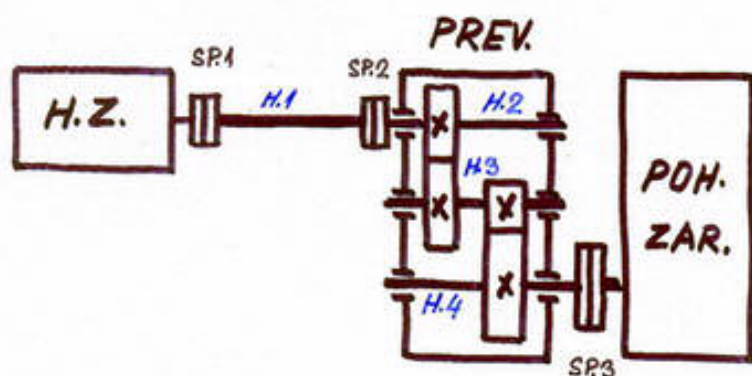


Hriadele slúžia k prenosu výkonu pri rotačnom pohybe. Výkon je privádzaný na hriadeľ napríklad ozubeným kolom, remenicou, pákou atď. a rovnakým spôsobom je aj z hriadeľa odvádzaný. Pri pripojení iných súč. je hriadeľ opatrený konštr. úpravami, ako sú žľabky, zápníky, osadenia, otvory a pod..

V dôst. prenosu výkonu je hriadeľ zaťaž. krútom alebo kombinov. druhom zaťaž., teda krútom a ohybom. Pôsobením uveden. zaťaž. sa prejavuje sčítanie a prieťah hriadeľa. V určitých konštr. prípadoch hriadeľ sa môže nepriaznivo prejavovať i ich dynamické vlastnosti. Zvlášť nebezp. sú rezonančné javy, pri ktorých môže byť ohrozená nie len stabilita chodu strojových zariadení, ale môže vzniknúť i trvalé poškodenie hriadeľa.

Hriadele podľa tvaru môžu byť priame, ohybné (flexibilné) a záložené. Podľa počtu ložísk poznáme hriadele staticky určité (ulož. vo dvoch ložiskách) a staticky neurčité (ulož. vo > 2 ložiskách).

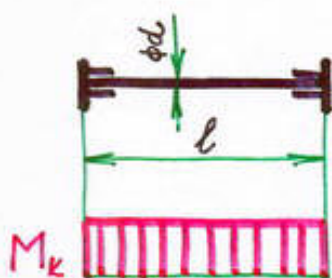
Zákl. typy hriadeľ. sú znázorn. na obr.



- H.1 - spojovací hr.
je zaťaž. M_k
- H.2 - hnací hr.
je zaťaž. M_k, M_0
- H.3 - vlož. hr. - predloh. hr.
je zaťaž. M_k, M_0
- H.4 - hnany - výst. hr.
je zaťaž. M_k, M_0

DIMENZOV. HRIAD. NAMÁHANÝCH KRÚTIACIM MOMENTOM

Jednoduchým krútom sú namáhané iba spojovacie hriadele. ZKM M_k vyvolá v čerajných vláknách hriadeľa tangenciálne nap.



$$\tau_k = \frac{M_k}{W_k} \leq \tau_{KD}$$

kde: $P = M_k \cdot \omega = M_k \cdot \frac{2\pi n}{60}$
 $W_k = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2 \cdot d^3$

Krútiace nap. τ_k sa smerom k osi znižuje.

Dosadením a úpr. potrebný priem. hriade. bude

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_k}{\pi \cdot \tau_{KD}}}$$

Hriadele o priemere d a dĺžke l sa pôsobením ZKM M_k deformujú. Na dĺžke l sa hriadeľ skrúti o uhol φ , veľkosť ktorého v stupňoch stanovíme

$$\varphi = \frac{M_k \cdot l}{G \cdot I_p} \cdot \frac{180}{\pi} [^\circ]$$

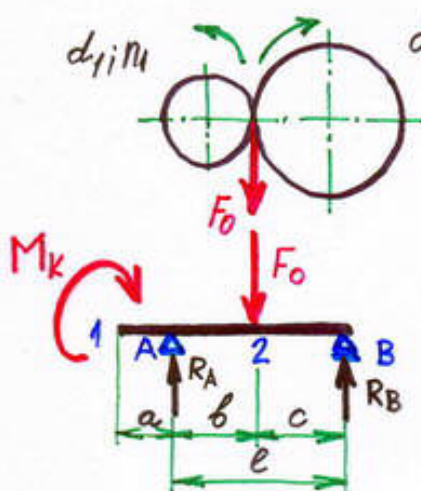
kde $G = 8 \cdot 10^4 \text{ MPa}$ - modul pružn. v šmyku, $I_p = \frac{\pi d^4}{32}$ - polárny moment prierezu

Vypočítaná hodn. uhla skrútenia hriadeľa musí zodpovedať podmienke $\varphi \leq \varphi_0$ pričom $\varphi_0 = 0,14^\circ/\text{m}$ - rázové zaťaženie
 $= 0,29^\circ/\text{m}$ - premenlivé -
 $= 0,58 \div 4,15^\circ/\text{m}$ - statické -

U hriade. s premenn. priem. φ sa stanoví

$$\varphi = \frac{M_k}{G} \cdot \sum \left(\frac{l_i}{I_{pi}} \right) \quad \text{kde } l_i - \text{dĺžka dseku hn. s pol. mom. prier. } I_{pi}$$

DIMENZOV. HRIADEĽOV NAMÁHANÝCH NA KRUT A OHYB



ZKM M_k spôsobí nap. $\tau_k = \frac{M_k}{W_k}$

Zdrovň prenášaný ZKM vyvedie na hnacou kol. obvodovú silu F_0 , kde pre ZKM platí $M_k = F_0 \cdot \frac{d_1}{2}$. Obvodová sila na-

máha tr. na ohyb a v nebezp. mieste (2) vyvedie ohyb. moment $M_{02} = R_A \cdot b = R_B \cdot c$, na zákl. čoho vzniká ohybové napätie

$$\sigma_0 = \frac{M_0}{W_0}, \quad \text{kde } W_0 = \frac{\pi d^3}{32}$$

Miesto-2- je možné považ. za kritické miesto, nakoľko sa tu sústr. obidva maxim. momenty.

Priemer hriad. sa v uved. mieste musí dimenz. na zákl. redukovaného nap.

$$\sigma_{\text{ored}} = \frac{M_{\text{ored}}}{W_0} \leq \sigma_{0,D}$$

Redukov. nap. je možné stanoviť podľa teórie mernej pretvárnej práce - HMM alebo podľa teórie maximálnych šmykových napätí.

A) podľa teórie - HMM: $\sigma_{\text{ored}} = \sqrt{\sigma_0^2 + 3\tau_k^2} \leq \sigma_D$

Dosadením za σ_0, τ_k a podmienku, že $W_k = 2 \cdot W_0$ dostávame

$$\sigma_{\text{ored}} = \sqrt{\left(\frac{M_0}{W_0}\right)^2 + 3\left(\frac{M_k}{2W_0}\right)^2} = \frac{\sqrt{M_0^2 + 0,75 \cdot M_k^2}}{\sqrt{W_0^2}} = \frac{M_{\text{ored}}}{W_0} \leq \sigma_D$$

Potom potrebný priemer hriadeľa bude

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 M_{\text{ored}}}{\pi \cdot \sigma_D}}$$

$$\text{kde } M_{\text{ored}} = \sqrt{M_0^2 + 0,75 \cdot M_k^2}$$

B) podľa teórie max. šmyk. nap.: $\sigma_{\text{ored}} = \sqrt{\sigma_0^2 + 4\tau_k^2} \leq \sigma_D$

Dosadením za σ_0, τ_k a podmienku, že $W_k = 2 \cdot W_0$ dostávame

$$\sigma_{\text{ored}} = \sqrt{\left(\frac{M_0}{W_0}\right)^2 + 4\left(\frac{M_k}{2W_0}\right)^2} = \frac{\sqrt{M_0^2 + M_k^2}}{W_0} = \frac{M_{\text{ored}}}{W_0} \leq \sigma_D$$

Potom hľadaný priem. hr. bude

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{\text{ored}}}{\pi \cdot \sigma_D}}$$

Pri dynamickom zaťažení sa pevn. kontrola hriadeľa realizuje na základe medených napätí. Väčšina hriad. je namáhaná striedavým ohybnom za rotácie a premenl. krútom. Pretože premelivosť krutu sťažuje určiť, počíta sa voči smeru s bezpečnosťou pre menší krut. Po výpočte normálových a tangenciálnych nap., výsledná dynam.

bezpečnosť $\left| k = \frac{k_\sigma \cdot k_\tau}{\sqrt{k_\sigma^2 + k_\tau^2}} \leq 1,5 \div 3,5 \right|$

PRIEHYB HRIADEĽA

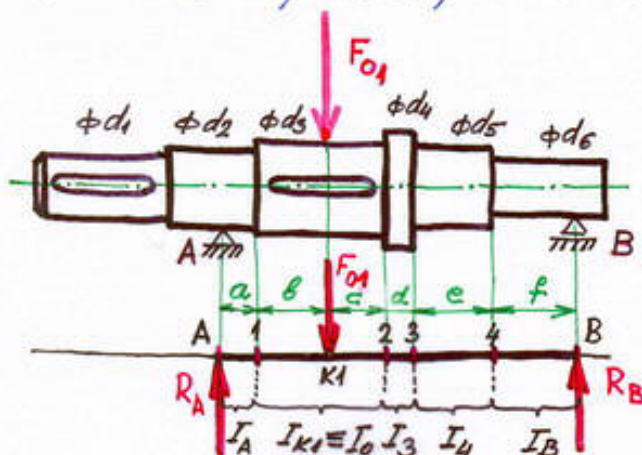
Priehyb hriadeľa y_x sledujeme v mieste uloženia ozubových kolies, remenic, spojok a pod.. Nadmerný priehyb hriadeľa spôsobený priestorovým ohybovým momentom môže nepriaznivo ovplyvniť trvanlivosť ložíšťa.

Výšetrenie priečnej čiary u hriad. s konštantným prierezom, tj. $EJ = \text{konšt.}$, je dané diferenc. rovnicou $y'' = -\frac{M_0}{EJ}$, kde $y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}$ je druhá deriv. prieč. podľa osi x , E - modul pružn. v ťahu, J - moment zotrvačnosti prierezu.

Výšetrenie priehyb. č. pre premenlivý (odstupňovaný) hriadeľ zabezpečíme metódou fiktívnej momentovej plochy - Mohrovou metódou. Riešenie spočíva v tom, že zaťaženie, ktoré pôsobí v priestore rozložíme do dvoch vzájomne kolmých rovin $z-x$ a $z-y$, potom výsledný priehyb stanovíme na základe vektorového sčítania jednotlivých priehybov $y_x = \sqrt{y_{zx}^2 + y_{zy}^2} \leq y_D$

prícom $y_D = \frac{m}{100}$ - pre celné ozub. k., $y_D = \frac{5m}{1000}$ - pre zvit. a kmitel. ozub.
 $y_D = (0,2 \sim 0,3) \cdot 10^{-3} \cdot l \text{ [mm]}$, kde $m \text{ [mm]}$, $l \text{ [mm]}$

Ukážku riešenia prezentujeme na vstupnom hriad. v rovine $z-y$.



Hriadeľ si rozdelíme na úseky o rovnakých priemeroch a na úseky, kde pôsobia jednotlivé zaťaženia. Ohybový mom. na každom úseku hriad. redukuje podľa vzťahu $M_{or} = M_{0,x} \cdot \frac{I_0}{I_x}$

kde je M_{ox} ohybový moment v danom mieste,

- I_x moment zotrvačnosti daného prierezu,

- I_0 vzťažný moment zotrvačnosti prier., na ktorý redukuje ohybový moment.

Stanovenie mom. zotrvačnosti a reduk. momentov

$$I_A = \frac{\pi d_1^4}{64}, \quad I_0 = \frac{\pi d_3^4}{64}, \quad I_3 = \frac{\pi d_4^4}{64}, \quad I_4 = \frac{\pi d_5^4}{64}, \quad I_B = \frac{\pi d_6^4}{64}.$$

V miestach zmeny prierezu (1, K1, 2, 3, 4) vypočítame dva reduk. ohyb. mom. pre každú hodnotu I_x zľava aj sprava pre obidva susedné priemery hriadeľa M_{ox}, M'_{ox} .

Prierez-1: $M_{or1} = M_{o1} \cdot \frac{I_0}{I_A}, \quad M'_{or1} = M_{o1} \cdot \frac{I_0}{I_0} = M_{o1}. \quad M_{o1} = R_A \cdot a;$

Prierez-K1: $M_{orK1} = M_{oK1} \cdot \frac{I_0}{I_0} = M_{oK1}. \quad M_{oK1} = R_A \cdot (a+b);$

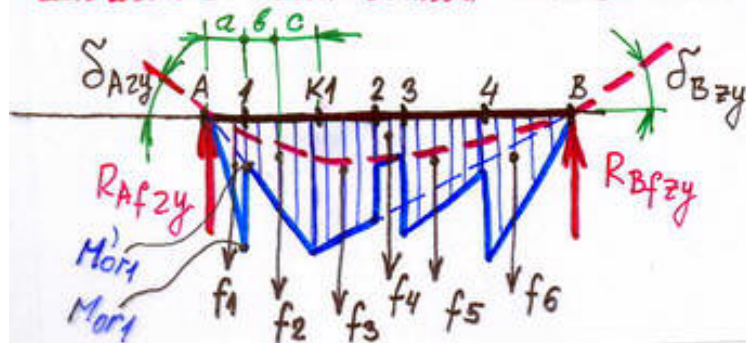
Prierez-2: $M_{or2} = M_{o2} \cdot \frac{I_0}{I_0}; \quad M'_{or2} = M_{o2} \cdot \frac{I_0}{I_3}; \quad M_{o2} = R_A(a+b+c) - F_1 \cdot c.$

Prierez-3: $M_{or3} = M_{o3} \cdot \frac{I_0}{I_3}, \quad M'_{or3} = M_{o3} \cdot \frac{I_0}{I_4}. \quad M_{o3} = R_B \cdot (e+f).$

Prierez-4: $M_{or4} = M_{o4} \cdot \frac{I_0}{I_4}, \quad M'_{or4} = M_{o4} \cdot \frac{I_0}{I_B}. \quad M_{o4} = R_B \cdot f.$

Fiktívny nosník:

Najprv si k reálnemu nosníku zostrojíme fiktívny nosník, ktorý zaťažíme redukovanou momentovou plochou - M_{orx}, M'_{orx} .



Fiktívny nosník zaťažíme fiktívnymi silami $f_1 - f_6$ vyplývajúce z moment. plochy, ktorú rozdelíme na geometr. útvary (Δ, \square). Vtiahneme

HRIADELE

- 48 -

jednotl. geom. útvarov moment. plochu zavedieme fiktívne sily.

Uráme si fiktívne reakcie R_{Afzy} , R_{Bfzy} z rovnováhy na nosníku

Priechyb v priereze - K1 - (stred ozub. koleca) stanovíme

$$\underline{y_{zyK1} = \frac{M_{fzyK1}}{E \cdot I_0}}$$

pričom moment ohybový
v priereze K1 bude

$$M_{fzyK1} = R_{Afzy} \cdot (a+b+c) - f_1(b+c) - f_2 \cdot c.$$

Uhly naklopenia δ_{Azy} , δ_{Bzy} v rovine z-y budú

$$\underline{\delta_{Azy} = \frac{R_{Afzy}}{E \cdot I_0}}, \quad \underline{\delta_{Bzy} = \frac{R_{Bfzy}}{E \cdot I_0}} \quad [\text{rad}]$$

Výslednú hodn. uhlov naklopenia v podperách A, B stanovíme

$$\underline{\delta_A = \sqrt{\delta_{Azy}^2 + \delta_{Axz}^2}}, \quad \underline{\delta_B = \sqrt{\delta_{Bzy}^2 + \delta_{Bzx}^2}} \quad \leq \underline{\delta_D}$$

Približná hodn. uhlovej deformácie pre guľkové lož. $\delta_D \doteq 6' \div 10'$,
pre ložiskové lož. $\delta_D \doteq 2 \div 4'$ a pre naklápacie lož. $\delta_D \doteq 3^\circ$.

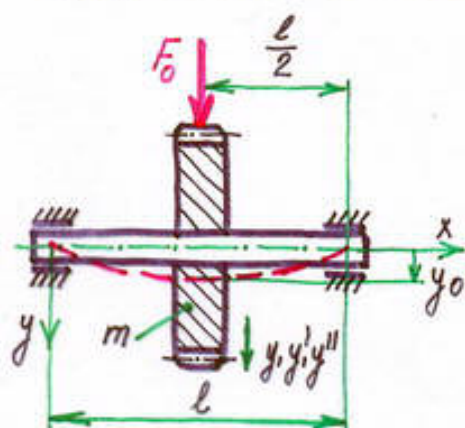
Presnejšie hodnoty sú uvedené v katalogu ložísk.

Kmitanie hriadeľa

Hriadeľ uložený v ložiskách, na ktorom sa nachádza ďalšia súčiastka, ako napr. ozub. kol., remenica, zotrvačník a pod. predstavuje dynamickú sústavu s hmotnosťou, mom. zotrvačnosťou, tuhosťou v priečnom a osovom smere a torznou tuhosťou. Takáto sústava, pokiaľ na ňu pôsobia periodické sily alebo momenty, začne vykonávať nepriaznivý kmitavý pohyb príslušného charakteru. Vznikajú tam kmity ohybové a torzné. Na tieto domé exst. majú malé tlmiace schopnosti, je potrebné minimalizovať budiace účinky a zabezpečiť ich prevádzku v mimorezonančnej oblasti.

OHYBOVÉ KMITANIE HRIADEĽA

Ohybové kmitanie nastáva v prevádzk. podm. vtedy, keď na hriadeľ pôsobí priečna sila F statického alebo dynamického charakteru. Z hľadiska mechaniky je rovnocenné, či sa hriadeľ otáča a ráč stojí alebo je tomu naopak. Hriadeľ je



potom zaťažovaný harmonickou silou s budúcou frekv. ω odpovedajúcou otáčkam n podľa vzťahu $\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}$.

Z teórie kmit. je známe, že každá dynam. súst. vykazuje jednu alebo viac vlastných frekvencií Ω_i , ktoré patria frekv. kmit. pohybu pri voľnom kmitaní. Ďalej je známe,

že pokiaľ budúca frekv. ω je rovná niektorej z vlastných frekv., nastáva stav rezonancie, pri ktorom výchylka kmitavého pohybu rastie do maxima. Je samozrejmé, že s uvedeným stavom je potrebné v prevádzke počítať a už pri návrhu hriad. sledovať i jeho dynam. vlastnosti. Zvlášť dôležité je znalosť hodnoty najnižšej vlastn. frekv. Ω_1 , ktorá je obvyčajne najbližšie k budúcej frekv. ω . Najnižšiu vlastnú frekv. Ω_1 ohybového kmit. je možné v jednoduchom príp. zistiť na zákl. uvedeného modelu, ktorý predstavuje nehmotný prizmatický hriadeľ s ožub. kol. o hmotn. m . Predpokladajme, že hriadeľ má v $\frac{l}{2}$, kde je umiestnené ožub. kol. tuhosť $-c-$, ktorá je daná mod. pružn. v ťahu E , osovým momentom zotr. prierezu J a dĺžkou hriad. l . U prizmat. hriad. sa tuhosť c stanoví z diferenc. rovn. priehybovej čiary v tvare $y'' = -\frac{M_0(x)}{EJ}$, kde $-y''$ je druhá deriv. priehybu podľa súradn. x . Ohyb. mom. $M_0 = F/2 \cdot x$. Potom bude $y''(x) = -\frac{F}{2EJ} \cdot x$ v intervale $0 \leq x \leq l/2$.

Integrovaním dostaneme $y'(x) = -\frac{F}{4EJ} x^2 + C_1$, kde C_1 je

integr. konšt. a následne po ďalšej integr. bude

$y(x) = -\frac{F}{12EJ} \cdot x^3 + C_1 x + C_2$, pričom int. konšt. C_2 bude rovná nule, natoľko priechyb $y(0) = 0$, čo je jedná z počiat. podm.. Druhá poč. podm. môžeme písať v tvare $y(\frac{l}{2}) = 0$, natoľto uhol sklonu priechyb. čiary je práve v prostriedku nulový. Potom bude $C_1 = \frac{F l^2}{16EJ}$. Po dosad. do vzťahu pre $-y(x)$ - zistíme priechyb hriad. v mieste ozub. kolieska

$$\underline{y(\frac{l}{2}) = -\frac{F}{96EJ} l^3 + \frac{F}{32EJ} l^3 = \frac{F}{48EJ} \cdot l^3}; \quad \left| \begin{array}{l} \text{Pre priečnu tuhosť} \\ -C- \text{ v mieste pô-} \end{array} \right.$$

soberia budiacej sily zistíme vzťah $C = \frac{F}{y(l/2)} = \frac{48EJ}{l^3}$;

Pohybovú rovn. voľného tlmitaveľho pohybu dynam. súst. hriad. a ozub. kolieska je možné popísať rôznymi postupmi. Napr. podľa d'Alembertovho princípu, ktorý vyjadruje rovnováhu vnútorných síl pôsobiacich na teleso o hmotn. m včítane zotrvačníc. Bude potom $m y'' + c y = 0$. Predpokl., že teleso bude kmitať harmonickým pohybom $y = y_0 \cdot \sin(\Omega t)$, kde y_0 - amplit. výchylky, Ω - vlastná frekv. tlmitav. pohybu a t - označuje čas. Po dosadení za y do diferenc. rovn. dostávame

$-y_0 m \Omega^2 \sin(\Omega t) + c y_0 \sin(\Omega t) = 0$. Úpravou rovn., pre vlastnú frekv. kmit. zistíme vzťah $\Omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{48EJ}{m l^3}}$

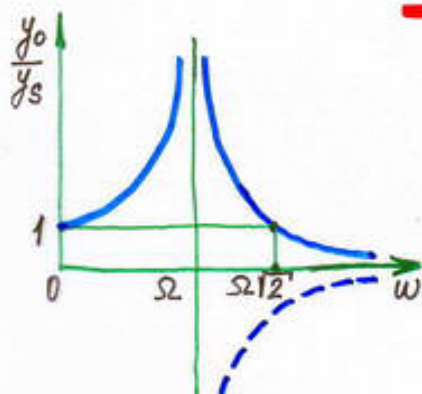
Kmitavý pohyb hriadeľa budeného harmon. silou $F = F_0 \cdot \sin(\omega t)$, kde F_0 - je amplit., ω - frekv. bud. sily vyšetríme opäť z difer. rovn. vyjadrujúcej rovnov. vonkajších síl. Bude $m y'' + c y = F_0 \sin(\omega t)$.

Riešenie predpokl. v tvare $y = y_0 \cdot \sin(\omega t)$, kde y_0 - amplit. vynút. tlmitaveľho pohybu

Po úprave bude
 y_0 platiť

$$-y_0 m \omega^2 \sin(\omega t) + c y_0 \sin(\omega t) = F_0 \sin(\omega t) \text{ a pre}$$

$$y_0 = \frac{F_0}{c - m \omega^2} = \frac{F_0}{c \left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega^2}\right)} = y_s \cdot \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\Omega^2}};$$



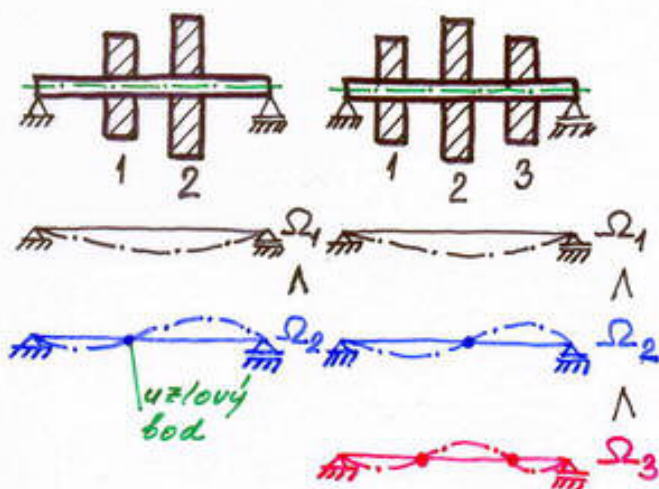
prícom y_s je statická výchylka spôsobená amplitúdou F_0 budiacej sily.

V prípade uvažovania hmotného hriadeľa, s ktorým sa vo výpočte uvažuje ako spojité zatiaľ, sa zvýši vl. frekv. Ω približne o 30%.

Vlastnej frekv. Ω prislúchajú tzv. kritické otáčky hriadeľa $n_k [\text{min}^{-1}]$ dané vzťahom $n_k = \frac{30 \cdot \Omega}{\pi}$.

V praxi je potrebné zabezpečiť, aby pre prevádzkové otáčky n platilo, že $n < 0,8 \cdot n_k$ alebo $n > 1,2 \cdot n_k$, pretože v inom prípade existuje nebezpečenstvo vzniku rezonančných javov.

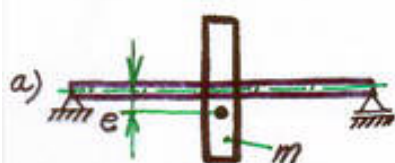
V prípade, že je na hriadeľ väčší počet hmotných telísk vykazujú voľné kmity hriadeľa viac vlastných frekvencií a im zodpovedajúce vlastné tvary kmitov.



Pre prevádzku je však dôležité poznať veľkosť hlavne najnižšej vlastnej frekv. Ω_1 , s odpovedajúcim tvarom vlastného kmitania.

KRÚŽIVÉ KMITANIE HRIADEL'A

Krúživé kmit. hriadeľa s nevyváž. hmotou s hmotn. m je možné označiť ako zdanlivé (pomyslené, obr. a).



čo uhl. rýchľ. ω prehnutý v dôsledku odstredivej sily a vlastne netmitá (obr. b). Z pohľadu pozorovateľa však vzniká dojem priečného kmitania. Rovnováhu rotujúceho ťažiska zatážameho odstredivou silou je možné popísať rovnicou $(e+y)m\omega^2 = cy$, kde e predstavuje excentricitu polohy ťažiska ktorúčo voči osi rotácie, y je prielkyb spôsobený odstred. silou $F = (e+y)m\omega^2$.

Pravá str. $-cy$ predch. výrazu predstav. direkčnú silu (vratnú) pružiacej schopn. hriad.

s ohybovou tuhosťou c . Úpravou predch. výr. dostaneme vzťah $(e+y)\omega^2 = \Omega^2 y$, z ktorého je možné vyjadriť hľadaný prielkyb

$$y = \frac{e\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2}$$

Z výrazu vyplýva, že pri uhľovej rýchľ. ω otáčania hriadeľa

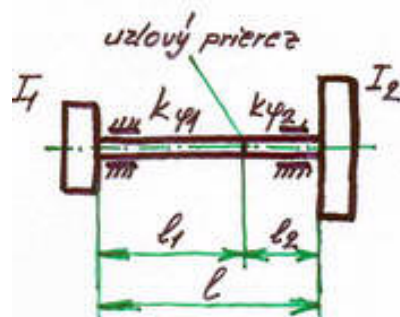
blízkej vlastnej frekv. Ω priečného kmitania dochádza ku strate rovnováhy a ϵ rastie prielkybom y nadto všetky medze.

Pri uhľ. rýchľ. $\omega \rightarrow \infty$ je prielkyb $y \rightarrow -e$, čo znamená, že sa ťažisko ťažiska dostane do osi rotácie (obr. c).

Pri uvažovaní ťažko ťažko sa mení poloha osi rotácie ktorúčo o hodnotu príslušného statického prielkybu a na krúživé kmitanie sa superponuje kmitanie ohybové.

Kritická uhľová rýchľ. krúživé kmit. je totožná s vlastnou frekv. Ω ohybového kmitania. Kritické otáčľy n_k sú potom pre obidva prípady zhodné ($n_k = \frac{30\Omega}{\eta}$).

TORZNÉ KMITANIE HRIADEL'A



Hriadel', na ktorom sú umiestni. napr. dva kotúče predstavuje dynam. súst., ktorá pri vybudení môže torzne kmitať. Pri zaťažení krúť. mom. M_k sa hriadel' skrúca o uhol $\varphi = \frac{M_k \cdot l}{G \cdot J_p}$, kde G - je modul pružn. v šmyku, J_p - polárny moment zotr. prier. a l - dĺžka hriadeľ.

Zaved. vet. vyplýva torzná tuhosť hriadeľ. $k_\varphi = \frac{M_k}{\varphi} = \frac{G J_p}{l}$.

Po vzájomnom natočení a následnom uvoľnení kotúčov začne súst. kmitať vlastnou frekvenciou Ω tak, že kotúče sa natočajú proti sebe, teda v opačnom zmysle. Nepochybne potom existuje prierez, ktorý zostáva v l'ade, nazýva sa uzlový.

Pohybové rovnice vlastných torzných kmitov kotúčov sú popís. podľa d'Alembertovho princípu na zořt. moment. rovnováhy,

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\varphi}_1 + k_{\varphi_1} \varphi_1 &= 0 \\ I_2 \ddot{\varphi}_2 + k_{\varphi_2} \varphi_2 &= 0 \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \text{vo vzťahoch sú } I_1 \text{ a } I_2 - \text{hmotné mom. zotr.} \\ \text{kotúčov, } \varphi_1 \text{ a } \varphi_2 - \text{ich uhly skrútenia a } k_{\varphi_1} \\ k_{\varphi_2} - \text{torzné tuh. prísluchaj. častiam hriadeľ} \\ \text{oddelených uzlovým prierezom.} \end{array} \right.$$

Riešenie predpokladáme v tvare $\varphi = \varphi_0 \cdot \sin(\Omega t)$, potom pohybové rovn. upravíme do tvaru

$$-I_1 \varphi_{01} \cdot \Omega^2 \sin(\Omega t) + k_{\varphi_1} \varphi_{01} \sin(\Omega t) = 0$$

$$-I_2 \varphi_{02} \cdot \Omega^2 \sin(\Omega t) + k_{\varphi_2} \varphi_{02} \sin(\Omega t) = 0$$

$$\text{Pre vlastnú frekv. platí } \Omega = \sqrt{\frac{k_{\varphi_1}}{I_1}} = \sqrt{\frac{k_{\varphi_2}}{I_2}}$$

$$\text{kde } k_{\varphi_1} = \frac{G J_p}{l_1}, \quad k_{\varphi_2} = \frac{G J_p}{l_2}. \quad \text{Potom}$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{l_1}{l_2} \quad \text{prícom } l_1 + l_2 = l$$

$$\text{Poloha uzlov. prier. potom bude } l_1 = \frac{I_2}{I_1 + I_2} \cdot l; \quad \Rightarrow \quad \text{Získame dosadením } \Omega \text{ do } n_k = \frac{30 \cdot \Omega}{\pi}.$$

⇒ Ďalšou úpravou pre vlastnú frekv. platí

$$\Omega = \sqrt{k_\varphi \cdot \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2}},$$

$$\text{kde } k_\varphi = \frac{G J_p}{l} \quad \text{torzná tuhosť celého hriadeľa}$$

Kritické otáčky hriadeľ.

$$\Rightarrow \quad \text{Získame dosadením } \Omega \text{ do } n_k = \frac{30 \cdot \Omega}{\pi}.$$