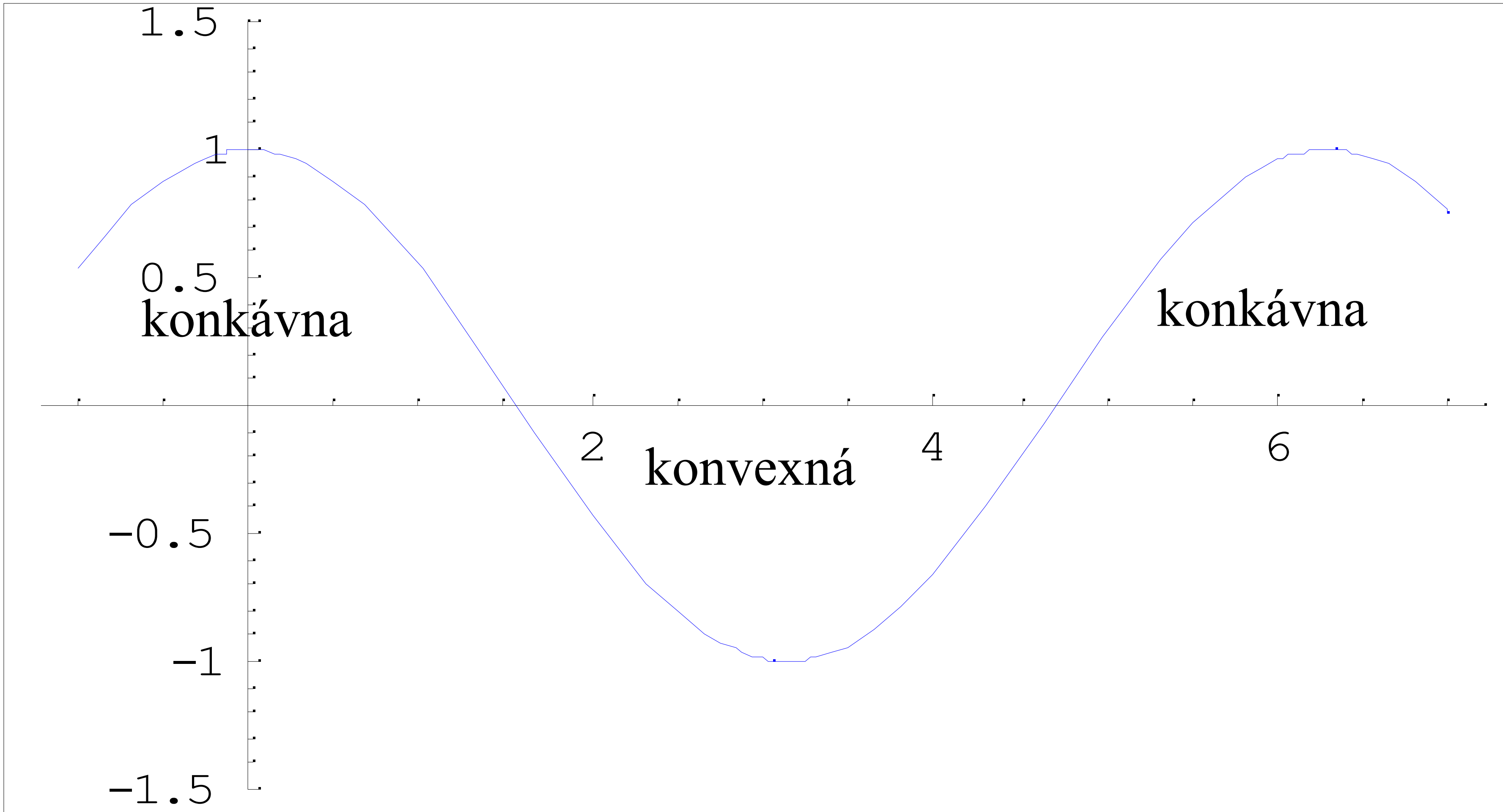
J konvexná (konkávna).

Inflexný bod

Bod x_0 v ktorom má funkcia f deriváciu, nazývame inflexný bod funkcie f ak je v niektorom ľavom okolí bodu funkcia konvexná (konkávna) a v niektorom pravom okolí bodu je konkávna (konvexná).

Veta: Nech má funkcia f v nejakom okolí bodu x_0 spojitú druhú deriváciu. Nutná podmienka, aby x_0 bol inflexný bod funkcie f je platnosť: $f''(x_0)=0$

Intervaly konvexnosti a konkávnosti pre funkciu cos(x)



Základné vety diferenciálneho počtu

Rolleho veta: Nech je funkcia f spojitá na uzavretom intervale [a,b] a v každom bode otvoreného intervalu (a,b) má deriváciu. Nech naviac platí: $f(a)=f(b)$. Potom v intervale (a,b) existuje aspoň jeden bod ξ taký, že $f'(\xi)=0$.

Základné vety diferenciálneho počtu

Lagrangeova veta o prírastku funkcie: Nech je funkcia f spojitá na uzavretom intervale [a,b] a v každom bode otvoreného intervalu (a,b) má deriváciu. Potom v intervale (a,b) existuje aspoň jeden bod ξ taký, že

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a).$$

L´Hospitalovo pravidlo

Nech platí:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

a nech existuje vlastná alebo nevlastná limita

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Potom existuje aj

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

a platí

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Diferenciály vyšších rádov

Diferenciál n-tého rádu funkcie f v bode a je výraz

$$d^n f(a,x) = f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

Ak existuje n-tá derivácia v bode a.

Taylorov mnohočlen

Nech má funkcia f v bode a všetky derivácie až do rádu n. Potom mnohočlen premennej x voláme Taylorov mnohočlen funkcie f v bode a.

$$T_n(f,a,x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Taylorova veta

Nech má funkcia f v intervale [a,b] spojité derivácie až do rádu n a deriváciu (n+1)- v otvorenom intervale. Potom pre každé x $\in$ [a,b] existuje také číslo r $\in$ (a,b). že platí:

$$f(x) = T_n(f,x,a) + \frac{f^{n+1}(r)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$