4. a 5. domáca úloha

z predmetu Diskrétna matematika

Túto domácu úlohu treba odovzdať 12.12.2006 na prednáške. Na svoje riešenie viditeľne napíšte vaše meno, krúžok a cvičiaceho.

$\boxed{1}$ **(3 body)** Sútažia dve gymnastické družstvá s rovnakým počtom pretekárov. Každý pretekár dostal 8 alebo 9 bodov. Suma bodov, ktoré dostali spolu všetci pretekári je 156. Kolko bolo pretekárov?

$\boxed{2}$ **(4 body)** Dokážte, že ak máme v rovine päť rôznych bodov P_i s celočíselnými súradnicami (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, 5$, tak pre aspoň jednu dvojicu bodov P_i a P_j, $i \neq j$, aj stred úsečky P_iP_j, teda bod $(\frac{x_i+x_j}{2}, \frac{y_i+y_j}{2})$ má celočíselné súradnice.

$\boxed{3}$ **(4 body)** V lietadle je n radov sedadiel, v každom rade sú 3 sedadlá. Do lietadla nastupuje n trpaslíkov, n obrov a n víl. Kolkými spôsobmi sa môžu rozsadit, ak v každom rade má z bezpecnostných dôvodov sediet jeden obor, jeden trpaslík a jedna víla? (Trpaslíci, obri aj víly sú rozlíšitelní a dve rozsadenia považujeme za rôzne, aj ked sa líšia iba presadením bytostí v jednom rade.)

$\boxed{4}$ **(4 body)** Koľkými spôsobmi môžeme na šachovnici rozložiť osem veží tak, aby sa vzájomne neohrozovali? Predpokladáme, že veže sú navzájom rozlíšiteľne, t.j. dve rozostavenia líšiace sa iba vymenením veží pokladáme za rôzne. (Šachovnica má 8×8 políčok a dve veže sa ohrozujú ak sú na rovnakom riadku alebo rovnakom stĺpci.)
Svoje riešenie zdôvodnite.

$\boxed{5}$ **(4 body)** Dokážte identitu:

$$\binom{3n}{3} = 3\binom{n}{3} + 6n\binom{n}{2} + n^3$$

$\boxed{6}$ **(3 body)** Nájdite všetky usporiadania 4-prvkovej množiny, ktoré majú najmenší prvok. Stačí uviesť iba Hasseho diagramy týchto usporiadaní, pričom usporiadania líšiace sa iba zámenou prvkov považujeme za rovnaké.