

Katedra matematiky Fakulty humanitných a prírodných vied
Prešovskej univerzity v Prešove

ZOBRAZENIA a KUŽEĽOSEČKY

Doc. RNDr. Ján Duplák, PhD.

Obsah

PREDSLOV	
AFINNÉ ZOBRAZENIA	1
15 Afinné zobrazenie a jeho analytické vyjadrenie	1
16 Invarianty afinných zobrazení	7
17 Určenosť afinného zobrazenia	9
18 Priame a nepriame afinity	10
NIEKTORÉ TYPY AFINNÝCH ZOBRAZENÍ	12
19 Rovnobežné premietanie	12
20 Perspektívna afinita	14
21 Podobné zobrazenia	16
22 Zhodné zobrazenia	20
AFINNÉ ZOBRAZENIA v E_1 , E_2 , E_3	24
23 Afinity na priamke	24
24 Afinity na rovine	24
25 Zhodnosti na rovine	27
26 Zhodnosti na E_3	31
27 Podobnosti na rovine	32
APLIKÁCIE ZOBRAZENÍ	35
28 Podobnosť a zhodnosť útvarov v E_n	35
29 Použitie zobrazení	39
PROJEKTÍVNA ROVINA a KOLINEÁCIE	47
30 Projektívna rovina	47
KUŽEĽOSEČKY	57
31 Definícia kužeľosečky	57
32 Prienik priamky s kužeľosečkou	57
33 Dotyčnice a singulárne body kužeľosečky	60
34 Polárne vlastnosti kužeľosečiek	62
35 Metrické vlastnosti kužeľosečiek	65
LITERATÚRA	69

PREDSLOV

Tieto učebné texty vznikli z druhého vydania Geometrie I a II oddelením časti II Zobrazenia a kužeľosečky. Číslovanie kapitol, článkov a vzorcov preto nadväzuje na číslovanie z časti I. Texty prešli niektorými zmenami (napr. boli pridané úlohy v cvičeniach každej kapitoly). Najväčšia zmena sa dotkla článkov o projektívnej rovine a kužeľosečkách. Pre pochopenie obsahu sa od čitateľa vyžadujú znalosti z učebných textov Afinné a Euklidovské priestory (t.j. z Geometrie I).

Prešov, október 2005

Autor

A F I N N É Z O B R A Z E N I A

15 Afinné zobrazenie a jeho analytické vyjadrenie

Rovnoľahlosť

Trieda afinných zobrazení hrá v geometrii dôležitú úlohu z viacerých dôvodov. Niektoré afinné zobrazenia sú rovnobežné (a špeciálne aj kolmé) premietania, dôležité najmä pri zobrazovaní trojrozmerného priestoru na dvojrozmerný, niektoré sú izomorfizmy afinných priestorov a niektoré zase "pohyby" v euklidovských priestoroch.

K afinným zobrazeniam (používaným i v praxi) patrí rovnoľahlosť. Rovnoľahlosť, ako zobrazenie $E_2 \rightarrow E_2$ je zaradené do vyučovania matematiky na stredných školách. Tam sa preberali niektoré jej dôležité vlastnosti: Obraz priamky je priamka s ňou rovnobežná, obraz úsečky je úsečka, atď. Jej definícia bola nasledovná: Daný je bod S a reálne číslo $k \neq 0, 1$. Ku každému bodu X zostrojíme X' takto: Pre bod $X = S$ je $X' = S$; ak $X \neq S$, zostrojíme bod X' na priamke \overrightarrow{SX} tak, že $\overrightarrow{SX'} = k \cdot \overrightarrow{SX}$; pritom $X \in \overrightarrow{SX}$, ak $k > 0$ a X leží na polpriamke opačnej k \overrightarrow{SX} , ak $k < 0$. Zobrazenie, ktoré podľa tohto predpisu priraďuje bodu X bod X' , nazývame rovnoľahlosť. Túto definíciu zovšeobecňuje

Definícia 15.1 V R_n je daný bod S a reálne číslo $k \neq 0$. Zobrazenie $\rho: R_n \rightarrow R_n$, $X \mapsto X'$ nazývame rovnoľahlosť (tiež homotetia) na R_n , ak

$$\overrightarrow{SX'} = k \cdot \overrightarrow{SX} \quad (t.j. \quad X' = S + k \cdot \overrightarrow{SX}); \quad (15.1)$$

bod S nazývame stred a číslo k charakteristika rovnoľahlosti ρ ; označenie: $\rho[S, k]$.

Nech rovnoľahlosť $\rho[S, k]$ na R_n zobrazí body X, Y v poradí do X', Y' . Potom vzhľadom na (15.1),

$$\overrightarrow{X'Y'} = \overrightarrow{SY'} - \overrightarrow{SX'} = k \cdot \overrightarrow{SY} - k \cdot \overrightarrow{SX} = k(\overrightarrow{SY} - \overrightarrow{SX}) = k \overrightarrow{XY},$$

čiže pre každé dva body X, Y a ich obrazy X', Y' v rovnoľahlosti s charakteristikou k , platí

$$\overrightarrow{X'Y'} = k \cdot \overrightarrow{XY}. \quad (15.2)$$

Ak A', B', C', D' sú v poradí obrazy bodov A, B, C, D v rovnoľahlosti ρ , tak $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$ t.j.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{\rho A \rho B} = \overrightarrow{\rho C \rho D}. \quad (15.3)$$

Skutočne, keď $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, potom podľa (15.2) $\overrightarrow{A'B'} = k \cdot \overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{C'D'}$. Vlastnosť (15.3) umožňuje pomocou rovnoľahlosti na R_n definovať nové zobrazenie (ktoré budeme označovať $\rho^\#$) oborom i druhým oborom, ktorého je zameranie priestoru R_n a teda je to zobrazenie množiny vektorov (a nie bodov!) na seba:

$$\rho^\#: \vec{R}_n \rightarrow \vec{R}_n, \quad \rho^\#(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{\rho A \rho B}. \quad (15.4)$$

Nech k zobrazeniu $\alpha: R_n \rightarrow R_n$ (nie je nevyhnutne rovnoľahlosť), existuje zobrazenie $\alpha^\#: R_n \rightarrow R_n$ definované podľa (15.4); $\alpha^\#$ budeme nazývať stopa zobrazenia α alebo zobrazenie asociované (resp. indukované) zobrazením α . Nie všetky zobrazenia $R_n \rightarrow R_n$ majú takú vlastnosť. Napríklad k zobrazeniu $\psi: R_2 \rightarrow R_2, [x, y] \mapsto [x, y^2]$ neexistuje stopa.

Keď α je rovnoľahlosť s charakteristikou k , potom vzhľadom na (15.2) a (15.4) $\overrightarrow{X'Y'} = \alpha^\# \overrightarrow{XY} = k \cdot \overrightarrow{XY}$; $\alpha^\#$ je teda skalárne násobenie a to ako vieme z I. kapitoly je automorfizmus (pre $k \neq 0$) vektorového priestoru \vec{R}_n . Preto platí

Veta 15.2 Stopa každej rovnoľahlosti na R_n je automorfizmus vektorového priestoru \vec{R}_n .

Definícia afinného zobrazenia

Rovnôľahlosť je teda také zobrazenie, ku ktorému existuje stopa a táto stopa je automorfizmus a teda aj endomorfizmus vektorového priestoru \overrightarrow{R}_n . Také zobrazenia hrajú v geometrii veľmi dôležitú úlohu (čitateľ sa môže presvedčiť, že okrem iných zobrazení aj osová súmernosť a translácia majú tieto vlastnosti).

Definícia 15.3 *Nech $(P, \rightarrow, V), (P', \rightarrow, V')$ sú afinné systémy. Zobrazenie $\alpha : P \rightarrow P'$ nazývame afinné zobrazenie, ak existuje zobrazenie*

$$\alpha^\# : V \rightarrow V', \quad \alpha^\# \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\alpha A \alpha B}$$

a toto zobrazenie je morfizmus vektorových priestorov V, V' ; ak $P = P', V = V'$ hovoríme, že α je afinné zobrazenie na P . Afinné zobrazenie, ktoré je bijekcia, nazývame afinita alebo izomorfizmus. P, P' sú izomorfné afinné priestory, ak existuje afinita $\alpha : P \rightarrow P'$.

Je zrejmé, že zamerania izomorfných afinných priestorov sú izomorfné vektorové priestory; nie je ťažké dokázať, že platí i obrátene, t.j. ak zamerania afinných priestorov sú izomorfné vektorové priestory, tak tieto afinné priestory sú izomorfné. To znamená, že afinné priestory s tým istým počtom skalárov sú izomorfné práve vtedy, keď majú rovnaké dimenzie. Preto každý n -rozmerný afinný priestor nad poľom F je izomorfný s n -rozmerným aritmetickým afinným priestorom nad poľom F . Z toho vyplýva dôležitosť aritmetického afinného priestoru.

Medzi afinné zobrazenia patria, zo strednej školy dobre známe, zobrazenia stredová súmernosť, osová súmernosť, posunutie, rovnobežné premietanie (neskôr to dokážeme). Cieľom tejto kapitoly je skúmať vlastnosti afinných zobrazení (nielen v rovine, ale aj na R_n , resp. $E_n, n > 0$) previesť ich klasifikáciu a ukázať ich aplikácie.

Dôležitosť afinných zobrazení vyplýva z definície geometrie, ktorú predniesol r. 1872 F. Klein vo svojej prednáške "Erlagenský program". Podľa tejto definície, ak (M, G) je usporiadaná dvojica, kde M je neprázdna množina a G je grupa transformácií na M , tak geometria je teória, ktorá "študuje" invarianty grupy G . Afinná geometria "študuje" invarianty afinnej grupy t.j. grupy všetkých afinít na danom afinnom priestore.

Afinné zobrazenie sme definovali pomocou "algebraických" pojmov, dá sa to však urobiť aj "geometricky".

Lema 15.4 *Zobrazenie $\alpha : R_n \rightarrow R_n$ je afinné práve vtedy, keď*

$$\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{BC} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{\alpha A \alpha C} = k \cdot \overrightarrow{\alpha B \alpha C}. \quad (15.5)$$

Dôkaz. Nech α je afinné zobrazenie, potom $\alpha^\#$ je morfizmus a preto $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{BC}$ implikuje

$$\alpha^\# \overrightarrow{AC} = k \cdot \alpha^\# \overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{\alpha A \alpha C} = k \cdot \overrightarrow{\alpha B \alpha C}.$$

Obrátene predpokladajme, že platí (15.5). Obrazy bodov $A, B, C \dots$ v zobrazení α v poradí označme $A', B', C' \dots$. Najprv dokážeme, že (i) operácia "stred dvojice bodov" je invariantom zobrazenia α . Skutočne, nech S je stred dvojice A, B . Potom $\overrightarrow{AS} = -1 \cdot \overrightarrow{BS}$, odkiaľ podľa (15.5) $\overrightarrow{A'S'} = -1 \cdot \overrightarrow{B'S'}$ a to znamená, že S' je stred dvojice A', B' , platí teda

$$\alpha(A \div B) = \alpha A \div \alpha B.$$

Ďalej ukážeme, že (ii) existuje stopa zobrazenia α . Nech $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DE}$. Potom stredy dvojíc $(A, E), (C, D)$ splývajú preto podľa (i) stredy dvojíc $(A', E'), (C', D')$ splývajú, takže $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{D'E'}$. Tým je dokázané aj (ii). Nakoniec dokážeme, že $\alpha^\#$ je morfizmus. Nech \vec{a}, \vec{b} sú ľubovoľné vektory a nech A, B, C sú také body, že $\overrightarrow{CA} = \vec{a}, \overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Ak $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD}$, tak stredy dvojíc $(C, D), (A, B)$ splývajú a preto podľa (ii) aj stredy dvojíc $(C', D'), (A', B')$ splývajú, teda $\overrightarrow{C'A'} + \overrightarrow{C'B'} = \overrightarrow{C'D'}$, čiže $\overrightarrow{\alpha C \alpha A} + \overrightarrow{\alpha C \alpha B} = \overrightarrow{\alpha C \alpha D}$, t.j. $\alpha^\# \overrightarrow{CA} + \alpha^\# \overrightarrow{CB} = \alpha^\# \overrightarrow{CD}$ a potom aj $\alpha^\# \vec{a} + \alpha^\# \vec{b} = \alpha^\# (\vec{a} + \vec{b})$. Rovnosť $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$ možno napísať v tvare $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{BC}$ (je zrejmé, že také body A, B, C existujú) a podľa (15.5) $\overrightarrow{\alpha A \alpha C} = k \cdot \overrightarrow{\alpha B \alpha C}$, čiže $\alpha^\# \overrightarrow{AC} = k \cdot \alpha^\# \overrightarrow{BC}$ t.j. $\alpha^\# \vec{u} = k \cdot \alpha^\# \vec{v}$. Tým je dokázané, že $\alpha^\#$ je endomorfizmus.

Veta 15.5 Zobrazenie $\alpha : R_n \rightarrow R_n$ je afinné práve vtedy, ak každé tri rôzne kolineárne body $A, B, C \in R_n$ sa zobrazia do jedného bodu alebo do takých troch rôznych kolineárnych bodov, že $(ABC) = (\alpha A \alpha B \alpha C)$.

Táto veta je ekvivalentná s definíciou afinného zobrazenia. Preto by bolo možné definovať afinné zobrazenie ako zobrazenie, ktoré každé tri kolineárne body A, B, C zobrazí do toho istého bodu, alebo do bodov, ktorých deliaci pomer sa rovná deliacemu pomeru bodov A, B, C .

Rovnice a matice afinných zobrazení

Nech $E = (O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ je repér priestoru R_n ,

$$X^E = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad X'^E = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

a nech $\alpha : R_n \rightarrow R_n$, $X \mapsto X'$ je zobrazenie dané sústavou rovníc

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 g_{11} + \dots + x_n g_{1n} + q_1 \\ &\vdots \\ x'_n &= x_1 g_{n1} + \dots + x_n g_{nn} + q_n \end{aligned} \quad (15.6)$$

ktorú skrátene píšeme ako maticovú rovnicu

$$(\alpha X)^E = GX^E + Q, \quad (15.7)$$

kde G, Q sú príslušné matice (dané nad poľom R) typu $n \times n$ resp. $n \times 1$.

Veta 15.6 Zobrazenie $\alpha : R_n \rightarrow R_n$ dané rovnicou (15.7) je afinné zobrazenie. Jeho stopa je daná rovnosťou

$$(\alpha^\# \vec{v})^E = G\vec{v}^E. \quad (15.8)$$

Dôkaz. Keď $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ je ľubovoľný vektor, potom

$$(\alpha B)^E - (\alpha A)^E = (G \cdot B^E + Q) - (G \cdot A^E + Q) = G \overrightarrow{AB}^E = G\vec{v}^E,$$

čiže vektor $(\alpha B)^E - (\alpha A)^E$ nezávisí na voľbe bodov A, B , preto existuje stopa zobrazenia α a jej predpis je $(\alpha^\# \vec{v})^E = G\vec{v}^E$. Keď označíme $\alpha^\#{}^E = G$ (túto maticu nazývame matica stopy afinného zobrazenia α v repére E) potom

$$(\alpha^\# \vec{v})^E = \alpha^\#{}^E \vec{v}^E; \quad (15.9)$$

Je zrejmé, že zobrazenie dané touto rovnicou je morfizmus $\vec{R}_n \rightarrow \vec{R}_n$, tým je dôkaz skončený.

Nech α je afinné zobrazenie. Kumuláciou vektorov nejakej sústavy F do matice F^E a aplikáciou rovnosti (15.9) dostávame, že pre všetky (prípustné) i , je i -tý stĺpec matice $\alpha^\#{}^E F^E$ obraz i -tého vektora sústavy F , t.j.

$$(\alpha^\# F)^E = \alpha^\#{}^E F^E. \quad (15.10)$$

Lema 15.7 Ak α je afinné zobrazenie, A je bod a \vec{v} vektor, tak

$$\alpha(A + \vec{v}) = \alpha A + \alpha^\# \vec{v}. \quad (15.11)$$

Dôkaz. Keď $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, potom $\alpha^\#(\vec{v}) = \alpha^\#(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{\alpha A \alpha B} = \alpha B - \alpha A$, odkiaľ $\alpha B = \alpha A + \alpha^\# \vec{v}$.

Veta 15.8 Keď $\alpha : R_n \rightarrow R_n$, $X \mapsto X'$ je afinné zobrazenie a E je repér priestoru R_n , potom existuje jediná matica G a jediná matica Q tak, že $(\alpha X)^E = GX^E + Q$ t.j. existuje jediná matica

$$\alpha^E = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} & q_1 \\ & & \vdots & \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} & q_n \end{pmatrix} \quad (15.12)$$

tak, že platí (15.6). Maticu (15.12) nazývame matica afinného zobrazenia α (v repére E).

Dôkaz. Nech $Q_E = [q_1, \dots, q_n]$, $\alpha O = Q$, $\alpha^\# \vec{e}_i = \vec{g}_i$, t.j. $\alpha E = (Q, \vec{g}_1, \dots, \vec{g}_n)$ a nech $(\vec{g}_i)_E = (g_{1i}, \dots, g_{ni})$. Z rovnosti $X = O + x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n$ dostávame (podľa (15.11))

$$\alpha X = \alpha(O) + \alpha^\#(x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n)$$

$$X' = Q + x_1 \vec{g}_1 + \dots + x_n \vec{g}_n.$$

Ak túto rovnicu rozpíšeme do súradníc, dostaneme 15.6; táto sústava rovníc vyjadruje závislosť medzi súradnicami bodu X a jeho obrazu X' v afinnom zobrazení α (v danom repére E).

Determinant afinného zobrazenia

Nech E, F sú dve bázy priestoru \vec{R}_n a φ jeho endomorfizmus. Potom

$$\varphi^E = F^E \varphi^F E^F. \quad (15.13)$$

Skutočne, ak \vec{v} je vektor, tak $\varphi^E \vec{v}^E = (\varphi \vec{v})^E = F^E (\varphi \vec{v})^F = F^E \varphi^F \vec{v}^F = F^E \varphi^F E^F \vec{v}^E$, čo implikuje (15.13). Je zrejmé, že determinanty matíc oboch strán rovnosti (15.13) sú rovnaké, preto

$$\det \varphi^E = \det(F^E \varphi^F E^F) = \det F^E \det \varphi^F \det E^F = \det F^E \det E^F \det \varphi^F = \det \varphi^F$$

čo znamená, že determinant matice endomorfizmu nezávisí na voľbe bázy.

Definícia 15.9 Determinant matice stopy afinného zobrazenia α nazývame determinant afinného zobrazenia α a tiež determinant stopy $\alpha^\#$ afinného zobrazenia α ; označenie $\det \alpha$.

Cvičenie

15.1 Dokážte, že nasledujúca matica je matica rovnoľahlosti $\rho : R_n \rightarrow R_n$, so stredom $S[s_1, \dots, s_n]$ a charakteristikou $k \neq 0$

$$\begin{pmatrix} k & 0 & \cdots & 0 & s_1(1-k) \\ 0 & k & \cdots & 0 & s_2(1-k) \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & k & s_n(1-k) \end{pmatrix}.$$

15.2 Dokážte, že stred neidentické rovnoľahlosti je jej jediný samodružný bod (bod A je samodružný v zobrazení α , keď $\alpha(A) = A$).

15.3 Nech α je afinné zobrazenie. Dokážte, že platia tvrdenia

1. α je injektia práve vtedy, keď $\det \alpha \neq 0$
2. α je surjektia práve vtedy, keď $\det \alpha \neq 0$.

15.4 Nech α je afinné zobrazenie. Dokážte, že platia tvrdenia

1. $\alpha^\#$ je injektia práve vtedy, keď $\det \alpha^\# \neq 0$
2. $\alpha^\#$ je surjektia práve vtedy, keď $\det \alpha^\# \neq 0$
3. $\text{Ker } \alpha^\# = \{\vec{o}\} \Leftrightarrow \det \alpha^\# \neq 0$.

15.5 Dokážte, že lineárna nezávislosť vektorov je invariant každého monomorfizmu.

Afinná grupa

Z Cvičení 15.3, 15.4 vyplýva nasledujúca

Veta 15.10 *Nech α je afinné zobrazenie na R_n . Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:*

- (i) α je afinita
- (ii) α je injekcia
- (iii) α je surjekcia
- (iv) $\alpha^\#$ je automorfizmus
- (v) $\alpha^\#$ je monomorfizmus
- (vi) $\alpha^\#$ je epimorfizmus
- (vii) $\det \alpha \neq 0$.

Veta 15.11 *Nech afinné zobrazenia α, β na R_n sú dané maticovými rovnicami*

$$\alpha X = G.X + Q, \quad \beta X = H.X + R.$$

Potom maticová rovnica súčinu $\alpha\beta$ je

$$(\alpha\beta)(X) = (G.H).X + G.R + Q.$$

Keď α je bijekcia, potom

$$\alpha^{-1}X = G^{-1}.X - G^{-1}.Q.$$

Dôkaz. $(\alpha \circ \beta)(X) = \alpha(\beta(X)) = \alpha(H.X + R) = G(H.X + R) + Q = (G.H).X + G.R + Q$. Keď α je bijekcia, determinant matice G , ktorá je maticou stopy $\alpha^\#$ je rôzny od nuly, preto existuje inverzná matica G^{-1} . Položme v rovnici $\alpha X = G.X + Q$ miesto X všade $\alpha^{-1}X$. Potom $\alpha \alpha^{-1}X = G.\alpha^{-1}X + Q$, t.j. $X = G.\alpha^{-1}X + Q$, $G^{-1}.(X - Q) = \alpha^{-1}X$, $\alpha^{-1}X = G^{-1}.X - G^{-1}.Q$.

Z Vety 15.11 priamo vyplýva

Veta 15.12 *Súčin dvoch afinných zobrazení na R_n je afinné zobrazenie na R_n , súčin afinít je afinita. Inverzné zobrazenie k afinite je afinita. Stopa súčinu afinných zobrazení je súčin stôp týchto zobrazení a stopa inverznej afinity je inverzné zobrazenie k stope pôvodnej afinity, t.j.*

$$(\alpha \circ \beta)^\# = \alpha^\# \circ \beta^\# \tag{15.14}$$

$$(\gamma^{-1})^\# = (\gamma^\#)^{-1} \tag{15.15}$$

Veta 15.13 *Všetky afinity na R_n tvoria grupu zobrazení (nazývame ju afinná grupa priestoru R_n).*

Príklad 15.14 *Dané sú afinné zobrazenia na R_2 rovnicami*

$$\alpha : \begin{aligned} x'_1 &= 5x_1 + 3x_2 + 4 \\ x'_2 &= x_1 + x_2 - 2 \end{aligned}$$

$$\beta : \begin{aligned} x'_1 &= 2x_1 + 2x_2 - 9 \\ x'_2 &= -1.5x_1 - 2x_2 + 13.5 \end{aligned}$$

Určte rovnice a matice zobrazení α^{-1} , β^{-1} , $\alpha \circ \beta$, $\beta \circ \alpha$.

Riešenie. Rovnice inverzného zobrazenia α^{-1} k affine α určíme z jej sústavy rovníc tak, že riešime túto sústavu o neznámych x_1, x_2 ; dostaneme

$$\begin{aligned}x_1 &= 0,5x'_1 - 1,5x'_2 - 5 \\x_2 &= -0,5x'_1 + 2,5x'_2 + 7\end{aligned}$$

potom v týchto rovniciach urobíme záměny $x_1 \leftrightarrow x'_1$, $x_2 \leftrightarrow x'_2$:

$$\alpha^{-1}: \quad \begin{aligned}x'_1 &= 0,5x_1 - 1,5x_2 - 5 \\x'_2 &= -0,5x_1 + 2,5x_2 + 7\end{aligned}$$

Podobne zistíme, že

$$\beta^{-1}: \quad \begin{aligned}x'_1 &= 2x_1 + 2x_2 - 9 \\x'_2 &= -1,5x_1 - 2x_2 + 13,5\end{aligned}$$

Aby sme našli rovnice zobrazenia $\beta \circ \alpha$ predpokladajme, že

$$X = [x_1, x_2] \xrightarrow{\alpha} X' = [x'_1, x'_2] \xrightarrow{\beta} X'' = [x''_1, x''_2].$$

Potom $(\beta \circ \alpha)(X) = X''$ takže "vzťahy" medzi súradnicami bodov X, X'' budú hľadané rovnice. Z rovnosti $\beta X' = X''$ vyplýva:

$$\begin{aligned}x''_1 &= 2x'_1 + 2x'_2 - 9 \\x''_2 &= -1,5x'_1 - 2x'_2 + 13,5\end{aligned}$$

použitím rovníc zobrazenia α máme

$$\begin{aligned}x''_1 &= 2(5x_1 + 3x_2 + 4) + 2(x_1 + x_2 - 2) - 9 \\x''_2 &= -1,5(5x_1 + 3x_2 + 4) - 2(x_1 + x_2 - 2) + 13,5\end{aligned}$$

odkiaľ dostávame rovnice zobrazenia $\beta \circ \alpha$

$$\beta \circ \alpha: \quad \begin{aligned}x'_1 &= 12x_1 + 8x_2 - 5 \\x'_2 &= -9,5x_1 - 6,5x_2 + 11,5\end{aligned}$$

Analogicky zistíme, že

$$\alpha \circ \beta: \quad \begin{aligned}x'_1 &= 5,5x_1 + 4x_2 - 0,5 \\x'_2 &= 0,5x_1 + 2,5\end{aligned}$$

sú rovnice zobrazenia $\alpha \circ \beta$.

Mohli sme si všimnúť, že zobrazenia β, β^{-1} majú tú istú sústavu rovníc, preto $\beta = \beta^{-1}$. Také zobrazenia, ktoré sa rovnajú svojim inverzným zobrazeniam nazývame *involutórne zobrazenia* (alebo len involúcie). Ďalej $\alpha \circ \beta$, $\beta \circ \alpha$ majú rôzne rovnice, preto všeobecne neplatí komutatívny zákon pre skladanie zobrazení.

Jednoduchým kalkulom matíc možno ukázať, že matice zobrazení $\alpha^{-1}, \alpha \circ \beta$ atď. môžeme vypočítať aj nasledovne (α, β sú dané ako v príklade 15.14). Matice zobrazení α, β

$$\alpha: \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = A \quad \beta: \begin{pmatrix} 2 & 2 & -9 \\ -1,5 & -2 & +13,5 \end{pmatrix} = B$$

upravíme na matice

$$A^* = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -9 \\ -1,5 & -2 & -13,5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

t.j. ku A (resp. B) pridáme tretí riadok 0 0 1. Ak z matice A^{*-1} (t.j. matice inverznej k matici A^*) vynecháme posledný riadok dostaneme maticu zobrazenia α^{-1} . Podobne ak z matice $A^*.B^*$ (t.j. súčinu matíc A^* , B^*) vynecháme posledný riadok dostaneme maticu súčinu $\alpha \circ \beta$. Maticu A^{-1} nájdeme známym spôsobom. Utvoríme maticu algebraických doplnkov k matici A^* , túto transponujeme a každý prvok takto získanej matice delíme determinantom matice A^* (ktorý je 2) a dostaneme hľadanú maticu; popísané matice sú:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ -10 & 14 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & -10 \\ -1 & 5 & 14 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0.5 & -1.5 & -5 \\ 0.5 & 2.5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cvičenie

15.6 Dokážte, že zobrazenie $\beta : R_2 \rightarrow R_2, X[x_1, x_2] \mapsto X'[|x_1|, |x_2|]$ nie je afinné zobrazenie.

15.7 Nájdite také dve rôzne afinné zobrazenia, ktoré majú rovnaké stopy.

15.8 Dané je afinné zobrazenie

$$\alpha^E = \begin{pmatrix} 3 & 12 & 5 \\ 5 & 20 & -7 \end{pmatrix}.$$

Nájdite dva rôzne body, ktorých obrazy v α splývajú.

15.9 Dokážte, že neidentická rovnoláhosť ρ a afinita α priestoru R_n komutujú (t.j. $\rho\alpha = \alpha\rho$) práve vtedy, keď stred rovnoláhlosti je samodružným bodom afinity α .

16 Invarianty afinných zobrazení

Ak U je útvar afinného priestoru R_n a α je zobrazenie $R_n \rightarrow R_n$, kladieme $\alpha U = \{\alpha X; X \in U\}$ a hovoríme, že αU je obraz útvaru U v zobrazení α . Ak $\alpha U = U$ hovoríme, že útvar U je samodružný útvar zobrazenia α . Invariant zobrazenia α je také relácia θ na množine útvarov afinného priestoru R_n , ktorú α nemení, t.j. ak útvary U_1, \dots, U_s sú v relácii θ , tak aj útvary $\alpha U_1, \dots, \alpha U_s$ sú v relácii θ .

Nech $\alpha : R_n \rightarrow R_n$ je afinné zobrazenie, X, A_0, \dots, A_s sú body priestoru R_n a v poradí X', A'_0, \dots, A'_s ich obrazy v α . Potom

$$X = A_0 + p_1 \overrightarrow{A_0 A_1} + \dots + p_s \overrightarrow{A_0 A_s} \Rightarrow X' = A'_0 + p_1 \overrightarrow{A'_0 A'_1} + \dots + p_s \overrightarrow{A'_0 A'_s}. \quad (16.1)$$

Skutočne

$$\begin{aligned} \alpha(A_0 + p_1 \overrightarrow{A_0 A_1} + \dots + p_s \overrightarrow{A_0 A_s}) &= \alpha A_0 + \alpha^\#(p_1 \overrightarrow{A_0 A_1} + \dots + p_s \overrightarrow{A_0 A_s}) = \\ \alpha A_0 + p_1 \alpha^\# \overrightarrow{A_0 A_1} + \dots + p_s \alpha^\# \overrightarrow{A_0 A_s} &= \alpha A_0 + (p_1 \overrightarrow{\alpha A_0 \alpha A_1} + \dots + p_s \overrightarrow{\alpha A_0 \alpha A_s}) = \\ A'_0 + p_1 \overrightarrow{A'_0 A'_1} + \dots + p_s \overrightarrow{A'_0 A'_s}. \end{aligned}$$

Z rovnosti (16.1) priamo vyplýva identita

$$\alpha(\overrightarrow{A_0 \dots A_s}) = \overrightarrow{\alpha A_0 \dots \alpha A_s}. \quad (16.2)$$

Dôsledok 16.1 Každé afinné zobrazenie definované na R_n zobrazí podpriestor priestoru R_n na podpriestor priestoru R_n (pričom dimenzia obrazu \leq dimenzia vzoru). Vlastnosť "byť podpriestorom" a afinná závislosť bodov je invariantom každého afinného zobrazenia.

Z cvičenia 15.5 priamo vyplýva

Veta 16.2 Afinná nezávislosť bodov a dimenzia afinného priestoru je invariantom každej afinity.

Veta 16.3 Afinné zobrazenie je afinita práve vtedy, keď deliaci pomer je jeho invariant.

Dôkaz. Keď α je afinita, je α aj injekcia, preto $A \neq B \Rightarrow \alpha A \neq \alpha B$, čiže pre tri kolineárne body je vzhľadom na Vetu 15.5 jediná možnosť: $(\alpha A \alpha B \alpha C) = (ABC)$. Obrátene, ak deliaci pomer je invariant afinného zobrazenia, nemôžu sa dva kolineárne body zobraziť do jedného, preto α je injekcia a teda aj afinita.

Bod A nazývame *samodružným* (alebo *invariantným*) bodom zobrazenia α , ak $\alpha A = A$. Množinu všetkých samodružných bodov zobrazenia α označujeme *sab* α .

V prípade, že v (16.1) je každý z bodov A_0, \dots, A_s samodružný, t.j. $A_0 = A'_0, \dots, A_s = A'_s$, je aj $X = X'$ a teda aj X je samodružný. Preto platí

Veta 16.4 Každý bod afinného obalu množiny samodružných bodov je samodružný.

Dôsledok 16.5 Množina všetkých samodružných bodov afinného zobrazenia je buď \emptyset alebo podpriestor afinného priestoru.

Dôsledok 16.6 Ak každý bod nejakého simplexu afinného priestoru R_n je samodružný bod afinného zobrazenia α , tak $\alpha : R_n \rightarrow R_n$ je identita.

Tento dôsledok špeciálne znamená, že afinné zobrazenie na rovine (resp. na priamke) je identita, ak má tri nekolineárne (resp. dva rôzne) body samodružné.

Ak $A+V, B+U$ sú rovnobežné podpriestory priestoru R_n , tak $U \subset V$ alebo $V \subset U$ a preto aj $\alpha^\#U \subset \alpha^\#V$ alebo $\alpha^\#V \subset \alpha^\#U$, pre každé afinné zobrazenie α na R_n . To znamená, že $\alpha(A+V) = \alpha A + \alpha^\#V$, $\alpha(B+U) = \alpha B + \alpha^\#U$ sú opäť rovnobežné podpriestory afinného priestoru. Platí teda

Veta 16.7 Rovnobežnosť podpriestorov afinného priestoru je invariant každého afinného zobrazenia.

Nech $\alpha : R_n \rightarrow R_n, n > 0$, je afinné zobrazenie. Nenulový vektor \vec{v} nazývame *vlastný vektor* zobrazenia α , keď existuje skalár $k \neq 0$ tak, že $\alpha^\#\vec{v} = k\vec{v}$. Smer určený vlastným vektorom \vec{v} je *samodružný smer* afinného zobrazenia α . Predpokladajme, že $(\alpha X)^E = G \cdot X^E + Q^E$; nech \vec{v} je vlastný vektor zobrazenia α . Potom

$$k\vec{v}^E = \alpha^\#\vec{v}^E = G \cdot \vec{v}^E, \quad (G - k \cdot 1^E) \cdot \vec{v}^E = \vec{0}^E;$$

Rozpísaním do súradníc dostaneme homogénnu sústavu n -lineárnych rovníc o n neznámych s parametrom k . Tá má nenulové riešenie práve vtedy, keď $\det(G - k \cdot 1^E) = 0$. Túto rovnicu n -tého stupňa o neznámej k nazývame *charakteristická rovnica* (afinity α) a jej korene *vlastné čísla* afinity α . Zrejme ku každému vlastnému číslu prislúcha aspoň jeden samodružný smer.

Veta 16.8 Rôznym vlastným číslam prislúchajú rôzne samodružné smery.

Dôkaz. Nech $k \neq r$ sú vlastné čísla afinného zobrazenia α , ktorým prislúcha smer určený nenulovým vektorom \vec{u} . Potom $\alpha^\#\vec{u} = k\vec{u}$ a $\alpha^\#\vec{u} = r\vec{u}$. Odčítaním týchto rovností dostaneme $k\vec{u} - r\vec{u} = \vec{0}$, $(k - r)\vec{u} = \vec{0}$, odkiaľ $k = r$ čo je spor s predpokladom.

Príklad 16.9 Afinita α na R_2 je daná sústavou rovníc

$$\alpha : \begin{aligned} x'_1 &= 2x_1 + 3x_2 + 5 \\ x'_2 &= 7x_1 + 10x_2 - 3. \end{aligned}$$

Vypočítajte všeobecnú rovnicu nadroviny N' , ktorá je obrazom nadroviny $N : 5x_1 - 2x_2 + 4 = 0$ v afinite α .

Riešenie. Sústavu rovníc afinity α riešime vzhľadom na neznáme x_1, x_2 , dostaneme

$$\begin{aligned} x'_1 &= -10x_1 + 3x_2 + 59 \\ x'_2 &= 7x_1 - 2x_2 - 41. \end{aligned}$$

Tieto rovnice dosadíme do rovnice nadroviny N :

$$5(-10x'_1 + 3x'_2 + 59) - 2(7x'_1 - 2x'_2 - 41) + 4 = 0$$

odkiaľ dostávame rovnicu nadroviny $N' : -64x_1 + 19x_2 + 381 = 0$.

Cvičenie

16.1 Dokážte, že afinná nezávislosť bodov nie je invariant afinných zobrazení.

16.2 Nech $\alpha : R_1 \rightarrow R_1$ je afinné zobrazenie, ktoré nie je afinita. Dokážte, že existuje bod $A' \in R_1$ tak, že pre každé $X \in R_1$ je $\alpha X = A'$.

16.3 Nech $\alpha : R_n \rightarrow R_n, n > 0$, je afinné zobrazenie, pre ktoré $|\alpha R_n| \neq 1$. Dokážte, že existuje sústava lineárne nezávislých vektorov priestoru \vec{R}_n , ktorú $\alpha^\#$ zobrazí do lineárne nezávislej sústavy vektorov.

16.4 Určte rovnicu samodružnej priamky zobrazenia $\alpha : R_2 \rightarrow R_2$ daného maticou

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 12 \\ 1 & 4 & 14 \end{pmatrix}.$$

Koľko je takých priamok? Určte rovnicu aspoň jednej takej priamky L , že $L \neq \alpha L$ a $L \parallel \alpha L$.

16.5 Daná je afinita α maticou

$$\begin{pmatrix} 2 & -6 & 8 \\ 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Nájdite všetky také pravé uhly, každý z ktorých α zobrazí na pravý uhol.

16.6 Dokážte, že kolmosť vektorov je invariant afinity

$$\alpha^E = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 80 \\ 7 & 5 & 20 \end{pmatrix}$$

keď E je ortonormálny repér.

16.7 Daný je repér $E = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ priestoru E_3 a vektor $\vec{a}_E = (-3, 1, 7)$. Nech $\alpha : E_3 \rightarrow E_3$ je také afinné zobrazenie, že $\alpha^\# \vec{e}_1 = \vec{e}_1, \alpha^\# \vec{e}_2 = \vec{e}_2, \alpha^\# \vec{a} = 5\vec{a}$. Vypočítajte α^E , keď $sab \alpha$ je rovina.

16.8 Dokážte, že keď afinné zobrazenie α zobrazí dve mimobežky K, L do jedného bodu A , potom α zobrazí afinný obal zjednotenia $K \cup L$ do bodu A .

16.9 Dokážte, že keď afinita $\alpha : R_2 \rightarrow R_2$ má aspoň tri samodružné smery, potom každý smer je samodružný.

16.10 Dokážte, že keď afinita $\alpha : R_2 \rightarrow R_2$ má aspoň dve (rôzne) vlastné čísla, pričom ani jedno nie je 1, potom má práve jeden samodružný bod.

16.11 Dokážte, že keď existujú dva nenulové kolmé vektory, ktoré stopa afinného zobrazenia $\alpha : R_2 \rightarrow R_2$ zobrazí na kolmé nenulové vektory, potom existuje štvorec, ktorý α zobrazí na kosoštvorec.

16.12 Dokážte, že keď P je jediný samodružný bod afinity $\alpha : R_n \rightarrow R_n$, potom leží v každej samodružnej nadrovine tejto afinity.

17 Určenosť afinného zobrazenia

Vieme, že afinné zobrazenie na R_n možno zadať maticou typu $n \times (n + 1)$ (jej prvky sú prvky poľa R). Tento "aritmetický" spôsob možno nahradiť "geometrickým". Ukazuje to nasledujúca

Veta 17.1 (o určenosti afinného zobrazenia) Nech A_o, A_1, \dots, A_n je simplex a A'_o, A'_1, \dots, A'_n sú ľubovoľné body priestoru R_n . Existuje práve jedno afinné zobrazenie α na R_n tak, že $\alpha A_o = A'_o, \dots, \alpha A_n = A'_n$.

Dôkaz. Označme $\vec{A}_o \vec{A}_i = \vec{e}_i, \vec{A}'_o \vec{A}'_i = \vec{g}_i$ pre všetky $i > 0$. Sústava vektorov $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ je báza priestoru \vec{E}_n , preto $(A_o, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) = E$ je repér priestoru R_n . Ak $X_E = [x_1, \dots, x_n], (\vec{g}_i)_E = (g_{1i}, \dots, g_{ni})$ a $\alpha^\# \vec{e}_i = \vec{g}_i$, tak

$$X' = \alpha X = \alpha(A_o + x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n) = \alpha A_o + \alpha^\#(x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n) = A'_o + x_1 \vec{g}_1 + \dots + x_n \vec{g}_n.$$

Nech $X'_E = [x'_1, \dots, x'_n]$. Ak vyššiu rovnosť prepíšeme do súradníc v repére E dostaneme sústavu rovníc (15.6). Podľa Vety 15.7 α je jednoznačne určené afinné zobrazenie, ktoré zobrazí $A_i \mapsto A'_i$; je totiž $A_i = A_0 + \overrightarrow{A_0A_i}$ odkiaľ $\alpha A_i = A'_0 + \overrightarrow{A'_0A'_i} = A'_i$.

Ak túto vetu interpretujeme na rovine, dostaneme: Ku každému trojuholníku ABC a ľubovoľným bodom A', B', C' existuje práve jedno afinné zobrazenie definované na danej rovine, ktoré zobrazí $A \mapsto A', B \mapsto B', C \mapsto C'$.

Ak vo vete 17.1 je A'_0, \dots, A'_n tiež simplex priestoru R_n , t.j. α je afinita, dostávame vetu:

Veta 17.2 (o určenosti afinity) *Ku každým dvom simplexom $A_0, \dots, A_n, A'_0, \dots, A'_n$ priestoru R_n existuje práve jedno afinné zobrazenie $\alpha : R_n \rightarrow R_n$ tak, že $\alpha A_i = A'_i$ pre $i = 0, 1, \dots, n$. Toto afinné zobrazenie je afinita.*

Veta 17.3 (o určenosti afinného zobrazenia) *Nech $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ je repér, Q ľubovoľný bod a $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$ ľubovoľná sústava vektorov priestoru \vec{E}_n . Existuje práve jedno afinné zobrazenie α na R_n tak, že $\alpha O = Q$ a $\alpha^\#(\vec{e}_i) = \vec{f}_i$ pre všetky $i = 1, \dots, n$.*

Veta 17.4 (o určenosti afinného zobrazenia) *Ku každým dvom repérom $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n), (Q, \vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$ priestoru R_n , existuje práve jedna afinita α na R_n tak, že $\alpha O = Q$ a $\alpha^\#(\vec{e}_i) = \vec{f}_i$ pre všetky $i = 1, \dots, n$.*

Cvičenie

17.1 V E_2 sú dané dva trojuholníky ABC, DFG a bod H . Zostrojte (pravítkom a kružítkom) obraz bodu H v afinite $\alpha : E_2 \rightarrow E_2, A \mapsto D, B \mapsto F, C \mapsto G$.

17.2 V R_4 sú dané body

$$\begin{array}{llll} A_0 = [2, 4, 0, 0] & A_1 = [-1, 0, 0, 1] & A_2 = [2, 1, 3, 1] & A_3 = [5, 8, 0, -1] \\ A'_0 = [1, 0, 1, 0] & A'_1 = [0, 0, 3, 0] & A'_2 = [2, 3, 0, 1] & A'_3 = [4, -1, 0, 0]. \end{array}$$

Zistite, či existuje afinné zobrazenie $\alpha : R_4 \rightarrow R_4$ tak, že $\alpha A_i = A'_i, i = 0, 1, 2, 3$.

17.3 V R_3 sú dané body

$$\begin{array}{llll} A_0 = [4, 7, 6], & A_1 = [0, 3, 1], & A_2 = [5, 5, 7], & A_3 = [-6, -9, -7] \\ B_0 = [1, -2, 0], & B_1 = [3, 7, 7], & B_2 = [0, 1, 3], & B_3 = [5, 31, 27]. \end{array}$$

Zistite, či existuje afinné zobrazenie $\alpha : R_3 \rightarrow R_3$ tak, že $\alpha A_i = B_i, i = 0, 1, 2, 3$. Ak α existuje, vypočítajte jeho maticu.

17.4 V R_3 sú dané body $A_0 = [-4, 1, 7], A_1 = [0, 0, 1], A_2 = [1, 0, 7], A_3 = [-11, 3, 25], B_0 = [1, 2, 7], B_1 = B_2 = [3, 0, 7]$. Vypočítajte obraz bodu A_3 v afinnom zobrazení α , keď $\alpha A_i = B_i, i = 0, 1, 2$. Zistite, či existuje vzor bodu $B_4 = [-3, 4, 7]$. Zvoľte taký bod B_5 , aby množina všetkých jeho vzorov bola nekonečná.

17.5 V E_3 je daná kocka $ABCDEFGH$ a stred S uhlopriečky AC . Nech afinné zobrazenie $\alpha : E_3 \rightarrow E_3$ zobrazí $E \mapsto F \mapsto C, H \mapsto A, B \mapsto E$. Vo voľnom rovnobežnom premietaní zostrojte αS .

18 Priame a nepriame afinity

Keď E, G, H sú orientované bázy priestoru \vec{R}_n a α je afinita na R_n , potom

$$G \uparrow H \iff \det G^E \cdot \det H^E > 0 \iff \det \alpha^{\#E} \cdot \det G^E \cdot \det \alpha^{\#E} \cdot \det H^E > 0,$$

odkiaľ podľa (15.10)

$$G \uparrow H \iff \det(\alpha^{\#E} G^E) \cdot \det(\alpha^{\#E} H^E) > 0,$$

čiže každý automorfizmus vektorového priestoru \vec{R}_n zobrazí dve rovnako orientované bázy priestoru \vec{R}_n na rovnako orientované bázy tohto priestoru. To znamená, že buď mení orientáciu každej usporiadanej bázy priestoru \vec{R}_n alebo nemení orientáciu žiadnej bázy tohto priestoru. Ak usporiadaný simplex $S' = (A'_0, \dots, A'_n)$ je obraz usporiadaného simplexu $S = (A_0, \dots, A_n)$ v afinite α , tak simplexy S, S' sú rovnako orientované práve vtedy, keď usporiadané bázy $(\overrightarrow{A'_0 A'_1}, \dots, \overrightarrow{A'_0 A'_n}), (\overrightarrow{A_0 A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0 A_n})$ sú rovnako orientované a tie sú zasa rovnako orientované práve vtedy, keď determinant zobrazenia $\alpha^\#$ (t.j. determinant afinity α) je kladný. Z toho vyplýva

Lema 18.1 Každá afinita zobrazí dva rovnako (resp. nerovnako) orientované simplexy na rovnako (resp. nerovnako) orientované simplexy.

Definícia 18.2 Afinitu α na R_n , ktorá nemení (resp. mení) orientáciu priestoru R_n nazývame priama alebo súhlasná (resp. nepriama alebo nesúhlasná).

Dôsledok 18.3 Afinita je priama práve vtedy, keď jej stopa je priamy automorfizmus. Afinita je priama práve vtedy, keď jej determinant je kladný.

Veta 18.4 Všetky priame afinity na R_n tvoria grupu.

Dôkaz. Ak afinity α, β sú priame, potom ich determinanty sú kladné. Keďže $\det(\alpha \circ \beta) = \det \alpha \cdot \det \beta$ a $\det \alpha > 0, \det \beta > 0$, tak $\alpha \circ \beta$ je priama afinita. Podobne $\det(\alpha^{-1}) = (\det \alpha)^{-1}$ preto aj α^{-1} je priama afinita.

Dôkaz nasledujúcej vety prenechávame čitateľovi.

Veta 18.5 Súčin dvoch nepriamych afinít je priama afinita. Súčin priamej a nepriamej afinity je nepriama afinita. Súčin párneho počtu nepriamych afinít je priama afinita.

Cvičenie

18.1 Afinné zobrazenie $\alpha : E_2 \rightarrow E_2$ je dané maticou

$$\begin{pmatrix} t+1 & 5 & t \\ -1 & t+7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Určte t tak, aby (i) α nebola afinitou, (ii) α bola afinita, (iii) α bola nepriama afinita.

18.2 V E_2 je daný $\triangle ABC$. Dokážte, že afinita α , ktorá zobrazí $A \mapsto B, B \mapsto C, C \mapsto A$ je priama afinita a afinita β , ktorá zobrazí $A \mapsto B \mapsto A, C \mapsto C$ je nepriama.

18.3 Nech afinita α zobrazí body simplexu $S = (A_0, A_1, \dots, A_n)$, v poradí, na simplex $S = (A_1, A_0, A_2, A_3, \dots, A_n)$. Zistite, či α je priama afinita.

NIEKTORÉ TYPY AFINNÝCH ZOBRAZENÍ

19 Rovnobežné premietanie

Nech K, L sú také podpriestory priestoru R_n , že $\dim(K \cap L) = 0$ a $\dim K + \dim L = n$ (t.j. $\vec{K} \oplus \vec{L} = \vec{R}_n$). Pre každé $X \in R_n$ je $(X + \vec{L}) \cap K$ jednoprvková množina; skutočne, keďže spojenie $\vec{L} + \vec{K}$ zameraní priestorov $X + \vec{L}, K$ je \vec{R}_n , tak tieto priestory sa pretínajú (viď 2.7). Ďalej $\vec{K} \cap \vec{L} = \vec{o}$ preto množina $X + \vec{L} \cap K$ má najviac jeden prvok. Teda ku každému $X \in E_n$ existuje práve jeden bod $X' \in R_n$, ktorý je prienikom priestorov $X + \vec{L}, K$.

Definícia 19.1 Nech K je podpriestor priestoru R_n a W podpriestor priestoru \vec{R}_n tak, že $\vec{K} \oplus W = \vec{R}_n$. Zobrazenie

$$\pi : R_n \rightarrow R_n, \quad X \mapsto X' = (X + W) \cap K$$

nazývame rovnobežné premietanie do priestoru K . Afinný priestor K nazývame priemetňa a vektorový priestor W smer tohto premietania.

Veta 19.2 Každé rovnobežné premietanie je afinné zobrazenie.

Dôkaz. Nech π je rovnobežné premietanie do priemetne K so smerom W a nech $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_s$ je báza priestoru \vec{K} a $\vec{e}_{s+1}, \dots, \vec{e}_n$ je báza priestoru W (v prípade, že K je jeden bod, $s = 0$). Pretože $\vec{K} \oplus W = \vec{R}_n$ tak $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ je báza priestoru E_n . Nech $O \in K$ je ľubovoľný bod, $E = (O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ je réper priestoru E_n , $X_E = [x_1, \dots, x_n]$, $\pi X = X', X'_E = [x'_1, \dots, x'_n]$. Pretože $X' \in K$ a K je súradný priestor, tak $x'_{s+1} = \dots = x'_n = 0$. Vektor $\overrightarrow{XX'} \in W$, W je zameranie súradného priestoru, preto $x'_1 - x_1 = \dots = x'_s - x_s = 0$. To znamená, že súradnice bodov X, X' sú viazané rovnicami

$$x'_1 = x_1, \dots, x'_s = x_s, x'_{s+1} = 0, \dots, x'_n = 0,$$

takže že vzhľadom na Vetu 15.6, π je afinné zobrazenie; matica tejto sústavy je matica

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (19.1)$$

v ktorej prvých s prvkov na hlavnej diagonále je rovných 1 a ostatné sú nuly.

Ľahko sa dokázu nasledujúce dve lemy.

Lema 19.3 Ak $\alpha : R_n \rightarrow R_n$ je rovnobežné premietanie s priemetňou K a smerom W , tak $\dim \vec{K} + \dim W = n$, $\text{sab } \alpha = K$, $\text{Ker } \alpha^\# = W$.

Lema 19.4 Keď α je afinné zobrazenie, potom $\overrightarrow{\text{sab } \alpha} \cap \text{Ker } \alpha^\# = \vec{o}$.

Veta 19.5 Afinné zobrazenie $\alpha : R_n \rightarrow R_n$, je rovnobežné premietanie práve vtedy, keď

$$\dim \text{sab } \alpha + \dim \text{Ker } \alpha^\# = n. \quad (19.2)$$

Dôkaz. \Rightarrow Ak α je rovnobežné premietanie s priemetňou K a smerom W , tak $\dim K + \dim W = n$, odkiaľ podľa Lemy 19.3 dostávame (19.2). \Leftarrow Nech $\alpha : R_n \rightarrow R_n$ je afinné zobrazenie, pre ktoré platí (19.2). Označme $K = \text{sab } \alpha$, $W = \text{Ker } \alpha^\#$. Pretože $\vec{K} \oplus W = \vec{R}_n$, môžeme definovať rovnobežné premietanie π s priemetňou K a smerom W ; nech X je ľubovoľný bod a $X' = \pi X$. Teraz stačí dokázať $X' = \alpha X$: zrejme $X' = \pi X = (X + W) \cap K$, preto $\overrightarrow{XX'} \in W = \text{Ker } \alpha^\#$, odkiaľ $\alpha^\# \overrightarrow{XX'} = \vec{o}$, t.j. $\overrightarrow{\alpha X \alpha X'} = \vec{o}$, keďže $\alpha X' = X'$ ($X' \in K = \text{sab } \alpha$), tak $\overrightarrow{\alpha X X'} = \vec{o}$, odkiaľ $X' = \alpha X$.

Príklad 19.6 Dokážte, že zobrazenie $\pi : E_n \rightarrow E_n$ dané sústavou rovníc

$$\begin{aligned}x'_1 &= 3x_1 - 6x_2 + 8 \\x'_2 &= x_1 - 2x_2 + 4\end{aligned}$$

je rovnobežné premietanie.

Riešenie. *dim sab* π zistíme, ak maticu

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -6 & 8 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

upravíme na trojuholníkovú maticu

$$\begin{pmatrix} 2 & -6 & 8 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

dim sab $\pi = 1$ (*sab* π je priamka o rovnici $x_1 - 3x_2 + 4 = 0$), *dim Ker* $\pi^\#$ zistíme, ak maticu

$$(\pi^\#)^E = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

upravíme na trojuholníkovú maticu

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dim Ker $\pi^\# = 1$ (*Ker* $\pi^\# = \langle(2, 1)\rangle$); *dim sab* $\pi + \text{dim Ker } \pi^\# = 2$, π je teda rovnobežné premietanie.

Ravnobežné premietanie $E_n \rightarrow E_n$, ktorého smer je totálne kolmý na zameranie priemetne nazývame *kolmé premietanie*.

Ravnobežné premietanie z príkladu 19.6 nie je kolmé, (predpokladáme ortonormálny repér) pretože smer $W = \langle(2, 1)\rangle$ nie je kolmý na priemetňu $x_1 - 3x_2 + 4 = 0$.

Ravnobežné premietanie je afinné zobrazenie, preto ďalšie vlastnosti ravnobežného premietania možno nájsť v článkoch 15 - 18.

Cvičenie

- 19.1 V E_3 sú dané body a vektory $A[1, -1, 0]$, $B[7, 2, 8]$, $C[2, 0, 8]$, $D[-4, 9, 20]$ $\vec{a}(2, 1, 5)$, $\vec{b}(-1, 0, 3)$, $\vec{v}(2, 0, 1)$. Nech $\pi : E_3 \rightarrow E_3$ je ravnobežné premietanie s priemetňou $N = A + \langle\vec{a}, \vec{b}\rangle$ a smerom $W = \langle\vec{v}\rangle$. Dokážte, že priamky AB , CD sú mimobežné, a že ich priemety $\pi\overline{AB}$, $\pi\overline{CD}$ sú ravnobežné priamky.
- 19.2 Daný je bod A a ravnobežné premietanie π ako v cvičení 1. Určte taký bod $G \in E_3$, aby $\pi(G) = A$. Čo je priemetom priamky AG ?
- 19.3 Napíšte rovnice premietania π z predošlého cvičenia 1 v repére $E = (A; \vec{a}, \vec{b}, \vec{v})$ a potom v repére, v ktorom sú udané všetky súradnice z cvičenia 1.
- 19.4 Napíšte rovnice premietania π z predošlého cvičenia 1 v repére $F = (A; \vec{v}, \vec{a}, \vec{b})$.
- 19.5 Nech $\pi : R_n \rightarrow R_n$ je ravnobežné premietanie s priemetňou N a smerom W a nech $L \subset R_n$. Dokážte, že

(i) $L \parallel W \Rightarrow N \cap L = \emptyset$ alebo $\text{dim } \pi(L) = \text{dim}(N \cap L)$

(ii) $\vec{L} \subset W \Rightarrow \pi(L)$ je bod.

20 Perspektívna afinita

Nech $\alpha : R_n \rightarrow R_n$ je afinita a nech $A_o = \alpha A_o, \dots, A_{n-1} = \alpha A_{n-1}, A_n \neq A'_n = \alpha A_n$. Potom každý bod nadroviny $N = \overline{A_o, \dots, A_{n-1}}$ je samodružný bod afinity α a iné samodružné body α nemá (ak by existoval samodružný bod S , neležiaci v nadrovine N , podľa dôsledku 16.6 α by bola identita, čiže $A_n = A'_n$ a to odporuje predpokladu). To znamená, že v každom priestore $R_n, n > 0$, existuje afinita, ktorej všetky samodružné body tvoria nadrovinu (a to dokonca vopred zvolenú). Také afinity hrajú významnú úlohu v afinnej grupe.

Definícia 20.1 Afinitu priestoru $R_n, n > 0$, ktorej množina všetkých samodružných bodov je nadrovina nazývame perspektívna afinita (alebo nadrovinová afinita) priestoru R_n ; množinu všetkých samodružných bodov perspektívnej afinity nazývame os tejto afinity.

Dôsledok 20.2 Každá afinita na R_n , ktorá má aspoň n -afinne nezávislých bodov samodružných je perspektívna afinita alebo identita.

Z vety 17.1 vyplýva, že perspektívna afinita je jednoznačne určená osou a párom nesamodružných odpovedajúcich si bodov (t.j. bodom a jeho obrazom).

Ak α je afinné zobrazenie a $P \neq \alpha P$, priamku $\overline{P\alpha P}$ nazývame afinitná priamka (zobrazenia α).

Veta 20.3 Všetky afinitné priamky perspektívnej afinity sú navzájom rovnobežné a každá z nich je samodružná.

Dôkaz. Nech γ je perspektívna afinita určená osou N a párom bodov $A, A' = \gamma A$ a nech $P \in N$. Pretože $\vec{N} \oplus \langle \overrightarrow{PA} \rangle = \vec{R}_n$, pre ľubovoľný bod $X \in R_n$ existuje práve jeden vektor $\vec{v} \in \vec{N}$ a jediné reálne číslo r tak, že $X = P + \vec{v} + r\overrightarrow{PA}$, odkiaľ $X' = \mu X = \mu(P + \vec{v} + r\overrightarrow{PA}) = P + \vec{v} + r\overrightarrow{PA'}$, takže $\overrightarrow{XX'} = X' - X = r(\overrightarrow{PA'} - \overrightarrow{PA}) = r\overrightarrow{AA'}$ a to znamená, že všetky afinitné priamky sú navzájom rovnobežné. Ak $\overline{XX'}$ je afinitná priamka, je ňou aj jej obraz, priamka $X'\gamma X'$; obe priamky sú navzájom rovnobežné (podľa predošlej časti dôkazu) a prechádzajú bodom X' , preto sú totožné.

Definícia 20.4 Množinu všetkých afinitných priamok perspektívnej afinity nazývame smer tejto afinity.

Veta 20.5 Priamka a jej obraz v perspektívnej afinite sú buď rovnobežné (a vtedy sú rovnobežné s osou alebo smerom afinity) alebo rôznobežné (vtedy sa pretínajú na osi tejto afinity).

Dôkaz. Nech priamka L je rovnobežná s osou N afinity γ ; potom

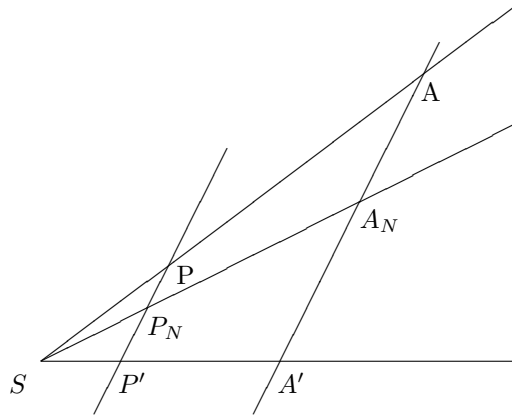
$$L = C + \langle \vec{a} \rangle, \vec{a} \in \vec{N}, \gamma L = \gamma C + \langle \gamma \# \vec{a} \rangle = \gamma C + \langle \vec{a} \rangle$$

a teda $L \parallel \gamma L$. Ak $L \not\parallel N$, $L \cap N = \{Q\}$ a zrejme $Q \in \gamma L$.

Keď γ je perspektívna afinita na R_n s osou N , $A_n \notin N$ a $\gamma A_n = A'_n$, potom afinitná priamka $\overline{A_n A'_n}$ udáva smer tejto afinity. Body $A_n \neq A'_n$ sú ľubovoľné, preto sú dve možnosti, buď $\overline{A_n A'_n}$ pretína N alebo nepretína N .

Definícia 20.6 Perspektívnu afinitu, ktorej nejaká afinitná priamka pretína jej os (resp. nepretína) nazývame homológia (resp. elácia).

Nech $\overline{AA'}$, $\overline{PP'}$ sú rôzne afinitné priamky homológie γ s osou N a nech $\overline{AA'} \cap N = A_N$, $\overline{PP'} \cap N = P_N$. Ak $\overline{AP} \parallel N$, tak aj $\overline{A'P'} \parallel N$ a podľa Vety 20.5 $\overline{AP} \parallel \overline{A'P'}$ preto podľa Dôsledku 5.7 $(\gamma PPP_N) = (\gamma AAA_N)$. V prípade, že $S = \overline{AP} \cap N$ (viď obrázok) platí tiež $\overline{A'P'} \cap N = S$, takže podľa Vety 5.8 opäť $(\gamma PPP_N) = (\gamma AAA_N)$. To znamená, že platí



Veta 20.7 *Ku každej homológii γ s osou N existuje skalár k tak, že pre každý bod $X \notin N$, jeho obraz γX a priesečník $\overline{X\gamma X} \cap N = X_N$ platí*

$$(\gamma X X X_N) = k.$$

Skalár k nazývame charakteristika homológie γ . Homológiu s osou N , charakteristikou k a smerom s budeme označovať $\gamma[N, k, s]$.

Veta 20.8 *Determinant homológie sa rovná jej charakteristike, determinant ľubovoľnej elácie je 1.*

Dôkaz. Nech γ je perspektívna afinita s osou N , $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n-1}$ je báza priestoru \vec{N} , $O \in N$, $A \notin N$, $A' = \gamma A$, $\overrightarrow{OA} = \vec{e}_n$ a nech $E = (O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ je repér. Zrejme $\gamma^\# \vec{e}_i = \vec{e}_i$ pre všetky $i = 1, 2, \dots, n-1$. Ak γ je homológia, tak $\gamma^\# \vec{e}_n = k \vec{e}_n$ a ak γ je elácia, tak $\gamma^\# \vec{e}_n = \vec{e}_n + \vec{a}$, $\vec{a} \in \vec{N}$. Matice $\gamma^\#$ v repére E sú

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & k \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_2 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ich determinanty sú k resp. 1.

Úloha 20.9 *Dokážte, že inverzné zobrazenie k perspektívnej afinity je perspektívna afinita.*

Veta 20.10 *Nech α je afinita na R_n , $n > 0$. Existuje nie viac ako $n+1$ perspektívnych afínit na R_n tak, že ich súčin je α .*

Dôkaz. Keď α je identita, potom $\alpha = \nu_N \nu_N$ pre každú homológiu ν_N s charakteristikou -1. Predpokladajme, že α nie je identita; potom existuje také A , že $\alpha A = A' \neq A$. Označme $sab \alpha = L$; zrejme $A \notin L$, preto existuje nadrovina N , ktorá inciduje s L a neinciduje s A i A' (viď lemu 4.6). Nech ν_N je perspektívna afinita, ktorá zobrazí $A \mapsto A'$. Pretože $L \subset N$, afinita $\nu_N^{-1} \alpha = \alpha_o$ zobrazí L na L a $A \mapsto A$, preto $\overline{A \cup L} \subset sab \alpha_o$. $A \notin L$ implikuje $\dim L < \dim \overline{A \cup L}$ čiže platí $\dim sab \alpha < \dim sab \alpha_o$ a $\alpha = \nu_N \alpha_o$. Tento postup zopakujeme pre α_o , atď. Je zřejmé, že po konečnom počte krokov (nie väčšom ako n), α_i bude perspektívna afinita.

Dôsledok 20.11 *Množina všetkých perspektívnych afínit na R_n , $n > 0$, generuje afinnú grupu priestoru R_n .*

Príklad 20.12 *Nech $N = [d_1 \ d_2 \ \dots \ d_{n+1}]$ je nadrovina priestoru R_n a $A[a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$, $A'[a'_1 \ a'_2 \ \dots \ a'_n]$ sú rôzne body neležiace v N . Dokážte, že keď*

$$F(A) = d_1 a_1 + \dots + d_n a_n + d_{n+1}$$

a Δ_{ij} je Kronekerovo delta, potom matica, ktorej v i -tom riadku a j -tom stĺpci je prvok

$$\frac{(a'_i - a_i) d_j + \Delta_{ij} F(A)}{F(A)} \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, n+1$$

je matica perspektívnej afinity $\gamma[N, A \mapsto A']$.

Dôkaz. Maticu nájdeme takto: Matica pre $sab\gamma$ musí mať hodnotu 1, preto každý jej riadok musí byť nenulový násobok matice $(d_1 \ d_2 \ \dots \ d_{n+1})$. Po aplikácii súradníc bodov A, A' dostaneme požadované tvrdenie.

Cvičenie

- 20.1 Dokážte, že inverzné zobrazenie k homológii $\nu[N, k, s]$ je homológia $\nu^{-1}[N, k^{-1}, s]$.
- 20.2 Nech $\nu[N, k, s]$, $\mu[N, k^{-1}, t]$ sú homológie s nerovnoběžnými smermi s, t . Dokážte, že $\nu\mu$ je elácia s osou N .
- 20.3 Dokážte, že každá elácia je súčin dvoch homológií.
- 20.4 Nech L je afinitná priamka perspektívnej afinity. Dokážte, že zúženie $\nu|L$ je translácia, ak ν je elácia a rovnoľahlosť, ak ν je homológia.
- 20.5 Dokážte, že homológia je involúcia práve vtedy, keď jej charakteristika je -1.

21 Podobné zobrazenia

Mongeova grupa

Veta 21.1 Ak stopa afinity $\varphi : E_n \rightarrow E_n$ je skalárne násobenie skalárom $k \neq 0$, t.j. ak $\varphi^\# \vec{u} = k \cdot \vec{u}$ pre všetky $\vec{u} \in \vec{E}_n$, tak φ je rovnoľahlosť alebo translácia. Ak $k = 1$ tak φ je translácia, ak $k \neq 1$ φ je rovnoľahlosť (neidentická) s charakteristikou k .

Dôkaz. Keď $k = 1$, potom $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{\varphi X \varphi Y}$ odkiaľ aj $\overrightarrow{X \varphi X} = \overrightarrow{Y \varphi Y}$ pre všetky $X, Y \in E_n$ a to znamená, že φ je translácia (o vektor $\overrightarrow{X \varphi X}$). Nech $k \neq 1$; potom φ nie je identita a preto existuje A tak, že $A' = \varphi A \neq A$. Je zrejmé, že existuje bod S tak, že $(A'AS) = k$, t.j. $\overrightarrow{SA'} = k \overrightarrow{SA}$. Pretože $k \overrightarrow{SA} = \varphi^\# \overrightarrow{SA} = \varphi \overrightarrow{S \varphi A} = \overrightarrow{S' A'}$ (kde $S' = \varphi S$), tak $\overrightarrow{SA'} = \overrightarrow{S' A'}$, odkiaľ máme $S = S'$, čiže S je samodružný bod zobrazenia φ . Ak $X \in E_n$ je ľubovoľný bod a $X' = \varphi X$, tak $\overrightarrow{SX'} = \overrightarrow{S' X'} = \varphi^\# \overrightarrow{SX} = k \overrightarrow{SX}$, t.j. $\varphi X = S + k \overrightarrow{SX}$, φ je teda rovnoľahlosť.

Veta 21.2 (Mongeova) Súčin dvoch rovnoľahlostí priestoru E_n , $n > 0$, je rovnoľahlosť alebo translácia; translácia vtedy, keď súčin charakteristík daných rovnoľahlostí je 1, v ostatných prípadoch je to rovnoľahlosť (nerovnajúca sa identite), ktorej charakteristika sa rovná súčinu charakteristík daných rovnoľahlostí.

Dôkaz. Nech φ, ψ sú dve rovnoľahlosti s charakteristikami k, h . Potom

$$(\varphi \circ \psi)^\#(\vec{v}) = (\varphi^\# \circ \psi^\#)\vec{v} = \varphi^\#(\psi^\#\vec{v}) = k(h \cdot \vec{v}) = kh \cdot \vec{v}$$

t.j. stopa zobrazenia $\varphi \circ \psi$ je skalárne násobenie. Ostatná časť dôkazu vyplýva z Vety 21.1.

Analogicky sa dokáže

Veta 21.3 Súčin neidentickéj rovnoľahlosti a translácie priestoru E_n je rovnoľahlosť s tou istou charakteristikou.

Dôkaz nasledujúcej vety prenechávame čitateľovi.

Veta 21.4 Ak $\rho[S; k]$ je rovnoľahlosť, tak ρ^{-1} je rovnoľahlosť so stredom S a charakteristikou k^{-1} .

Inverzné zobrazenie k rovnoľahlosti resp. translácii je rovnoľahlosť resp. translácia; to spolu s Vetou 21.2 dokazuje nasledujúcu vetu.

Veta 21.5 Všetky rovnoľahlosti a translácie priestoru E_n tvoria grupu (nazývame ju Mongeova grupa). Grupa všetkých translácií a grupa všetkých rovnoľahlostí s tým istým stredom sú komutatívne podgrupy Mongeovej grupy.

Ekviformná grupa

Nech $\rho[S, k]$ je rovnoláhosť na E_n , $\rho X = X'$, $\rho Y = Y'$. Potom $k\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{X'Y'}$, odkiaľ $|k||XY| = |X'Y'|$ pre všetky X, Y .

Tým je motivovaná

Definícia 21.6 Zobrazenie $\varphi : E_n \rightarrow E_n$ nazývame podobné zobrazenie (alebo podobnosť) na E_n , ak existuje kladné reálne číslo k tak, že pre všetky $X, Y \in E_n$

$$|\varphi X \varphi Y| = k|XY|. \quad (21.1)$$

Číslo k nazývame koeficient podobnosti φ . Podobnosť s koeficientom, ktorý nie je 1, nazývame vlastná podobnosť. Podobnosť s koeficientom 1 nazývame zhodnosť alebo nevlastná podobnosť.

Rovnosť (21.1) ukazuje na geometrický význam koeficienta podobnosti: Vzdialenosť ľubovoľných dvoch bodov sa mení na jej k -násobok.

Veta 21.7 Každá podobnosť na E_n je afinita.

Dôkaz. Nech φ je podobnosť na E_n s koeficientom podobnosti k , $(ABC) = d$, a nech $\varphi A = A'$, $\varphi B = B'$, $\varphi C = C'$. Stačí dokázať, že $(A'B'C') = d$. Body A, B, C , sú podľa predpokladu kolieárne a po dvoch rôzne, preto $|AB| \neq 0$. Keďže $k|AB| = |A'B'|$, tak aj $|A'B'| \neq 0$. To znamená, že φ je injekcia a tak A', B', C' sú po dvoch rôzne body. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $d < 0$. Potom $|AB| + |BC| = |AC|$, odkiaľ $k|AB| + k|BC| = k|AC|$ a tiež $|A'B'| + |B'C'| = |A'C'|$, takže $(A'B'C') < 0$. Preto

$$(A'B'C') = -\frac{|A'C'|}{|B'C'|} = -\frac{k|AC|}{k|BC|} = -\frac{|AC|}{|BC|} = (ABC).$$

Ľahko sa dokázu nasledujúce tri vety.

Veta 21.8 Súčin ľubovoľných dvoch podobností na E_n je podobnosť na E_n . Koeficient súčinu dvoch podobností je súčin koeficientov týchto podobností. Inverzné zobrazenie k podobnosti s koeficientom k je podobnosť s koeficientom k^{-1} .

Veta 21.9 Množina všetkých podobností na E_n (s operáciou skladania zobrazení) je grupa (ktorú budeme nazývať ekviformná grupa priestoru E_n).

Veta 21.10 Každá rovnoláhosť je podobnosť. Rovnoláhosť s charakteristikou k je podobnosť s koeficientom $|k|$. Inverzné zobrazenie k rovnoláhlosti s charakteristikou k je rovnoláhosť s tým istým stredom a charakteristikou k^{-1} .

Nech φ je podobnosť na E_n s koeficientom k a ρ je rovnoláhosť na E_n s charakteristikou k^{-1} . Podľa Vety 21.8 $\varphi \circ \rho = \xi$, (resp. $\rho \circ \varphi = \xi$) je zhodnosť, odkiaľ $\varphi = \xi \circ \rho^{-1}$ (resp. $\varphi = \rho^{-1} \circ \xi$). Tým je dokázaná nasledujúca

Veta 21.11 Každá podobnosť je súčinom nejakej rovnoláhlosti a zhodnosti (a tiež zhodnosti a rovnoláhlosti).

Táto veta hovorí, že množina, do ktorej patria všetky rovnoláhlosti a zhodnosti priestoru E_n generuje ekviformnú grupu priestoru E_n .

Určenosť podobných zobrazení

Lema 21.12 Nech $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ sú také vektory, že

$$|\vec{a}| = k|\vec{c}|, \quad |\vec{b}| = k|\vec{d}| \quad \text{a} \quad |\vec{a} + \vec{b}| = k|\vec{c} + \vec{d}| \quad \text{alebo} \quad |\vec{a} - \vec{b}| = k|\vec{c} - \vec{d}|$$

potom $\vec{a} \cdot \vec{b} = k^2(\vec{c} \cdot \vec{d})$.

Dôkaz. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}((\vec{a} + \vec{b})^2 - \vec{a}^2 - \vec{b}^2) = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2) = \frac{1}{2}(k^2|\vec{c} + \vec{d}|^2 - k^2|\vec{c}|^2 - k^2|\vec{d}|^2) = k^2\vec{c} \cdot \vec{d}$. Keď v predošlej časti dôkazu miesto \vec{b} resp. \vec{d} píšeme $-\vec{b}$ resp. $-\vec{d}$, dostaneme druhú časť tvrdenia tejto pomocnej vety.

Nasledujúce tri vety ukazujú ako možno jednoznačne určiť podobnosť.

Veta 21.13 (o určenosti podobnosti) *Nech A_0, A_1, \dots, A_n je simplex a B_0, B_1, \dots, B_n sú také body priestoru E_n , že existuje reálne číslo k tak, že*

$$|B_i B_j| = k|A_i A_j| \quad i, j = 0, 1, \dots, n.$$

Potom existuje práve jedna podobnosť na E_n , ktorá zobrazí A_i do B_i pre všetky $i = 0, 1, \dots, n$.

Dôkaz. Podľa Vety 17.2 existuje jediné afinné zobrazenie φ na E_n tak, že $\varphi A_i = B_i$ pre všetky i . Stačí dokázať, že φ je podobnosť. Označme $\vec{A_0 A_i} = \vec{e}_i$, $\vec{B_0 B_i} = \vec{f}_i$ pre všetky $i \in \{1, \dots, n\}$. Potom zrejme

$$\varphi^\# \vec{e}_i = \vec{f}_i, \quad k|\vec{e}_i| = |\vec{f}_i|, \quad |\vec{f}_j - \vec{f}_i| = |B_j B_i| = k|A_j A_i| = k|\vec{e}_j - \vec{e}_i|$$

a vzhľadom na Lemu 21.12 $\vec{f}_i \vec{f}_j = k^2 \vec{e}_i \vec{e}_j$. Keď $\vec{u} = u_1 \vec{e}_1 + \dots + u_n \vec{e}_n$, potom $\varphi^\# \vec{u} = u_1 \vec{f}_1 + \dots + u_n \vec{f}_n$ takže

$$(\varphi^\# \vec{u})^2 = \left(\sum u_i \vec{f}_i \right)^2 = \sum u_i u_j \vec{f}_i \vec{f}_j = \sum u_i u_j k^2 \vec{e}_i \vec{e}_j = k^2 \left(\sum u_i \vec{e}_i \right)^2 = k^2 \vec{u}^2,$$

odkiaľ $|\varphi^\# \vec{u}| = k|\vec{u}|$.

Veta 21.14 (o určenosti podobnosti) *Nech $E = (O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$, $F = (Q, \vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$ sú také dva ortogonálne repéry priestoru E_n , že $k|\vec{e}_i| = |\vec{f}_i|$ pre všetky $i = 1, \dots, n$. Existuje jediná podobnosť $\varphi : E_n \rightarrow E_n$ tak, že $\varphi O = Q$, $\varphi^\# \vec{e}_i = \vec{f}_i$, pre všetky $i = 1, \dots, n$.*

Dôkaz. Označme $O = A_0$, $O + \vec{e}_i = A_i$, $Q = B_0$, $Q + \vec{f}_i = B_i$ pre všetky $i \leq n$. Hľadaná podobnosť φ musí vyhovovať podmienkam $\varphi A_i = B_i$ pre každé $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Keďže $\triangle A_i A_0 A_j$, $\triangle B_i B_0 B_j$ sú pravouhlé, použitím Pytagorovej vety máme

$$|B_i B_j|^2 = |B_i B_0|^2 + |B_0 B_j|^2 = (k|A_i A_0|)^2 + (k|A_0 A_j|)^2 = k^2(|A_i A_0|^2 + |A_0 A_j|^2) = k^2|A_i A_j|^2,$$

odkiaľ $|B_i B_j| = k|A_i A_j|$, pre všetky i, j a tak možno aplikovať predošlú vetu.

Veta 21.15 (o určenosti podobnosti) *Keď $A_0 A_1 \dots A_n$, $B_0 B_1 \dots B_n$ sú dva pravouhlé rovnoramenné simplexy s odvesnami $A_0 A_i$, $B_0 B_i$ pre všetky i , potom existuje práve jedna podobnosť φ na E_n tak, že $\varphi A_i = B_i$ pre všetky $i = 0, 1, \dots, n$.*

Dôkaz. Z predpokladov vety vyplýva, že existuje k tak, že $k|A_0 A_i| = |B_0 B_i|$ pre všetky i a tak sú splnené predpoklady predošlej vety.

Invarianty podobných zobrazení

Keďže každá podobnosť je afinita, tak z príslušných viet o vlastnostiach afinít vyplýva, že deliaci pomer, vlastnosť byť podpriezorom priestoru E_n , dimenzia priestoru, rovnobežnosť sú invarianty každej podobnosti. Ukážeme, že podobnosti majú ešte ďalšie dôležité invarianty, medzi ktoré nepatrí dĺžka úsečky.

Keď φ je podobnosť s koeficientom k , priamo z Lemy 21.12 vyplýva, že pre ľubovoľné vektory \vec{a} , $\vec{b} \in \vec{E}_n$ platí

$$\varphi^\# \vec{a} \cdot \varphi^\# \vec{b} = k^2(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (21.2)$$

Veta 21.16 *Uhol nenulových vektorov, kolmost podpriezorov euklidovského priestoru sú invarianty každej podobnosti.*

Dôkaz. Nech φ je podobnosť s koeficientom k . Podľa (21.2)

$$\cos \sphericalangle \varphi^{\#} \vec{a} \varphi^{\#} \vec{b} = \frac{\varphi^{\#} \vec{a} \cdot \varphi^{\#} \vec{b}}{|\varphi^{\#} \vec{a}| |\varphi^{\#} \vec{b}|} = \frac{k^2 \vec{a} \vec{b}}{|k \vec{a}| |k \vec{b}|} = \frac{\vec{a} \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \cos \sphericalangle \vec{a} \vec{b}.$$

Podobnosti sú teda také afinity, ktoré nemenia veľkosť uhlov. Platí aj obrátená

Veta 21.17 *Keď φ je afinita na E_n , $n > 1$, ktorej invariantom je veľkosť uhlov, potom φ je podobnosť na E_n .*

Dôkaz. Nech $E = (A_0, \overrightarrow{A_0 A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0 A_n})$ je ortonormálny repér. Pre $i \neq j$ má trojuholník $A_0 A_i A_j$ veľkosti uhlov 90° , 45° , 45° , preto i trojuholník $\varphi A_0 \varphi A_i \varphi A_j$ má uhly týchto veľkostí, je to teda pravouhlý rovnoramenný trojuholník. To znamená, že $F = (\varphi A_0, \varphi \overrightarrow{A_0 A_1}, \dots, \varphi \overrightarrow{A_0 A_n})$ je ortogonálny repér s rovnakými dĺžkami vektorov. Tým sú splnené predpoklady Vety 21.15, φ je teda podobnosť.

Veta 21.18 *Každá vlastná podobnosť má práve jeden samodružný bod.*

Dôkaz. Nech $\varphi : E_n \rightarrow E_n$ je vlastná podobnosť s koeficientom r a nech $|sab \varphi| \neq 1$. Potom determinant matice $\varphi^{\#E} - 1^E$ je 0, preto existuje netriviálne riešenie homogénnej sústavy lineárnych rovníc s parametrom k , ktorej matica je $\varphi^{\#E} - k \cdot 1^E$, pre $k=1$. To znamená, že existuje taký vlastný vektor \vec{u} , že $\varphi^{\#} \vec{u} = k \cdot \vec{u} = 1 \cdot \vec{u}$, odkiaľ $|\varphi^{\#} \vec{u}| = |\vec{u}|$ a preto $r = 1$, čiže φ je nevlastná podobnosť, čo je spor s predpokladom.

Matice a determinanty podobností

Veta 21.19 *Nech E je ortonormálny repér priestoru E_n , $n > 0$ a nech φ je afinita na E_n . φ je podobnosť práve vtedy, keď existuje $k > 0$ tak, že*

$$(\varphi^{\#E})^T \cdot \varphi^{\#E} = k^2 \cdot 1^E, \quad (21.3)$$

(kde 1^E je jednotková matica).

Dôkaz. Predpokladajme, že $E = (O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$, $F = (Q, \vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$, pričom $\varphi^{\#} \vec{e}_i = \vec{f}_i$, pre všetky $i = 1, \dots, n$ a

$$\varphi^E = \begin{pmatrix} f_{11} & \dots & f_{1n} & p_1 \\ & \dots & & \\ f_{n1} & \dots & f_{nn} & p_n \end{pmatrix}. \quad (21.4)$$

Potom

$$\varphi^{\#E} = \begin{pmatrix} f_{11} & \dots & f_{1n} \\ & \dots & \\ f_{n1} & \dots & f_{nn} \end{pmatrix} = [\vec{f}_1^E \ \dots \ \vec{f}_n^E].$$

(posledná matica je bloková, zložená zo stĺpcov \vec{f}_i^E). Priamym výpočtom sa ľahko overí, že

$$(\varphi^{\#E})^T \cdot \varphi^{\#E} = gF$$

je gramova matica bázy F . Nech φ je podobnosť. Podľa (21.2) $\vec{f}_i \cdot \vec{f}_j = k^2 \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$ a to je (vzhľadom nato, že $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$ je 1 alebo 0) k^2 , keď $i = j$ a nula, keď $i \neq j$, preto platí 21.3. Obrátene, ak $gF = k^2 \cdot 1^E$, tak F je ortogonálna sústava vektorov rovnakej dĺžky. Tým sú splnené predpoklady Vety 21.15, preto φ je podobnosť.

Veta 21.20 *Determinant každej podobnosti $\varphi : E_n \rightarrow E_n$, $n > 0$, s koeficientom k je $\pm k^n$.*

Dôkaz. Z 21.3 vyplýva

$$(\det \varphi^{\#E})^2 = \det(\varphi^{\#E})^T \cdot \det(\varphi^{\#E}) = \det(k^2 \cdot 1^E) = k^{2n},$$

odkiaľ odmocnením dostávame požadované tvrdenie.

Predpokladajme, že $\rho[S, k]$ je rovnôľahlosť na E_n , ktorá nie je identita, $E = (O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ je repér priestoru E_n , $S_E = [s_1, \dots, s_n]$, $X_E = [x_1, \dots, x_n]$, $\rho X = X'$, $X'_E = [x'_1, \dots, x'_n]$. Keď rovnicu $X' = S + k\overrightarrow{SX}$ rozpíšeme do súradníc, dostaneme $x'_i = s_i + k(x_i - s_i)$, odkiaľ

$$\begin{aligned} x'_i &= k.x_i + (1 - k)s_i \quad \text{pre } i = 1, 2, \dots, n \\ x'_i &= k.x_i + b_i, \quad b_i = (1 - k)s_i \quad \text{pre } i = 1, 2, \dots, n; \end{aligned}$$

tieto rovnice sú rovnice rovnôľahlosti ρ (v repére E). Matica tohto zobrazenia (v repére E) je

$$\begin{pmatrix} k & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ 0 & k & \dots & 0 & b_2 \\ & & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & k & b_n \end{pmatrix}. \quad (21.5)$$

Tým je dokázaná

Veta 21.21 *Nech $n > 0$ je prirodzené číslo a nech $k \neq 0, b_1, \dots, b_n$, sú také reálne čísla, že $k = 1$ implikuje $b_1 = \dots = b_n = 0$. Potom každá matica tvaru (21.5) je maticou homotetie na E_n s charakteristikou k a obrátene, každá homotetia na E_n s charakteristikou k má maticu tvaru (21.5).*

Dôsledok 21.22 *Determinant rovnôľahlosti $E_n \rightarrow E_n$ s charakteristikou k je k^n .*

Každá rovnôľahlosť s kladnou charakteristikou je priama podobnosť, každá rovnôľahlosť na E_n , n -párne, je priama podobnosť a každá rovnôľahlosť so zápornou charakteristikou definovaná na priestore s nepárnou dimenziou je nepriama podobnosť. To špeciálne znamená, že každá rovnôľahlosť na rovine je priama.

Cvičenie

21.1 Dokážte, že grupa všetkých rovnôľahlostí (na R_n) s tým istým stredom je izomorfná s multiplikatívnou grupou poľa reálnych čísel.

21.2 Zobrazenie $\delta : R_n \rightarrow R_n, n > 1$, ktoré zobrazí každú priamku priestoru E_n na priamku s ňou rovnobežnú nazývame *dilatácia* na E_n . Dokážte, že každá dilatácia je buď translácia alebo homotetia; keď δ je dilatácia, potom

- (i) δ je identita, ak δ má aspoň dva rôzne body samodružné,
- (ii) δ je rovnôľahlosť, ak δ má práve jeden samodružný bod,
- (iii) δ je neidentická translácia, ak δ nemá žiadny samodružný bod.

21.3 Dokážte, že každý samodružný podpriestor podobnosti $\varphi : E_n \rightarrow E_n$, ktorá má práve jeden samodružný bod, prechádza týmto samodružným bodom.

22 Zhodné zobrazenia

Všeobecne o zhodných zobrazeniach

Je zrejmé, že každé podobné zobrazenie $\xi : E_n \rightarrow E_n$ s koeficientom $k = 1$ je zhodné zobrazenie. Zhodné zobrazenia teda patria medzi podobné zobrazenia, preto z niektorých viet o podobných zobrazeniach dostaneme vety o zhodných zobrazeniach, ak v nich položíme $k = 1$ (k je koeficient podobnosti). Zhodné zobrazenie nazývame tiež *izometria*. Zhodné zobrazenia nemenia vzdialenosť bodov, vzdialenosť je teda invariant zhodného zobrazenia.

Veta 22.1 (o určenosti zhodnosti) *Nech A_0, \dots, A_n je simplex a B_0, \dots, B_n je také sústava bodov priestoru E_n , že $|A_i A_j| = |B_i B_j|$ $i, j = 0, 1, \dots, n$. Existuje práve jedna zhodnosť $\xi : E_n \rightarrow E_n$ tak, že*

$$B_i = \xi A_i \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Veta 22.2 (o určenosti zhodnosti) *Nech $E = (O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$, $F = (Q, \vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$ sú dva ortonormálne repéry priestoru E_n . Existuje práve jedna zhodnosť $\xi : E_n \rightarrow E_n$ tak, že $Q = \xi O$, $\vec{f}_i = \xi^\# \vec{e}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.*

Veta 22.3 *Skalárny súčin, uhol vektorov, kolmosť vektorov sú invarianty každej zhodnosti.*

Veta 22.4 *Nech E je ortonormálny repér priestoru E_n , $n > 0$ a nech $\xi : E_n \rightarrow E_n$ je afinita. Potom ξ je zhodnosť práve vtedy, keď*

$$(\xi^\# E)^T \cdot \xi^\# E = 1^E$$

(t.j. gramova matica obrazu bázy E v ortonormálnom repére) je jednotková matica.

Veta 22.5 *Determinant každej zhodnosti je ± 1 .*

Veta 22.6 *Všetky zhodnosti na E_n (s operáciou skladania) tvoria grupu (budeme ju nazývať euklidovská grupa priestoru E_n), ktorá je podgrupou afinnej grupy i ekviformnej grupy priestoru E_n .*

Súmernosť podľa podpriestoru

Definícia 22.7 *Nech L je podpriestor priestoru E_n . Zobrazenie $\sigma_L : E_n \rightarrow E_n$, $X \mapsto X'$ nazývame súmernosť podľa podpriestoru L , ak ortogonálny priemet bodu X do L je stred dvojice X, X' . Ak L je bod, σ_L nazývame stredová súmernosť, ak L je priamka, σ_L je osová súmernosť.*

Dôsledok 22.8 *Keď σ_L je súmernosť podľa podpriestoru L , potom množina všetkých samodružných bodov tejto súmernosti je L .*

Veta 22.9 *Každá súmernosť podľa podpriestoru je involutórna zhodnosť a obrátene, každá involutórna zhodnosť je súmernosť podľa podpriestoru.*

Dôkaz. Nech $\sigma_L : E_n \rightarrow E_n$ je súmernosť podľa podpriestoru L , A, B sú ľubovoľné body v E_n , A_L, B_L ich ortogonálne priemety do L a nech $\sigma_L A = A'$, $\sigma_L B = B'$. Potom

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= \overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{AA_L} + \overrightarrow{A_L B_L} + \overrightarrow{B_L B})^2 = \\ &= \overrightarrow{AA_L}^2 + \overrightarrow{A_L B_L}^2 + \overrightarrow{B_L B}^2 + 2(\overrightarrow{AA_L} \cdot \overrightarrow{A_L B_L} + \overrightarrow{AA_L} \cdot \overrightarrow{B_L B} + \overrightarrow{A_L B_L} \cdot \overrightarrow{B_L B}) = \\ &= \overrightarrow{AA_L}^2 + \overrightarrow{A_L B_L}^2 + \overrightarrow{B_L B}^2 + 2\overrightarrow{AA_L} \cdot \overrightarrow{B_L B}. \end{aligned}$$

Podobne

$$\overrightarrow{A'B'}^2 = \overrightarrow{A'A_L}^2 + \overrightarrow{A_L B_L}^2 + \overrightarrow{B_L B'}^2 + 2\overrightarrow{A'A_L} \cdot \overrightarrow{B_L B'}.$$

Z týchto rovností použitím

$$|\overrightarrow{AA_L}| = |\overrightarrow{A'A_L}|, \quad |\overrightarrow{BB_L}| = |\overrightarrow{B'B_L}|, \quad \overrightarrow{A'A_L} \cdot \overrightarrow{B_L B'} = (-\overrightarrow{AA_L})(-\overrightarrow{B_L B}) = \overrightarrow{AA_L} \cdot \overrightarrow{B_L B}$$

dostávame

$$|AB|^2 = |A'B'|^2 \quad \text{t.j.} \quad |AB| = |A'B'|$$

a to znamená, že σ_L je zhodnosť. Druhá časť tejto implikácie (t.j. $\xi^2 = 1$) je zrejme.

Dôkaz obrátenej vety. Nech σ je involutórna zhodnosť, $L = \text{stab } \sigma$, X ľubovoľný bod, $\sigma X = X'$ a nech $S = X \div X'$. Potom $\sigma S = S$ a teda $S \in L$. Ak $\dim L = 0$, tak zrejme $\sigma = \sigma_L$; ak $\dim L > 0$ zvolíme ľubovoľný bod $A \in L$, $A \neq S$. Keď $X \notin L$, potom $|\langle X, S \rangle| = |\langle X', S \rangle|$; súčet týchto veľkostí je π , preto $\overrightarrow{XX'} \perp \overrightarrow{SA}$ pre všetky $A \in L$, teda $\overrightarrow{XX'} \perp L$.

Súmernosť podľa nadroviny

Veta 22.10 *Zhodnosť $\xi : E_n \rightarrow E_n$ je súmernosť podľa nadroviny N práve vtedy, keď N je množina všetkých jej samodružných bodov.*

Dôkaz. \Rightarrow : Tvrdenie vyplýva z Dôsledku 22.8. \Leftarrow : Nech ξ je zhodnosť a nech nadrovina N je množina všetkých jej samodružných bodov. Nech $X \notin N$, X_N je pravouhlý priemet bodu X do N . Pretože každý samodružný bod zobrazenia ξ leží v N , tak $X \neq X' = \xi X$. Invariantom zhodnosti je kolmosť, preto obraz $\overline{X'X_N}$ priamky XX_N je tiež kolmý na N . To znamená, že $\overline{X'X_N} = \overline{XX_N}$, čiže body X' , X , X_N ležia na jednej priamke (kolmej na N). Pretože aj vzdialenosť bodov je invariant zhodnosti, tak $|X'X_N| = |XX_N|$, čiže X_N je stred dvojice X' , X , čo znamená, že ξ je súmernosť podľa nadroviny N .

Dôsledok 22.11 *Ak ξ je taká zhodnosť, že každý bod nadroviny N je jej samodružný bod, potom ξ je buď identita alebo súmernosť podľa nadroviny.*

Veta 22.12 *Nech $A \neq A'$ sú ľubovoľné body priestoru E_n . Existuje práve jedna súmernosť σ_N podľa nadroviny N tak, že $\sigma_N A = A'$.*

Dôkaz. Nadrovina N musí prechádzať stredom dvojice X, X' kolmo na $\overrightarrow{AA'}$; taká nadrovina existuje práve jedna.

Ak $\nu[N, -1, s]$ je homológia so smerom s kolmým na nadrovinu N a $\nu X = X'$, tak $\overrightarrow{XX'} \perp \vec{N}$ a $\overline{XX'} \cap N = X_N$ je ortogonálny priemet bodu X do N . Ak $X \notin N$, tak podľa Vety 20.7 $(X'XX_N) = -1$, čiže X_N je stred dvojice X, X' . Preto platí

Veta 22.13 *Každá homológia so smerom kolmým na os N a charakteristikou -1 je súmernosť podľa nadroviny N a obrátene.*

Z Vety 20.8 vyplýva

Dôsledok 22.14 *Každá súmernosť podľa nadroviny je nepriama zhodnosť.*

Z definície perspektívnej afinity a z Vety 22.10 vyplýva

Dôsledok 22.15 *Každá perspektívna afinita, ktorá je zhodnosť je súmernosť podľa nadroviny.*

Podobne ako Veta 20.10, dokáže sa

Veta 22.16 *Nech ξ je zhodnosť na E_n , $n > 0$. Existuje nie viac ako $n + 1$ súmerností podľa nadrovín priestoru E_n tak, že ich súčin je ξ .*

Priamy dôsledok tejto Vety je

Veta 22.17 *Množina všetkých súmerností podľa nadrovín priestoru E_n generuje euklidovskú grupu priestoru E_n .*

Veta 22.18 *Súčin dvoch súmerností podľa rovnobežných nadrovín priestoru E_n je translácia. Keď $M \parallel N$ sú nadroviny, $A \in M, B \in N$, $\overline{AB} \perp N$, potom $\sigma_M \sigma_N = \tau_{\overrightarrow{2BA}}$. Obrátene, každá translácia je súčin dvoch súmerností podľa rovnobežných nadrovín kolmých na vektor translácie, z ktorých jedna je ľubovoľná a druhá je určená jednoznačne.*

Dôkaz. Nech E je taký ortonormálny repér so začiatkom A , že rovnice nadrovín M, N sú v poradí $x_n = 0$, $x_n = p$. Nech $X = [x_1, \dots, x_{n-1}, x_n]$ je ľubovoľný bod. Je zrejmé, že jeho obraz X' v súčine $\sigma_M \sigma_N$ má súradnice $[x_1, \dots, x_{n-1}, -2p + x_n]$, takže $\overrightarrow{XX'} = (0, \dots, 0, -2p)$ je konštantný vektor. Zvyšok dôkazu je evidentný.

Veta 22.19 *Súčin troch súmerností podľa nadrovín priestoru E_n patriacich nejakému zväzku, je súmernosť podľa nadroviny, ktorá patrí do tohto zväzku.*

Dôkaz. Nech nadroviny K, L, M patria zväzku nadrovín a nech $\xi = \sigma_K \sigma_L \sigma_M$. 1) Nech tento zväzok je nevlastný a nech E je taký ortonormálny repér, že rovnice nadrovín K, L, M sú v poradí $x_n = 0, x_n = p, x_n = q$. Nech $A = [a_1, \dots, a_{n-1}, a_n]$ je ľubovoľný bod. Je zrejmé, že jeho obraz A' v súčine ξ má súradnice $[a_1, \dots, a_{n-1}, 2(q-p) - a_n]$, čiže A' je obraz bodu A v súmernosti podľa nadroviny, ktorej rovnica je $x_n = q - p$. 2) Nech nadroviny K, L, M patria vlastnému zväzku, potom ich prienik je priestor (povedzme P), dimenzie $n - 2$. Keďže $\det \xi = -1$, ξ nie je identita, preto existuje bod A tak, že $\xi(A) = A' \neq A$. Nech N je taká nadrovina, že $\sigma_N(A') = A$. Potom $P \subset N$, $\sigma_N \xi(A) = A$ a každý bod priestoru P je samodružný bod súčinu $\sigma_N \xi$ a tak každý bod nadroviny $\overline{P \cup A}$ je samodružný bod súčinu $\sigma_N \xi$. Tento súčin je preto identita (súmernosť podľa nadroviny to nemôže byť lebo $\det \sigma_N \xi \neq -1$) a tak $\sigma_N = \sigma_K \sigma_L \sigma_M$.

Grupa symetrií

Euklidovská grupa má mnoho podgrúp, medzi najvýznamnejšie patria grupy symetrií. Hovoríme, že zobrazenie $\xi : E_n \rightarrow E_n$ je *symetria* útvaru U (ležiaceho v E_n), ak ξ je zhodnosť a $\xi U = U$; v tom prípade aj $\xi^{-1} U = U$, takže vzhľadom na Lemu A.5 platí

Veta 22.20 *Nech U je útvar priestoru E_n . Množina všetkých symetrií útvaru U je podgrupou euklidovskej grupy priestoru E_n ; nazývame ju grupa symetrií útvaru U .*

Príklad 22.21 *Nájdite grupu symetrií obdĺžnika.*

Riešenie. Nech S je stred obdĺžnika $ABCD$ a nech $\xi : E_2 \rightarrow E_2$ je symetria obdĺžnika $ABCD$. Ukážeme, že $S = \xi S$; zrejme $(ACS) = -1$ preto $(\xi A \xi C \xi S) = -1$ t.j. $\xi S = \xi A \div \xi C$. Pretože

$$X, Y \in ABCD \quad \wedge \quad |XY| = |AC| \Rightarrow \{X, Y\} = \{A, C\} \vee \{X, Y\} = \{B, D\},$$

tak $\{\xi A, \xi C\} = \{A, C\}$ alebo $\{\xi A, \xi C\} = \{B, D\}$; to znamená, že $\xi S = A \div C = S$ alebo $\xi S = B \div D = S$, teda $\xi S = S$. A, B, S tvoria simplex roviny E_2 so vzdialenosťami vrcholov $|AB| = a$, $|AS| = |BS| = e$. Preto $\xi A, \xi B, \xi S$ je simplex s tými istými vzdialenosťami vrcholov. To znamená, že simplex $(\xi A, \xi B, \xi S) = (\xi A, \xi B, S)$ je jeden z nasledujúcich simplexov: (A, B, S) , (B, A, S) , (C, D, S) , (D, C, S) . Postupne tak dostaneme zobrazenia $1, \sigma_p, \sigma_S, \sigma_q$, kde p je os úsečky AB a q je os úsečky BC .

Cvičenie

22.1 V E_n sú dané dve roviny M, N . Dokážte, že existuje zhodnosť $\xi : E_n \rightarrow E_n$, ktorá zobrazí M na N .

22.2 V E_n sú dané dva podpriestory M, N . Dokážte, že existuje zhodnosť $\xi : E_n \rightarrow E_n$, ktorá zobrazí M do N alebo N do M .

A F I N N Ě Z O B R A Z E N I A v E_1, E_2, E_3

23 Afinity na priamke

Pod afinitou na priamke budeme rozumieť každú afinitu E_1 do E_1 . Podľa (15.6), každú afinitu α na E_1 reprezentuje rovnica

$$x'_1 = g_{11}x_1 + p_1, \quad g_{11} \neq 0. \quad (23.1)$$

Táto rovnica však podľa vety 21.21 je rovnicou homotetie pre $g_{11} \neq 1$ a rovnicou translácie, pre $g_{11} = 1$. To znamená, že každá afinita na E_1 je rovnoľahlosť alebo translácia.

Platia teda nasledujúce dve vety.

Veta 23.1 Každá afinita na E_1 je buď rovnoľahlosť alebo translácia. Každá afinita na E_1 je podobnosť.

Veta 23.2 Afinná, ekviformná a Mongeova grupa na E_1 sú totožné.

Keďže determinant zhodnosti je ± 1 , rovnica 23.1 je rovnicou zhodnosti práve vtedy, keď $f_{11} = \pm 1$ a preto platí veta

Veta 23.3 Každá zhodnosť na E_1 je buď stredová súmernosť alebo translácia.

Priamo z Vety 22.18 vyplýva

Príklad 23.4 Súčin dvoch stredových súmerností je translácia o vektor $\overrightarrow{2BA}$.

Cvičenie

23.1 Nech $(R, +, \cdot)$ je pole reálnych čísel, $G = \{[a, b]; a \neq 0, a, b \in R\}$. Na množine G definujeme operáciu $*$:

$$[a, b] * [c, d] = [ac, ad + b].$$

Dokážte, že $(G, *)$ je grupa izomorfná s afinnou grupou na E_1 .

23.2 Daná je rovnoľahlosť $\rho : x' = 3x + 1$ a translácia $\tau : x' = x - 3$. Vypočítajte rovnice zobrazení $\rho^{-1}, \tau^{-1}, \rho\tau, \tau\rho^{-1}, \rho\tau\rho^{-1}, \tau\tau$. Vypočítajte súradnice stredov rovnoľahlostí $\rho\tau, \tau\rho$.

24 Afinity na rovine

V tomto článku vykonáme klasifikáciu afínit definovaných na rovine. Rozhodujúcu úlohu budú mať množiny $sab\alpha$ - množina všetkých samodružných bodov a $cosab\alpha$ - množina všetkých samodružných smerov afinity α .

Nech $E = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ je repér afinného priestoru E_2 a nech $\alpha : E_2 \rightarrow E_2$ je afinita daná maticou

$$\alpha^E = \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \end{pmatrix} \quad (24.1)$$

Je zrejmé, že $sab\alpha$ je množina všetkých riešení sústavy lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} x_1 &= ax_1 + bx_2 + e \\ x_2 &= cx_1 + dx_2 + f \end{aligned} \quad t.j. \quad (24.2)$$

$$\begin{aligned} (a-1)x_1 &+ bx_2 = -e \\ cx_1 &+(d-1)x_2 = -f. \end{aligned}$$

$\cos ab \alpha$ je zase množina všetkých netriviálnych vektorových priestorov $\langle (v_1, v_2) \rangle$, kde (v_1, v_2) je riešenie sústavy lineárnych homogénnych rovníc s parametrom $k \neq 0$ (*vlastné číslo*)

$$\begin{aligned} (a-k)v_1 + bv_2 &= 0 \\ cv_1 + (d-k)v_2 &= 0. \end{aligned} \tag{24.3}$$

Keď α nemá žiadny samodružný smer, potom sústava (24.3) nemá riešenie pre všetky $k \neq 0$, to znamená, že determinant matice sústavy 24.3 je rôzny od nuly aj pre $k = 1$ (t.j. determinant matice sústavy 24.2 je rôzny od nuly); z 24.2 vyplýva, že $|sab \alpha| = 1$. Jedna z takých afinít je daná maticou

$$\alpha^E = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

V ďalšom predpokladajme, že existuje aspoň jeden samodružný smer; nech je to smer $\langle \vec{e}_1 \rangle$. Potom

$$\alpha^E = \begin{pmatrix} a & b & e \\ 0 & d & f \end{pmatrix}$$

a $sab \alpha$ závisí od toho, či determinant $(a-1)(d-1)$ matice sústavy (24.2) (bez posledného stĺpca) je 0, t.j. či $a = 1$ alebo $d = 1$. Ak by existoval ešte ďalší samodružný smer, povedzme $\langle \vec{e}_2 \rangle$, potom $b=0$. Budeme preto rozlišovať tieto možnosti:

	a	d	b	
1	1	1	0	
2	1	1	b	$b \neq 0$
3	a	1	0	$a \neq 1$
4	a	1	b	$a \neq 1, b \neq 0$
5	1	d	0	$d \neq 1$
6	1	d	b	$d \neq 1, b \neq 0$
7	a	d	0	$a \neq 1, d \neq 1$
8	a	d	b	$a \neq 1, d \neq 1, b \neq 0$

Postupne preberieme všetky tieto prípady.

1	$\alpha^E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & e \\ 0 & 1 & f \end{pmatrix};$	α je translácia; každý smer je samodružný; $sab \alpha = E_2$ alebo $sab \alpha = \emptyset$
2	$\alpha^E = \begin{pmatrix} 1 & b & e \\ 0 & 1 & f \end{pmatrix}$	$b \neq 0$
$\cos ab \alpha$: $\begin{pmatrix} 1-k & b \\ 0 & 1-k \end{pmatrix}$	$(1-k)^2 = 0 \quad k = 1$ $\cos ab \alpha = \langle \vec{e}_1 \rangle$ $ \cos ab \alpha = 1$
$sab \alpha$: $\begin{pmatrix} 0 & b & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$	$f = 0 \Rightarrow sab \alpha$ je priamka $bx_2 + e = 0$ $f \neq 0 \Rightarrow sab \alpha = \emptyset$
3	$\alpha^E = \begin{pmatrix} a & 0 & e \\ 0 & 1 & f \end{pmatrix}$	$a \neq 1$
$\cos ab \alpha$: $\begin{pmatrix} a-k & 0 \\ 0 & 1-k \end{pmatrix}$	$k = a \Rightarrow \langle \vec{e}_1 \rangle \in \cos ab \alpha$ $k = 1 \Rightarrow \langle \vec{e}_2 \rangle \in \cos ab \alpha$ $ \cos ab \alpha = 2$
$sab \alpha$: $\begin{pmatrix} a-1 & 0 & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$	$f = 0 \Rightarrow sab \alpha$ je priamka $(a-1)x_1 + e = 0$ $f \neq 0 \Rightarrow sab \alpha = \emptyset$

4	$\alpha^E = \begin{pmatrix} a & b & e \\ 0 & 1 & f \end{pmatrix}$	$a \neq 1, b \neq 0$
	$\text{cosab } \alpha : \begin{pmatrix} a-k & b \\ 0 & 1-k \end{pmatrix}$	$k = a \Rightarrow \langle \vec{e}_1 \rangle \in \text{cosab } \alpha$ $k = 1 \Rightarrow \langle (b, 1-a) \rangle \in \text{cosab } \alpha$ $ \text{cosab } \alpha = 2$
	$\text{sab } \alpha : \begin{pmatrix} a-1 & b & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$	$f = 0 \Rightarrow \text{sab } \alpha \text{ je priamka}$ $(a-1)x_1 + bx_2 + e = 0$ $f \neq 0 \Rightarrow \text{sab } \alpha = \emptyset$
<hr/>		
5	$\alpha^E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & e \\ 0 & d & f \end{pmatrix}$	$d \neq 1$
	$\text{cosab } \alpha : \begin{pmatrix} 1-k & 0 \\ 0 & d-k \end{pmatrix}$	$k = 1 \Rightarrow \langle \vec{e}_1 \rangle \in \text{cosab } \alpha$ $k = d \Rightarrow \langle \vec{e}_2 \rangle \in \text{cosab } \alpha$ $ \text{cosab } \alpha = 2$
	$\text{sab } \alpha : \begin{pmatrix} 0 & 0 & e \\ 0 & d-1 & f \end{pmatrix}$	$e = 0 \Rightarrow \text{sab } \alpha \text{ je priamka}$ $(d-1)x_2 + f = 0$ $e \neq 0 \Rightarrow \text{sab } \alpha = \emptyset$
<hr/>		
6	$\alpha^E = \begin{pmatrix} 1 & b & e \\ 0 & d & f \end{pmatrix}$	$d \neq 1, b \neq 0$
	$\text{cosab } \alpha : \begin{pmatrix} 1-k & b \\ 0 & d-k \end{pmatrix}$	$k = 1 \Rightarrow \langle \vec{e}_1 \rangle \in \text{cosab } \alpha$ $k = d \Rightarrow \langle (b, d-1) \rangle \in \text{cosab } \alpha$ $ \text{cosab } \alpha = 2$
	$\text{sab } \alpha : \begin{pmatrix} 0 & b & e \\ 0 & d-1 & f \end{pmatrix}$	$fb = e(d-1) \Rightarrow \text{sab } \alpha \text{ je priamka}$ $(d-1)x_2 + f = 0$ $fb \neq e(d-1) \Rightarrow \text{sab } \alpha = \emptyset$
<hr/>		
7	$\alpha^E = \begin{pmatrix} a & 0 & e \\ 0 & d & f \end{pmatrix}$	$d \neq 1, a \neq 1$
	(i) $a = d$	
	$\text{cosab } \alpha : \begin{pmatrix} a-k & 0 \\ 0 & a-k \end{pmatrix}$	$k = a \Rightarrow \text{každý smer je}$ samodružný $ \text{cosab } \alpha = \infty$
	$\text{sab } \alpha : \begin{pmatrix} a-1 & 0 & e \\ 0 & a-1 & f \end{pmatrix}$	$ \text{sab } \alpha = 1$
	(ii) $a \neq d$	
	$\text{cosab } \alpha : \begin{pmatrix} a-k & 0 \\ 0 & d-k \end{pmatrix}$	$ \text{cosab } \alpha = 2$
	$\text{sab } \alpha : \begin{pmatrix} a-1 & 0 & e \\ 0 & d-1 & f \end{pmatrix}$	$ \text{sab } \alpha = 1$
<hr/>		

$$8 \quad \alpha^E = \begin{pmatrix} a & b & e \\ 0 & d & f \end{pmatrix} \quad a \neq 1, b \neq 0, d \neq 1$$

(i) $a = d$

$$\cos ab \alpha : \begin{pmatrix} a-k & b \\ 0 & a-k \end{pmatrix} \quad |\cos ab \alpha| = 1$$

$$sab \alpha : \begin{pmatrix} a-1 & b & e \\ 0 & a-1 & f \end{pmatrix} \quad |sab \alpha| = 1$$

(ii) $a \neq d$

$$\cos ab \alpha : \begin{pmatrix} a-k & b \\ 0 & d-k \end{pmatrix} \quad |\cos ab \alpha| = 2$$

$$sab \alpha : \begin{pmatrix} a-1 & b & e \\ 0 & d-1 & f \end{pmatrix} \quad |sab \alpha| = 1$$

Spolu je to 10 prípadov, ktoré sú uvedené v tabuľke:

$sab \alpha \setminus \cos ab \alpha$	0	1	2	všetky
0		x	x	x
1	x	x	x	x
priamka		x	x	
všetky				x

Cvičenie

24.1 Nech $\alpha : E_2 \rightarrow E_2$ je afinita daná maticou

$$\alpha^E = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \quad b \neq 0.$$

Dokážte, že α má práve jeden samodružný bod a nemá žiadnu samodružnú priamku.24.2 Daná je priamka $N : 3x + 7y - 1 = 0$ a body $A[3, 0]$, $A'[-1, 1]$. Vypočítajte rovnice perspektívnej afinity γ , ktorej os je N a ktorá zobrazí A do A' .24.3 Určte $sab \alpha$, $\cos ab \alpha$, ak $\alpha : E_2 \rightarrow E_2$ je daná maticou

$$\begin{pmatrix} 17 & 11 & -1 \\ -19 & -12 & 2 \end{pmatrix}.$$

25 Zhodnosti na rovine

Zhodnosť ako súčin osových súmerností

Súmernosť podľa nadroviny definovaná na E_2 je súmernosť podľa priamky, čiže *osová súmernosť*. Z viet 22.9, 22.14 vyplýva, že osová súmernosť na E_2 je nepriama zhodnosť, ktorá je involúcia a že pre každé dva rôzne body $A, A' \in E_2$ existuje práve jedna osová súmernosť, ktorá zobrazí A do A' .

Podľa 22.16 každá zhodnosť na rovine je súčin dvoch alebo troch osových súmerností. Preto klasifikovať zhodnosti na rovine znamená prešetriť všetky možné súčiny dvoch alebo troch osových súmerností (pritom rozlišovať podľa vzájomnej polohy osí).

Osovú súmernosť s osou a budeme označovať σ_a , podobne σ_b je osová súmernosť s osou b .

Veta 25.1 Pre zhodné zobrazenia na E_2 platí:

- (i) súčin nepárneho počtu osových súmerností nie je identita
- (ii) súčin párneho počtu osových súmerností nie je osová súmernosť
- (iii) zhodnosť, ktorá má aspoň dva rôzne samodružné body je osová súmernosť alebo identita.
- (iv) nepriama zhodnosť, ktorá má aspoň dva rôzne body samodružné je osová súmernosť. Priama zhodnosť, ktorá má aspoň dva rôzne body samodružné je identita.

Dôkaz. (i) Súčin nepárneho počtu nepriamych afinít je nepriama afinita, nemôže to byť identita, pretože tá je priama afinita. (ii) priamo vyplýva z (i). (iii) Vyplýva z dôsledku 22.11. (iv) priamo vyplýva z (iii).

Súčin dvoch osových súmerností

Z Vety 22.19 priamo vyplýva

Veta 25.2 Súčin dvoch osových súmerností s rovnobežnými osami je translácia. Keď $a \parallel b$, $B \in b$, $A \in a$ a $\overrightarrow{AB} \perp a$, potom

$$\sigma_b \sigma_a X = X + 2\overrightarrow{AB}.$$

Rovnosť z predošlej vety možno "čítať" i zprava doľava. To dokazuje nasledujúcu vetu.

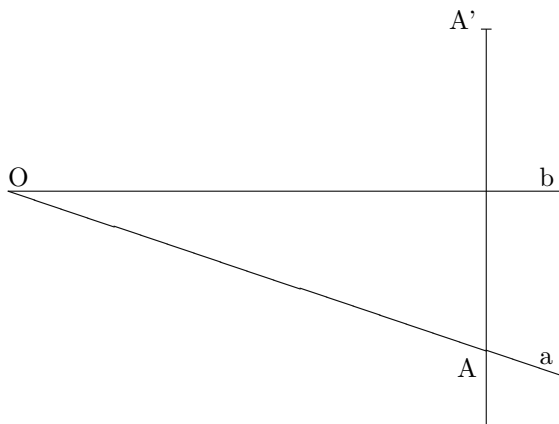
Veta 25.3 Každá translácia na E_2 je súčin dvoch osových súmerností s rovnobežnými osami kolmými na vektor posunutia, z ktorých jedna je ľubovoľná a druhá je určená jednoznačne.

Nech priamky a, b sa pretínajú v bode S , potom S je jediný samodružný bod zobrazenia $\sigma_b \sigma_a$; ak by totiž P bol ďalší samodružný bod, tak každý bod priamky PS by bol samodružný, preto $\sigma_b \sigma_a = 1$ (ako priama zhodnosť, ktorá má aspoň dva rôzne body samodružné) čo implikuje $a = b$ a to je spor s predpokladom. $\sigma_b \sigma_a$ nie je teda translácia ani osová súmernosť (a ak a nie je kolmá na b , tak ani stredová súmernosť).

Definícia 25.4 Zhodnosť na E_2 , ktorá má práve jeden samodružný bod nazývame neidentická rotácia alebo neidentické otáčanie; samodružný bod nazývame stred rotácie. Zhodnosť, ktorá je buď identita alebo neidentické otáčanie nazývame rotácia (alebo otáčanie).

Veta 25.5 Každá rotácia na E_2 je súčin dvoch osových súmerností s totožnými alebo rôznobežnými osami (prechádzajúcimi stredom rotácie, z ktorých jedna je ľubovoľná) a obrátene.

Dôkaz. Nech ρ je rotácia so stredom O , a ľubovoľná priamka prechádzajúca bodom O . Nech $A \neq O$, $A \in a$ a $\rho A = A'$. Pretože $|OA'| = |\rho O \rho A| = |OA|$, tak os b úsečky AA' prechádza bodom O . (viď obrázok). To znamená, že $\sigma_b \rho$ má aspoň dva rôzne body (sú to O, A) samodružné, preto $\sigma_b \rho = 1$ alebo $\sigma_b \rho$ je osová súmernosť s osou a . Keď $\sigma_a \rho = 1$, potom $\sigma_a = \rho$ čo však odporuje faktu, že rotácia nie je osová súmernosť, preto $\sigma_a \circ \rho = \sigma_b$, čiže $\rho = \sigma_a \sigma_b$.



Veta 25.6 *Súčin dvoch osových súmerností (na E_2) s kolnými osami je stredová súmernosť so stredom v priesečníku osí.*

Dôkaz. Predpokladajme, že $a \perp b$, $a \cap b = O$. Zvoľme ortonormálny repér $E = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ tak, že $O + \langle \vec{e}_1 \rangle = a$, $O + \langle \vec{e}_2 \rangle = b$. Potom

$$\sigma_a^E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_b^E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(\sigma_a \sigma_b)^E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dôsledok 25.7 *Ak σ_a, σ_b sú osové súmernosti, $a \perp b$, tak $\sigma_a \sigma_b = \sigma_b \sigma_a$.*

Platí i obrátené tvrdenie

Veta 25.8 *Keď dve rôzne osové súmernosti komutujú, potom ich osi sú navzájom kolmé.*

Dôkaz. Nech $\sigma_a \sigma_b = \sigma_b \sigma_a$ a nech $B \in b$, $B \notin a$. Potom $\sigma_a \sigma_b B = \sigma_b \sigma_a B$, $\sigma_a B = \sigma_b \sigma_a B$, čo znamená, že $\sigma_a B$ je samodružný bod osovej súmernosti σ_b , preto leží na b . $B, \sigma_a B$ sú rôzne body (lebo $B \notin a$) a priamka a je ich os súmernosti, je teda kolná na priamku b .

Súčin troch osových súmerností

Z Vety 22.19 vyplýva

Veta 25.9 *Súčin troch osových súmerností, ktorých osi patria zväzku priamok je osová súmernosť.*

Veta 25.10 *Nech \vec{v} je smerový vektor priamky a . Súčin $\xi = \sigma_a \tau_{\vec{v}} = \tau_{\vec{v}} \sigma_a$ nemá žiadny samodružný bod a nie je to osová súmernosť ani translácia. ξ nazývame posunuté zrkadlenie.*

Dôkaz. $\sigma_a \tau_{\vec{v}} = \sigma_a \sigma_b \sigma_c$, kde b, c sú rôzne priamky kolmé na a , preto osové súmernosti a, b resp. a, c komutujú, takže pravú stranu poslednej rovnosti môžeme upraviť na tvar $\sigma_b \sigma_c \sigma_a = \tau_{\vec{v}} \sigma_a$. Je zrejmé, že ξ zobrazí jednu polovinu s hranicou a na opačnú polovinu, preto samodružný bod môže byť len na a , tam však samodružný bod neexistuje. Toto zobrazenie nemá žiadny samodružný bod, je to nepriama zhodnosť preto to nie je osová súmernosť ani translácia.

Rovnosť $\sigma_a \tau_{\vec{v}} = \sigma_a \sigma_b \sigma_c$ z predošlého dôkazu môžeme písať v tvare $\sigma_a \tau_{\vec{v}} = \sigma_S \sigma_c$, kde $S = a \cap b$, $S \notin c$. Platí teda, že súčin stredovej a osovej súmernosti, ktorých stred a os neincidujú je posunuté zrkadlenie.

Veta 25.11 *Súčin troch osových súmerností (na E_2), ktorých osi nepatria žiadnemu zväzku priamok je posunuté zrkadlenie.*

Dôkaz. Nech priamky a, b, c nepatria žiadnemu zväzku priamok, potom niektoré dve z nich musia byť rôznobežné, povedzme $a \cap b = S$. Nech $e \perp c$ je priamka prechádzajúca bodom S . Podľa vety 25.5 existuje d tak, že $\sigma_a \sigma_b = \sigma_d \sigma_e$; $\sigma_e \sigma_c = \sigma_T$ je stredová súmernosť, takže $\sigma_a \sigma_b \sigma_c = \sigma_d \sigma_T$ a tým je tvrdenie dokázané (zrejme $T \notin d$).

Tým sme vyčerpali všetky možnosti pre súčin dvoch a pre súčin troch osových súmerností (podľa vzájomnej polohy osí). To znamená, že sme našli všetky druhy zhodných zobrazení na rovine, je ich 5: identita, osová súmernosť, translácia, otáčanie a posunuté zrkadlenie. Tieto zobrazenia sa dajú rozlišovať tiež podľa počtu samodružných bodov a počtu samodružných smerov. Ukazuje to nasledujúca tabuľka.

	sam.body	sam. smery
identita	všetky	všetky
osová súmernosť	priamka	dva
neident.translácia	0	všetky
neident.otáčanie	1	0 alebo všetky
posunuté zrkadlenie	0	2

Z tejto tabuľky možno "vyčítať" ďalšie vlastnosti zhodností. Napríklad: Každá zhodnosť na E_2 , ktorá nemá žiadny samodružný bod a má práve dva samodružné smery je posunuté zrkadlenie.

Niektoré pravidlá pre skladanie zhodností

Veta 25.12 Pre ľubovoľné A, B $\sigma_A \sigma_B$ je translácia o vektor $\overrightarrow{2BA}$.

Dôkaz. Podľa Mongeovej vety, $\sigma_A \sigma_B$ je translácia, zrejme o vektor $\overrightarrow{B\sigma_A\sigma_B B} = \overrightarrow{B\sigma_A B} = \overrightarrow{2BA}$.

Veta 25.13 Súčin troch stredových súmerností je stredová súmernosť. Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:

(i) $\sigma_A \sigma_B \sigma_C = \sigma_D$

(ii) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

(iii) štvoruholník $ABCD$ je rovnobežník alebo $ABCD$ sú kolineárne body (a vtedy $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$).

Dôkaz. (i) možno upraviť na rovnosť $\sigma_A \sigma_B = \sigma_D \sigma_C$, odkiaľ vzhľadom na predošlú vetu vyplýva tvrdenie tejto vety.

Matice zhodných zobrazení

Nech $\xi : E_2 \rightarrow E_2$ je zhodnosť, $E = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ je ortonormálny repér a nech $\xi^\# \vec{e}_i = \vec{f}_i$, $i = 1, 2$. Pretože $|\vec{f}_1| = 1$, existuje reálne číslo α tak, že $\vec{f}_1^E = (\cos \alpha, \sin \alpha)$; z $\vec{f}_1 \perp \vec{f}_2$ vyplýva, že $\vec{f}_2 \in \langle \vec{f}_1^\perp \rangle = \langle (-\sin \alpha, \cos \alpha) \rangle$ a keďže $|\vec{f}_2| = 1$, tak $\vec{f}_2 = \varepsilon(-\sin \alpha, \cos \alpha)$ pre $\varepsilon = \pm 1$. Teda

$$\xi^E = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\varepsilon \sin \alpha & e \\ \sin \alpha & \varepsilon \cos \alpha & f \end{pmatrix} \quad \varepsilon = \pm 1, \alpha, e, f \in R \quad (25.1)$$

je matica zhodného zobrazenia ξ .

Veta 25.14 Nech E je ortonormálny repér. Ku každému otáčaniu ω existujú reálne čísla α, e, f tak, že

$$\omega^E = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & e \\ \sin \alpha & \cos \alpha & f \end{pmatrix}, \quad (25.2)$$

číslo α nazývame uhol otáčania.

Dôkaz. Otáčanie je priama zhodnosť, preto jej matica musí mať tvar (25.1) a jej determinant musí byť kladný, t.j. $\varepsilon = 1$. V tom prípade ξ môže byť už len translácia alebo otáčanie. Translácia to nebude vtedy, keď matica stopy zobrazenia ξ nie je jednotková. Zvyšok dôkazu je evidentný.

Označenie $\omega[S, \alpha]$ budeme používať pre otáčanie s uhlom (orientovaným) α a samodružným bodom S .

Veta 25.15 Nech $\omega[S, \alpha]$ je otáčanie. Pre ľubovoľné nenulové vektory \vec{u}, \vec{v} platí

(i) $\widehat{\vec{v} \omega^\# \vec{v}} = \alpha$

(ii) $\widehat{\vec{v} \vec{u}} = \omega^\# \widehat{\vec{v} \omega^\# \vec{u}}$.

Dôkaz.(i) Nech (25.2) je matica otáčania ω a $\vec{v}_E = (\cos \beta, \sin \beta)$ je ľubovoľný ort. Potom

$$(\omega^\# \vec{v})^E = \omega^{\#E} \vec{v}^E = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) \end{pmatrix}.$$

Podľa Vety 12.26 $\widehat{\vec{v} \omega^\# \vec{v}} = \alpha + \beta - \beta = \alpha$. (ii) Zhodné zobrazenie nemení uhol vektorov a rovnako orientované bázy zobrazí opäť na rovnako orientované bázy.

Veta 25.16 Súčin dvoch otáčaní $\eta[S, \alpha]$, $\omega[T, \beta]$ je buď translácia (ak $\alpha + \beta = 2k\pi$, k - celé) alebo otáčanie o uhol $\alpha + \beta$.

Dôkaz. Stačí vynásobiť matice stôp týchto otáčaní.

Cvičenie

25.1 Nech E je ortonormálny repér. Dokážte, že zobrazenie dané maticou

$$\alpha^E = \begin{pmatrix} \frac{a}{\delta} & \frac{b}{\delta} & 0 \\ \frac{b}{\delta} & -\frac{a}{\delta} & 0 \end{pmatrix} \quad \delta = \sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$$

je osová súmernosť s osou prechádzajúcou začiatkom repéra E .

25.2 Zistite, či matica

$$\begin{pmatrix} \frac{-1+q^2}{1+q^2} & \frac{-2q^2}{1+q^2} & 0 \\ \frac{-2q^2}{1+q^2} & \frac{1-q^2}{1+q^2} & 0 \end{pmatrix}$$

je matica (v ortonormálnom repére) osovej súmernosti s osou $x_1 + qx_2 = 0$.

25.3 Nech E je ortonormálny repér. Dokážte, že zobrazenie dané maticou

$$\alpha^E = \begin{pmatrix} a & -\varepsilon b & e \\ b & \varepsilon a & f \end{pmatrix}$$

je zhodnosť práve vtedy, keď $a^2 + b^2 = 1$ a $\varepsilon = \pm 1$.

25.4 Daná je priamka $a : 2x + y - 1 = 0$ a bod $S[3, -1]$. Vypočítajte rovnice súčinnu $\sigma_a \sigma_S$ a určte o aký druh zobrazenia ide.

25.5 Napíšte multiplikatívne tabuľky grupy symetrií štvorca, obdĺžnika a rovnoramenného (ale nie rovnostranného) trojuholníka.

26 Zhodnosti na E_3

Každá zhodnosť na E_3 je afinita. Preto každá zhodnosť zobrazí priamku, rovinu, úsečku, polpriamku, polrovinu, rovnobežník, trojuholník, konvexný n -uholník, rovnobežné podpriestory, kolineárne body, komplanárne body opäť na úsečku, polpriamku... atď. Každá zhodnosť na E_3 nemení vzdialenosti, kolmost a uhol podpriestorov v E_3 . Pre každé dva štvorsteny $ABCD, A'B'C'D'$, $|AB| = |A'B'|, \dots, |CD| = |C'D'|$ existuje jediná zhodnosť, ktorá zobrazí $A \mapsto A', B \mapsto B', C \mapsto C', D \mapsto D'$.

Najdôležitejšie zhodné zobrazenie na E_3 je súmernosť podľa roviny. Keď N je rovina v E_3 , potom zobrazenie $\sigma_N : E_3 \rightarrow E_3, X \mapsto X'$ je súmernosť podľa roviny N práve vtedy, keď ortogonálny priemet bodu X do N je stred dvojice X, X' ; rovinu N nazývame os tejto súmernosti. Každá zhodnosť na E_3 sa dá napísať ako súčin nie viac ako 4-och súmerností podľa rovín.

Súčin dvoch súmerností σ_N, σ_M podľa rovín N, M je translácia práve vtedy, keď $M \parallel N$; ak M, N nie sú rovnobežné, $\sigma_N \sigma_M$ nazývame *neidentická rotácia* (alebo *neidentické otáčanie*) na E_3 s osou $M \cap N$; ak $M \perp N$, $\sigma_N \sigma_M$ je osová súmernosť $\sigma_N \sigma_M = \sigma_M \sigma_N$.

Nech $\sigma_M, \sigma_N, \sigma_K$ sú súmernosti podľa rovín definované na E_3 . Ak $M \cap N = \emptyset$ a $K \perp M$, tak $\sigma_M \sigma_N \sigma_K$ nazývame posunutá súmernosť podľa roviny (skrátene PSR) a to z toho dôvodu, že toto zobrazenie sa dá zložiť z posunutia a súmernosti podľa roviny, pričom vektor posunutia je rovnobežný s touto rovinou. Ak M, N nie sú rovnobežné a $M \perp K \perp N$, súčin $\sigma_M \sigma_N \sigma_K$ nazývame otočená súmernosť podľa roviny (skrátene ORS). Jej špeciálnym prípadom je stredová súmernosť, ktorá je súčinom troch súmerností podľa rovín, každé dve z ktorých sú na seba kolmé.

Existuje len jeden typ zhodností na E_3 , ktoré sú súčinom najmenej 4-och súmerností podľa rovín. Je to skrutkový pohyb, ktorý je súčin neidentickej rotácie a posunutia o nenulový vektor rovnobežný s osou rotácie.

Týmito zobrazeniami sú vyčerpané všetky možné typy zhodností na priestore E_3 .

Zhodnosti možno klasifikovať aj pomocou samodružných bodov a smerov. Takúto klasifikáciu zhodností na E_3 uvádzame v tabuľke.

$sab \xi$	$cosab \xi$	$\xi : E_3 \rightarrow E_3$
rovina N	každý smer kolmý na N alebo rovnobežný s N	σ_N
E_3	každý smer	identita
\emptyset	každý smer	neidentická translácia
priamka L	smer L	rotácia, ktorá nie je osová súmernosť
priamka L	smer L a každý smer kolmý na L	osová súmernosť
bod S	každý smer	stredová súmernosť
\emptyset	každý smer kolmý na N alebo rovnobežný s nadr. N	PRS
bod S	smer L	ORS , ktorá nie je stredová súmernosť
\emptyset	smer L a každý smer kolmý na L	skrutkový pohyb s otočením o 180°
\emptyset	smer L	skrutkový pohyb s otočením o uhol $\neq 180^\circ$

Cvičenie

- 26.1 Nech $\omega : E_3 \rightarrow E_3$ je otáčanie, ktoré nie je osová súmernosť. Nech N je taká rovina, že $N \parallel \omega N$. Dokážte, že rovina N je kolmá na os otáčania ω .
- 26.2 Napíšte rovnice súmernosti podľa roviny $N : z = 9$.
- 26.3 Napíšte rovnice súmernosti podľa priamky $L : z = 0, y = -3$.
- 26.4 Napíšte rovnice PRS , ktorá je súčinom súmernosti podľa roviny $z = 4$ a translácie o vektor $(-2, 1, 0)$.
- 26.5 Určte typ a rovnice zhodnosti, ktorá je súčinom súmerností podľa rovín $z = 0, 2x + y = 0$ a translácie o vektor $(0, 0, 3)$.
- 26.6 Určte typ a rovnice zhodnosti, ktorá je súčinom súmerností podľa rovín $x = 0, x - 2y = 0, z = 4$.
- 26.7 Nech M, N, K sú po dvoch kolmé roviny v E_3 . Dokážte, že súčin $\sigma_M \sigma_N \sigma_K$ (troch súmerností podľa týchto rovín) je stredová súmernosť.
- 26.8 Súčin rovnoľahlosti s charakteristikou $\neq \pm 1$, stredom S a súmernosti podľa roviny, v ktorej S leží, nazývame *centrálnopodobná symetria* na E_3 (skrátene *CPS*). Nech S_1 je ľubovoľný bod a N_1 ľubovoľná rovina priestoru E_3 . Dokážte, že existuje CPS tak, že sa rovná súčinu rovnoľahlosti $\rho_1[S_1, k]$ a súmernosti σ_{N_1} pre každé $k \neq \pm 1$.

27 Podobnosti na rovine

Veta 27.1 Nech $\alpha : E_2 \rightarrow E_2$ je afinita, E ortonormálny repér priestoru E_2 . Zobrazenie α je podobnosť práve vtedy, keď

$$\alpha^E = \begin{pmatrix} a & -\varepsilon c & e \\ c & \varepsilon a & f \end{pmatrix} \quad \varepsilon = \pm 1, a^2 + c^2 \neq 0. \quad (27.1)$$

Dôkaz. Nech $E = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $\alpha^\# \vec{e}_i = \vec{f}_i$, $i = 1, 2$ a nech

$$\alpha^E = \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \end{pmatrix}. \quad (27.2)$$

Potom $\vec{f}_{1E} = (a, c)$, $\vec{f}_{2E} = (b, d)$. Kolmost' je invariant podobnosti, preto $\vec{f}_1 \perp \vec{f}_2$ a keďže $\langle \vec{f}_1 \rangle^\pm = \langle (-c, a) \rangle$ existuje ε tak, že $\vec{f}_2 = \varepsilon \vec{f}_1$ t.j. $b = -\varepsilon c$, $d = \varepsilon a$. Dalej $|\vec{f}_1| = |\vec{f}_2|$, preto

$$a^2 + c^2 = \varepsilon^2 a^2 + \varepsilon^2 c^2, \quad (1 - \varepsilon^2)(a^2 + c^2) = 0, \quad (1 - \varepsilon^2)|\vec{f}_1|^2 = 0,$$

odkiaľ vzhľadom na to, že $|\vec{f}_1| \neq 0$, $\varepsilon = \pm 1$; matica podobnosti je teda (27.1). Obrátené tvrdenie je evidentné.

Je zrejmé, že afinita $\alpha : E_2 \rightarrow E_2$ daná maticou (27.1) je vlastná podobnosť práve vtedy, keď jej determinant je rôzny od ± 1 .

V tomto článku prevedieme klasifikáciu vlastných podobností na rovine (zhodnosti boli prebraté v predošlom článku).

Každá vlastná podobnosť má práve jeden samodružný bod, preto vlastné podobnosti nemôžeme rozlišovať podľa počtu samodružných bodov ale len podľa počtu samodružných smerov.

Veta 27.2 *Nech $\alpha : E_2 \rightarrow E_2$ je podobnosť. Potom*

$$|\cos \alpha| \in \{0, 2, \infty\}.$$

Dôkaz. Nech α je daná maticou (27.1). Charakteristická rovnica je

$$\begin{vmatrix} a - k & -\varepsilon c \\ c & \varepsilon a - k \end{vmatrix} = 0.$$

Sú len tri možnosti:

(I) $\varepsilon = 1, c = 0$:

α je zrejme rovnoľahlosť;
 $\det \alpha = a^2 > 0$

(II) $\varepsilon = -1$:

Charakteristická rovnica je $(a - k)(a + k) + c^2 = 0$, t.j. $k^2 = a^2 + c^2$. Táto rovnica má dva rôzne korene, preto $|\cos \alpha| = 2$;
 $\det \alpha = -a^2 - c^2 < 0$

(III) $\varepsilon = 1, c \neq 0$:

Charakteristická rovnica je $(a - k)^2 + c^2 = 0$, keďže $c \neq 0$, táto rovnica nemá riešenie;
 $\det \alpha = a^2 + c^2 > 0$.

Definícia 27.3 *Vlastnú podobnosť $\alpha : E_2 \rightarrow E_2$ nazývame centrálnopodobná symetria (skrátene CPS), ak α je nepriama afinita a centrálnopodobná rotácia (skrátene CPR), ak α je priama afinita, ktorá nie je rovnoľahlosť.*

Dôsledok 27.4 *Existujú tri typy vlastných podobností na E_2 : rovnoľahlosť (s charakteristikou $k \neq \pm 1$), CPS, CPR.*

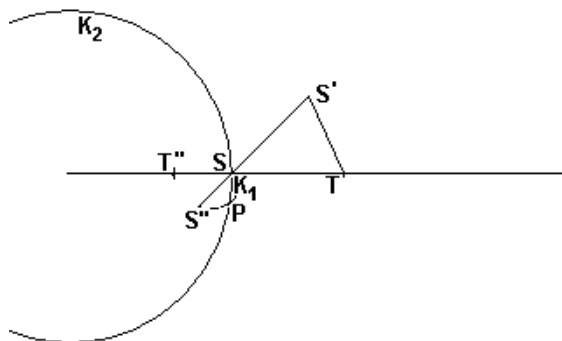
Veta 27.5 *Každá CPS na rovine je súčinom rovnoľahlosti a osovej súmernosti, ktorej os prechádza stredom tejto rovnoľahlosti. Každá CPR na rovine je súčinom rovnoľahlosti a otáčania, ktorých stredy splývajú.*

Dôkaz. Nech φ je vlastná podobnosť s koeficientom k , φ nie je rovnoľahlosť, $\varphi S = S$ a nech $\rho[S, k^{-1}]$ je rovnoľahlosť. Potom $\varphi\rho$ je zhodnosť, S jej samodružný bod, preto $\varphi\rho$ je buď osová súmernosť s osou prechádzajúcou bodom S alebo neidentická rotácia so stredom S ($\varphi\rho \neq 1$ inak by φ bola rovnoľahlosť).

Z tejto vety vyplýva, že ku každej vlastnej podobnosti φ , ktorá je súčinom rovnoľahlosti a osovej súmernosti (stred rovnoľahlosti a os osovej súmernosti neincidujú) existujú rovnoľahlosť a osová súmernosť, ktorej os prechádza stredom rovnoľahlosti tak, že ich súčin je φ . Analogicky je to i s CPR.

Príklad 27.6 *Daná je rovnoľahlosť $\rho[S, -0.5]$ a otáčanie $\omega[T, -75^\circ]$. Zostrojte samodružný bod centrálnopodobnej rotácie $\alpha = \rho\omega$.*

Riešenie. (viď obrázok)



Nech P je hľadaný samodružný bod (t.j. $P' = \alpha P = P$) a nech $S' = \alpha S$, $T' = \alpha T$. Koeficient podobnosti α je 0.5, preto $|PT| : |PT'| = 2$, čiže pomer vzdialeností bodu P od bodov T , T' je 2; všetky také body ležia na Apollóniovej kružnici $K_2 = \{X; |XT| : |XT'| = 2\}$. Ďalej $\widehat{SPS''} = 105^\circ$ preto P leží na kružnicovom oblúku $K_1 = \{X; \widehat{XS''} = 105^\circ\}$. Existenciu bodu P zaručuje Veta 21.18.

Cvičenie

- 27.1 Dokážte, že samodružné smery CPS sú navzájom kolmé.
- 27.2 Zostrojte stred rovnoláhlosti, ktorá je súčinom rovnoláhlostí $\rho[S, -3]$, $\delta[O, 2]$, ak $O \neq S$ sú dané body roviny E_2 .
- 27.3 Vypočítajte rovnice CPS , ktorá je súčinom súmernosti podľa priamky $x = 0$ a rovnoláhlosti $\rho[S, -3]$, kde $S[-1, 2]$.
- 27.4 Vypočítajte rovnicu samodružnej priamky podobnosti danej maticou

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 9 \end{pmatrix}.$$

- 27.5 Dokážte, že každá samodružná priamka vlastnej podobnosti prechádza jej samodružným bodom.
- 27.6 Nech $(C, +, \cdot)$ je pole komplexných čísel, $a + bi$ komplexné číslo, kde $i^2 = -1$ je imaginárna jednotka. Dané je zobrazenie

$$\rho : C \rightarrow C, x + yi \mapsto (x + yi) \cdot (a + bi).$$

Dokážte, že ρ možno považovať za otočenie, centrálnopodobnú rotáciu, rovnoláhlosť, ak v poradí $a^2 + b^2 = 1$, $a^2 + b^2 \neq 1$, $a \neq 0 \wedge b = 0$.

- 27.7 Určte a , b tak, aby zobrazenie

$$\rho : C \rightarrow C, x + yi \mapsto (x - yi) \cdot (a + bi)$$

bola osová súmernosť alebo centrálnopodobná rotácia alebo centrálnopodobná symetria.

- 27.8 Daná je priamka $L : 2x_1 + 3x_2 - 2 = 0$; napíšte σ_L ako zobrazenie $C \rightarrow C$.

- 27.9 Nech $(C, +, \cdot)$ je pole komplexných čísel, i je imaginárna jednotka a nech

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}; a, b \in R \right\}.$$

Dokážte, že zobrazenie

$$\eta : C \rightarrow M, a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix};$$

je izomorfizmus poľa $(C, +, \cdot)$ a štruktúry $(M, +, \cdot)$ (kde $(+)$ resp. (\cdot) je súčet resp. súčin matíc).

A P L I K Á C I E Z O B R A Z E N Í

28 Podobnosť a zhodnosť útvarov v E_n

Definícia podobnosti a zhodnosti útvarov

Jeden z najdôležitejších "geometrických" pojmov je podobnosť útvarov.

Definícia 28.1 Útvar U je podobný s útvarom V v priestore E_n , ak existuje podobné zobrazenie na E_n , ktoré zobrazí útvar U na V ; označenie $U \sim V$. Ak koeficient tohto zobrazenia je k , hovoríme, že k je koeficient podobnosti útvarov U, V . Ak koeficient podobnosti útvarov U, V je 1, útvar U je zhodný s útvarom V ; označenie $U \cong V$.

Definíciou 28.1 sme do množiny všetkých útvarov priestoru E_n zaviedli binárnu reláciu "podobnosť". Táto relácia je relácia ekvivalencie. Skutočne, identita zobrazí ľubovoľný útvar U na U a preto "podobnosť" je reflexívna relácia; ak podobnosť φ zobrazí U na V , tak podobnosť φ^{-1} zobrazí V na U to znamená, že "podobnosť" je symetrická relácia; ak φ, ψ sú podobnosti a $\varphi U = V, \psi V = T$, tak $\psi\varphi$ je podobnosť, ktorá zobrazí U na T , teda U a T sú podobné útvary, čiže "podobnosť" je tranzitívna relácia. Fakt, že \sim je relácia ekvivalencie znamená, že

$$(i) \quad U \sim U$$

$$(ii) \quad U \sim V \Rightarrow V \sim U$$

$$(iii) \quad U \sim V \text{ a } V \sim T \Rightarrow U \sim T.$$

Keďže relácia \sim je symetrická, môžeme výrok "útvar U je podobný s útvarom V " nahraďiť výrokom "útvary U, V sú podobné".

Každá relácia ekvivalencie na nejakej množine, rozdelí túto množinu na disjunktné triedy navzájom ekvivalentných prvkov. Preto aj relácia \sim rozdelí množinu všetkých útvarov priestoru E_n na disjunktné triedy podobných útvarov. Každú takúto triedu nazývame *tvar*. Abstraktný pojem tvar dostáva tak presný obsah.

Každú priamu zhodnosť nazývame tiež *premiestnenie*. Hovoríme, že útvar U je premiestnenie útvaru V , ak existuje premiestnenie, ktoré zobrazí U na V . Keď dva útvary priestoru E_3 sú podobné, potom jeden z nich sa dá premiestniť tak, že tieto útvary sú rovnoľahlé; skutočne, ak koeficient podobnosti útvarov U, V je k a ρ je rovnoľahlosť s charakteristikou k , tak $\rho^{-1}V = U'$ je útvar zhodný s U , preto existuje zhodnosť ξ tak, že $\xi(U') = U$. Rovnoľahlosť ρ na E_3 môže byť priama alebo nepriama podobnosť. Jej charakteristiku (k alebo $-k$) preto zvolíme tak, aby ξ bola priama zhodnosť.

Nie je ťažké dokázať, že každé dva body, každé dve priamky, ... a všeobecne každé dva rovnako dimenzionálne podpriestory priestoru E_n sú podobné. Vzhľadom na Vetu 16.2 dva priestory E_n, E_m , ktoré nemajú rovnaké dimenzie nie sú podobné.

Nielen relácia \sim je ekvivalencia, aj relácia \cong definovaná na množine všetkých útvarov priestoru E_n je relácia ekvivalencie. Zo symetričnosti tejto relácie vyplýva oprávnenie hovoriť "útvary U, V sú zhodné" (namiesto U je zhodný s V).

Veta 28.2 Dve úsečky sú zhodné práve vtedy, keď majú rovnaké veľkosti.

Dôkaz. Keď sú dve úsečky zhodné, ich veľkosti sú tiež zhodné, pretože skalárny súčin je invariant každej zhodnosti. Obrátene, nech úsečky $A_0A_1, A'_0A'_1$ majú rovnaké nenulové veľkosti. Nech τ je translácia, ktorá zobrazí $A_0 \mapsto A'_0$. Ak $A'_1 = \tau A_1$ dôkaz je skončený, v opačnom prípade, nech N je nadrovina prechádzajúca stredom úsečky $A'_1\tau A_1$ kolmo na túto úsečku. Zrejme N prechádza bodom A'_0 , preto $\sigma_N\tau$ zobrazí úsečku A_0A_1 na úsečku $A'_0A'_1$.

Veta 28.3 Každé dva podobné uhly sú zhodné.

Dôkaz. Nech φ je podobnosť s koeficientom k , ktorá zobrazí uhol AVB na uhol $A'V'B'$ a nech $\rho[V', k^{-1}]$ je rovnoláhosť. Zrejme ρ zobrazí uhol $A'V'B'$ na uhol $A'V'B'$, preto $\rho\varphi$ je zhodnosť, ktorá zobrazí uhol AVB na uhol $A'V'B'$, dôkaz je skončený.

Veta 28.4 *Dva uhly sú zhodné práve vtedy, keď majú rovnaké veľkosti.*

Dôkaz. Ak sú dva uhly zhodné, potom majú rovnaké veľkosti lebo zhodnosť nemeňte veľkosť uhlov. Obrátene, nech dva uhly $ABC, A'B'C'$ majú rovnaké veľkosti. Potom sú obidva duté alebo obidva priame alebo obidva nevypuklé. Nech sú obidva duté, bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $|AB| = |A'B'| = 1$ a $|BC| = |B'C'| = 1$. Najprv predpokladajme, že E_n je rovina. Potom podľa kosínusovej vety aj $|AC| = |A'C'|$ a podľa vety o určenosti zhodnosti, existuje jediná zhodnosť, ktorá zobrazí $A \mapsto A', B \mapsto B', C \mapsto C'$. V prípade, že $n > 2$, označme $M = \overline{ABC}, N = \overline{A'B'C'}$; nech $\vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n$ je ortonormálna báza ortogonálneho doplnku \vec{M}^\perp a nech $\vec{f}_3, \dots, \vec{f}_n$ je ortonormálna báza ortogonálneho doplnku \vec{N}^\perp . Nech ďalej $A_0 = A, A_1 = B, A_2 = C, A_3 = A_0 + \vec{e}_3, \dots, A_n = A_0 + \vec{e}_n, B_0 = A', B_1 = B', B_2 = C', B_3 = B_0 + \vec{f}_3, \dots, B_n = B_0 + \vec{f}_n$, potom zrejme $|B_i B_j| = |A_i A_j|$ pre všetky $i, j = 0, 1, \dots, n$ a preto podľa Vety 21.13 existuje podobnosť, ktorá zobrazí $A_i \mapsto B_i$, pre všetky $i = 0, 1, \dots, n$, t.j. $A \mapsto A', B \mapsto B', C \mapsto C'$; konštrukciu tejto podobnosti, možno použiť aj v dôkazoch ďalších viet o podobnosti trojuholníkov, preto ju už nebudeme uvádzať.

Podobnosť trojuholníkov

Jednou z najdôležitejších partii v učive geometrie na strednej škole je podobnosť trojuholníkov. Podľa definície 28.1 sú dva trojuholníky podobné práve vtedy, keď existuje podobné zobrazenie, ktoré zobrazí jeden trojuholník na druhý. Táto definícia nedáva možnosť zistiť priamo z vlastností trojuholníkov alebo veľkostí ich strán a uhlov či sú podobné alebo nie. K tomu (ale nielen k tomu) slúžia vety o podobnosti trojuholníkov (dobré známe zo strednej školy).

Pod symbolom $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ budeme rozumieť, že existuje podobnosť, ktorá zobrazí $A \mapsto A', B \mapsto B', C \mapsto C'$. Preto v zápise $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ záleží na poradí bodov. Na prvých pozíciách v tomto zápise sú tie vrcholy, pri ktorých sú zhodné uhly, podobne na druhých a tretích pozíciách. Preto ak $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ nemusí platiť $\triangle ABC \sim \triangle B'A'C'$. Zápis $\triangle ABC \sim \triangle B'A'C'$ možno však cyklicky obmieňať, takže potom aj $\triangle BAC \sim \triangle B'A'C'$ atď. Ak $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, dvojice vrcholov $(A, A'), (B, B'), (C, C')$, nazývame k sebe príslušné. Dvojice strán $(AB, A'B'), (BC, B'C'), (AC, A'C')$ a dvojice uhlov $(\sphericalangle A, \sphericalangle A'), (\sphericalangle B, \sphericalangle B'), (\sphericalangle C, \sphericalangle C')$ nazývame tiež k sebe príslušné. Takúto príslušnosť môžeme rozšíriť na výšky, ťažnice, osi uhlov atď.

Veta 28.5 *Keď trojuholníky $ABC, A'B'C'$ sú podobné, predpokladajme, že $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, potom existuje reálne číslo k tak, že*

$$\begin{aligned} |A'B'| &= k|AB| & |B'C'| &= k|BC| & |C'A'| &= k|CA| \\ \sphericalangle A' &\cong \sphericalangle A & \sphericalangle B' &\cong \sphericalangle B & \sphericalangle C' &\cong \sphericalangle C. \end{aligned} \quad (28.1)$$

Dôkaz. Podľa definície 28.1 existuje podobné zobrazenie φ tak, že $\varphi A = A', \varphi B = B', \varphi C = C'$. Obraz dutého uhla $CAB = \sphericalangle A$ je dutý uhol $C'A'B' = \sphericalangle A'$; pretože podobnosť zobrazí uhol na uhol s ním zhodný, platí $\sphericalangle A' \cong \sphericalangle A$. Podobne dokážeme $\sphericalangle B' \cong \sphericalangle B, \sphericalangle C' \cong \sphericalangle C$. Ak k je koeficient podobnosti φ , tak z definície 21.1 vyplýva zvyšok tvrdenia tejto vety.

Pretože medzi invarianty podobností patrí deliaci pomer a veľkosť uhla, tak je zrejmé, že ak nejaké podobné zobrazenie zobrazí $\triangle ABC$ na $\triangle A'B'C'$, tak ťažnice, osi uhlov, osi strán, stredné priečky, výšky $\triangle ABC$ sa v poradí zobrazia na ťažnice, osi uhlov, osi strán, stredné priečky, výšky $\triangle A'B'C'$, preto aj ťažisko, ortocentrum, stred opísanej a stred vpísanej kružnice sa zobrazia v poradí do ťažiska, ..., stredu vpísanej kružnice. To na druhej strane znamená, že ak dva trojuholníky sú podobné, sú úmerné nielen strany týchto trojuholníkov, ale aj ťažnice, výšky a osi uhlov.

Vo vete 28.5 je uvedené, aké vlastnosti musia mať dva trojuholníky, ak sú podobné. K tomu aby dva trojuholníky $\triangle ABC = T, \triangle A'B'C' = T'$ boli podobné však stačí dokázať, že majú len niektoré z vlastností (28.1) (a potom majú všetky). O tom hovoria nasledujúce štyri vety.

Veta 28.6 (*s:s:s*) V E_n sú dané dva trojuholníky $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$. Keď

$$|A'B'| : |AB| = |B'C'| : |BC| = |C'A'| : |CA|,$$

potom $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Dôkaz. Keď $n = 2$, dôkaz vyplýva priamo z Vety 21.13.

Veta 28.7 (*s:su*) V E_n sú dané dva trojuholníky $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$. Keď

$$\sphericalangle B' \cong \sphericalangle B, \quad |A'B'| : |AB| = |B'C'| : |BC|,$$

potom $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Dôkaz. Nech daný pomer strán je k , t.j. $|A'B'| = k|AB|$, $|B'C'| = k|BC|$. Podľa kosínusovej vety

$$\begin{aligned} |A'C'|^2 &= |B'A'|^2 + |B'C'|^2 - 2|B'A'||B'C'| \cos \sphericalangle B' = \\ &k^2|BA|^2 + k^2|BC|^2 - 2k|BA|k|BC| \cos \sphericalangle B = k^2|AC|^2. \end{aligned} \quad (28.2)$$

Teraz už možno použiť Vetu 28.6.

Veta 28.8 (*uu*) V E_n sú dané dva trojuholníky $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$. Keď

$$\sphericalangle A' \cong \sphericalangle A \quad \text{a} \quad \sphericalangle B' \cong \sphericalangle B,$$

potom $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Dôkaz. Je zrejmé, že aj $\sphericalangle C' \cong \sphericalangle C$. Nech $|A'B'| = k|AB|$. Podobne ako v predchádzajúcej vete, ale pomocou sínusovej vety (ktorú použijeme dvakrát) dokážeme, že $|B'C'| = k|BC|$, $|C'A'| = k|CA|$. Ďalej použijeme Vetu 28.6.

Veta 28.9 (*S:su*) V E_n sú dané dva trojuholníky $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$. Keď

$$\sphericalangle A' \cong \sphericalangle A, \quad |AB| < |BC|, \quad |A'B'| : |AB| = |B'C'| : |BC|,$$

potom $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Dôkaz. Z predpokladu $|AB| < |BC|$ vyplýva $\sphericalangle C < \sphericalangle A$ čo znamená, že $\sphericalangle C$ je ostrý uhol (inak by $\sphericalangle C + \sphericalangle A > 180^\circ$); podobne $\sphericalangle C'$ je ostrý uhol. Zo sínusovej vety vyplýva

$$\frac{\sin \sphericalangle C'}{\sin \sphericalangle A'} = \frac{|B'A'|}{|B'C'|} = \frac{|BA|}{|BC|} = \frac{\sin \sphericalangle C}{\sin \sphericalangle A},$$

odkiaľ $\sin \sphericalangle C = \sin \sphericalangle C'$ a keďže $\sphericalangle C, \sphericalangle C'$ sú ostré musia byť aj rovnaké uhly. Teraz stačí použiť Vetu 28.8.

Posledné štyri vety sú často formulované (nie celom presne) aj takto: Ak pre dva trojuholníky platí, že

- (i) tri strany jedného trojuholníka sú úmerné trom stranám druhého trojuholníka, alebo
- (ii) dva uhly jedného trojuholníka sa rovnajú príslušným dvom uhlom druhého trojuholníka, alebo
- (iii) dve strany jedného trojuholníka sú úmerné dvom stranám druhého trojuholníka a uhly zovreté týmito stranami sú zhodné, alebo
- (iv) dve strany jedného trojuholníka sú úmerné dvom stranám druhého trojuholníka a uhly oproti väčším z nich sú zhodné,

tak tieto trojuholníky sú podobné.

Z týchto viet vyplývajú vety o podobnosti špeciálnych trojuholníkov: Ak vo dvoch pravouhlých trojuholníkoch

- (i) je ostrý uhol jedného zhodný s ostrým uhlom druhého, alebo
- (ii) odvesny jedného sú úmerné odvesnám druhého, alebo
- (iii) prepona a odvesna sú úmerné prepone a odvesne druhého trojuholníka,

tak tieto trojuholníky sú podobné.

Je zrejmé, že každé dva rovnostranné trojuholníky sú podobné a tiež každé dva pravouhlé rovnoramenné trojuholníky sú podobné.

Zhodnosť trojuholníkov

Podľa definície 28.1 sú dva trojuholníky zhodné, ak existuje zhodnosť, ktorá zobrazí jeden trojuholník na druhý. Pre praktické účely je užitočnejšie vedieť akým podmienkam musia vyhovovať strany a uhly dvoch trojuholníkov, aby boli zhodné. Na to slúžia vety o zhodnosti trojuholníkov.

Pod symbolom $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ budeme (obdobne ako u podobnosti trojuholníkov) rozumieť, že existuje zhodnosť, ktorá zobrazí $A \mapsto A', B \mapsto B', C \mapsto C'$. Teda v zápise $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ záleží na poradí bodov (viď predošlý článok o podobnosti trojuholníkov).

Z viet 28.5 - 28.9 o podobnosti trojuholníkov priamo vyplýva päť nasledujúcich viet.

Veta 28.10 Ak trojuholníky $ABC, A'B'C'$ sú zhodné, predpokladajme, že $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$, tak

$$\begin{aligned} |A'B'| &= |AB| & |B'C'| &= |BC| & |C'A'| &= |CA| \\ \sphericalangle A' &\cong \sphericalangle A & \sphericalangle B' &\cong \sphericalangle B & \sphericalangle C' &\cong \sphericalangle C \end{aligned} \quad (28.3)$$

$$|\sphericalangle A'| = |\sphericalangle A| \quad |\sphericalangle B'| = |\sphericalangle B| \quad |\sphericalangle C'| = |\sphericalangle C|.$$

Veta 28.11 (sss) V E_n sú dané dva trojuholníky $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$. Keď

$$|A'B'| = |AB| \quad |B'C'| = |BC| \quad |C'A'| = |CA|,$$

potom $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Veta 28.12 (sus) V E_n sú dané dva trojuholníky $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$. Keď

$$\sphericalangle B' \cong \sphericalangle B \quad |A'B'| = |AB| \quad |B'C'| = |BC|,$$

potom $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Veta 28.13 (usu) V E_n sú dané dva trojuholníky $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$. Keď

$$|A'B'| = |AB| \quad \sphericalangle A' \cong \sphericalangle A \quad \sphericalangle B' \cong \sphericalangle B,$$

potom $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Veta 28.14 (Ssu) V E_n sú dané dva trojuholníky $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$. Keď

$$\sphericalangle A' \cong \sphericalangle A \quad |AB| < |BC| \quad |A'B'| = |AB| \quad |B'C'| = |BC|,$$

potom $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Vety 28.11 - 28.14 môžeme preformulovať (nie celkom presne) aj takto: Ak pre dva trojuholníky platí, že

- (i) tri strany jedného trojuholníka sú zhodné s tromi stranami druhého trojuholníka, alebo
- (ii) sa zhodujú vo dvoch stranách a uhle nimi zovretom, alebo
- (iii) sa zhodujú v jednej strane a uhloch k nej príľahlých, alebo
- (iv) sa zhodujú vo dvoch stranách a uhle oproti väčšej z nich,

tak sú zhodné.

29 Použitie zobrazení

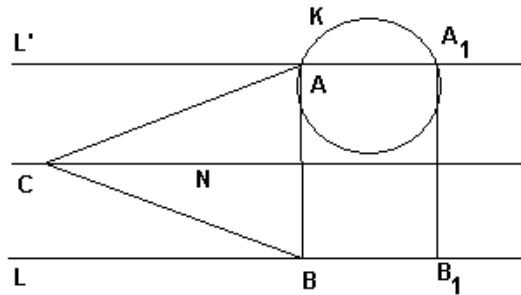
Aplikácie zhodností

Príklad 29.1 Dokážte, že trojuholník je rovnostranný, ak jeho ťažnica a výška splývajú.

Riešenie. Nech S stred strany AB splýva s päťou výšky $\triangle ABC$. Zrejme $\sigma_{\overline{CS}}\overline{AC} = \overline{BC}$ a preto $|AC| = |BC|$.

Príklad 29.2 V rovine E_2 je daná kružnica K , priamka L a na nich neležiaci bod C . Zostrojte $\triangle ABC$ tak, že $|AC| = |BC|$, $A \in K$, $B \in L$ a $\overline{AB} \perp L$.

Riešenie: Rozbor. Nech $N = C + \vec{L}$ (viď obrázok). Potom $N \perp \overline{AB}$ a keďže $|AC| = |BC|$, $\sigma_N B = A$. Pretože $B \in L$, tak $A = \sigma_N B \in \sigma_N L$, teda $A \in K \cap \sigma_N L$.



Konštrukcia:

- (K1) $N = C + \vec{L}$
- (K2) $L' = \sigma_N L$, $A \in L' \cap K$
- (K3) $\sigma_N A = B$.

Dôkaz vyplýva z rozboru a konštrukcie.

Diskusia. Počet riešení závisí od počtu bodov prieniku $L' \cap K$. Preto úloha môže mať 0,1 alebo dve riešenia.

Príklad 29.3 Daný je päťuholník $S_1S_2S_3S_4S_5$. Zostrojte konvexný päťuholník $ABCDE$ tak, že S_1 je stred strany AB , S_2 stred strany BC , ..., S_5 stred strany EA .

Riešenie: Rozbor. Nech σ_i je stredová súmernosť so stredom S_i pre $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Je zrejmé, že

$$A \xrightarrow{\sigma_1} B \xrightarrow{\sigma_2} C \xrightarrow{\sigma_3} D \xrightarrow{\sigma_4} E \xrightarrow{\sigma_5} A$$

preto A je samodružný bod súčinu $\sigma_5\sigma_4\sigma_3\sigma_2\sigma_1$; tento súčin je stredová súmernosť so stredom A .

Konštrukcia:

- (K1) P tak, že $S_1S_2S_3P$ je rovnobežník
- (K2) A tak, že PS_4S_5A je rovnobežník.
- (K3) $B = \sigma_1A$, $C = \sigma_2B$, $D = \sigma_3C$, $E = \sigma_4D$.

Dôkaz vyplýva z rozboru a konštrukcie.

Diskusia. Je zrejmé, že existuje jediný bod A , jediný bod B , ..., zostrojený podľa konštrukcie. Avšak päťuholník $ABCDE$ nemusí byť konvexný, úloha má teda 1 alebo žiadne riešenie.

Aplikácie podobnosti

Príklad 29.4 Zostrojte $\triangle ABC$, ak sú dané veľkosti jeho uhlov $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$ a obvod s .

Riešenie:

Rozbor. Keďže poznáme dva uhly v $\triangle ABC$, poznáme aj tvar, ktorý je daný ľubovoľným trojuholníkom s dvomi uhlami veľkostí $|\sphericalangle A|, |\sphericalangle B|$. Nech $A'B'C'$ je taký trojuholník, že $\sphericalangle A \cong \sphericalangle A'$, $\sphericalangle B \cong \sphericalangle B'$; tento trojuholník je podľa vety 28.8 podobný s $\triangle ABC$, pričom koeficient ich podobnosti je $|A'B'| : |AB| = k$. Ak s' , s sú obvody týchto trojuholníkov, tak zrejme $s' : s = k$. Keďže s je dané a s' poznáme tiež, tak vieme aj koeficient k . Preto stačí k -krát zväčšiť (možno zmenšiť) $\triangle A'B'C'$ a dostaneme $\triangle ABC$.

Konštrukcia.

$$(K1) \quad \triangle AB'C' \text{ tak, že } \sphericalangle A \cong \sphericalangle A', \sphericalangle B \cong \sphericalangle B', A \equiv A'.$$

$$(K2) \quad D, D' \in \overline{AB'} \text{ tak, že } |AD| = s, |AD'| = s', \text{ kde } s' \text{ je obvod } \triangle AB'C'.$$

$$(K3) \quad \text{Nech } \rho[A, D' \mapsto D] \text{ je rovnoláhlosť; } B = \rho B', C = \rho C' (\overline{DD'} \parallel \overline{BB'} \parallel \overline{CC'}).$$

Dôkaz vyplýva z rozboru a konštrukcie.

Diskusia. Táto úloha je nepolohová, preto dva zhodné trojuholníky považujeme za jedno riešenie. Ak $|\sphericalangle A| + |\sphericalangle B| < \pi$, úloha má 1 riešenie, v opačnom prípade žiadne. Skutočne, ak $\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1$ sú dve riešenia našej úlohy, tak tieto trojuholníky sú podobné (dva ich uhly sú zhodné s $\sphericalangle A, \sphericalangle B$) a súčasne ich obvody s_1, s sú rovnalé. Pre obvody podobných trojuholníkov s koeficientom k platí $s_1 \cdot k = s$ a pretože $s_1 = s$, tak $k = 1$ a teda $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$.

Metódu použítu v riešení tohto príkladu možno aplikovať na riešenie úloh, kde je známy tvar hľadaného útvaru.

Príklad 29.5 Dané sú priamky p, q a bod A . Zostrojte obdĺžnik $ABCD$ tak, aby vrchol B ležal na priamke p , vrchol C na q a aby pomer dvoch strán obdĺžnika $ABCD$ bol $3 : 1$.

Riešenie:

Rozbor. Nech $|AB| : |BC| = 3 : 1$. To znamená, že poznáme veľkosť orientovaného uhla \widehat{BAC} a pomer $|AB| : |AC| = 3 : \sqrt{10}$. Nech ξ je centrálnopodobná rotácia, so stredom A , orientovaným uhlom \widehat{BAC} a koeficientom $\sqrt{10} : 3$. Táto CPR zobrazí bod B do C a teda priamku p na priamku p' , ktorá musí prechádzať bodom C a keďže $C \in q$ tak $C \in p' \cap q$.

Konštrukcia.

$$(K1) \quad \triangle A'B'C' \text{ tak, že } |\sphericalangle B'| = \pi/2, |A'B'| : |B'C'| = 3 : 1.$$

$$(K2) \quad \text{Nech } \xi[A, \widehat{B'A'C'}, \sqrt{10} : 3] \text{ je CPR}$$

$$(K3) \quad p' = \xi p, C \in p' \cap q$$

$$(K4) \quad B = \xi^{-1}C$$

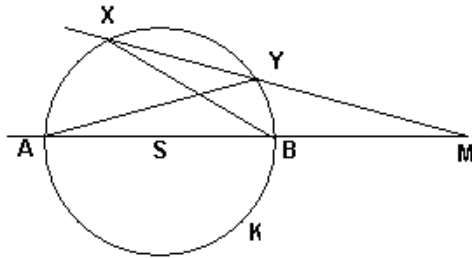
$$(K5) \quad \text{obdĺžnik } ABCD.$$

Dôkaz vyplýva z rozboru a konštrukcie.

Diskusia. Táto úloha je polohová, preto dva rôzne obdĺžniky považujeme za rôzne riešenia. Z (K3) vyplýva, že bodov C môže byť 0, 1 alebo ∞ . V (K2) sú 4 CPR, lebo $\widehat{B'A'C'}$ je kladne alebo záporne orientovaný a pomery sú dva $|A'B'| : |B'C'| = 3 : 1, |A'B'| : |B'C'| = 1 : 3$. Spolu teda počet riešení môže byť 0, 1, 2, 3, 4 ∞ .

Mocnosť bodu ku kružnici

Podobnosť trojuholníkov má ešte ďalšie aplikácie. Nech v rovine E_2 je daná kružnica $K[S, r]$ a bod M , ktorý je jej vonkajším bodom. Nech priamka MS pretína kružnicu K v bodoch A, B a nech $L \neq \overline{SM}$ je ľubovoľná sečnica alebo dotyčnica kružnice K prechádzajúca bodom M . Nech $L \cap K = \{X, Y\}$ (viď obrázok). Z vety o obvodových uhloch vyplýva, že v trojuholníkoch BXM, YAM sú uhly $\sphericalangle A, \sphericalangle X$ zhodné (platí to aj v prípade, že $X = Y$, t.j. keď L je dotyčnica kružnice K) a pretože aj $\sphericalangle M \cong \sphericalangle M$, tak $\triangle BXM \sim \triangle YAM$ preto $|BM| : |XM| = |YM| : |AM|$, t.j. $|AM| \cdot |BM| = |XM| \cdot |YM|$.



To znamená, že ak sa priamka L otáča okolo bodu M , tak body X, Y prebehnú všetky body kružnice K , pričom súčin $|\overrightarrow{MX}| \cdot |\overrightarrow{MY}|$ je konštantný (a vzhľadom na to, že uhol vektorov \overrightarrow{MX} , \overrightarrow{MY} je nulový) rovná sa skalárnemu súčinu $\overrightarrow{MX} \cdot \overrightarrow{MY}$. Celá táto úvaha zostane v platnosti, ak by M bol vnútorným bodom kružnice K (až na znamienko skalárneho súčinu $\overrightarrow{MX} \cdot \overrightarrow{MY}$). Preto môže byť uvedená

Definícia 29.6 V rovine je daná kružnica $K[S, r]$ a bod M . Nech priamka prechádzajúca bodmi S, M pretína kružnicu K v bodoch A, B . Skalár

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \mu[M, K]$$

nazývame mocnosť bodu M ku kružnici K .

Z tejto definície (a vzhľadom na to, že $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} = \vec{0}$, $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = -r^2$), vyplýva

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SA}) \cdot (\overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SB}) = \overrightarrow{MS}^2 + \overrightarrow{MS}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB}) + \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = |MS|^2 - r^2,$$

čiže mocnosť bodu M ku kružnici $K[S, r]$ je daná vzorcom

$$\mu[M, K] = |MS|^2 - r^2. \quad (29.1)$$

Z tohto vzorca priamo vyplýva, že mocnosť bodu ku kružnici, na ktorej leží je 0, mocnosť vnútorného (resp. vonkajšieho) bodu kružnice k tejto kružnici je záporné (resp. kladné) reálne číslo.

V prípade, že M je vonkajší bod kružnice $K[S, r]$, existuje dotyčnica kružnice K , ktorá prechádza bodom M ; nech T je dotykový bod. Podľa Pytagorovej vety pre $\triangle STM$, je $|MT|^2 = |MS|^2 - r^2$, čiže platí

Veta 29.7 Mocnosť vonkajšieho bodu kružnice k tejto kružnici sa rovná štvorcu dĺžky dotyčnice kružnice z tohto bodu.

Veta 29.8 Nech H je množina všetkých takých bodov roviny E_2 , ktoré majú rovnakú mocnosť k daným dvom kružniciam $K_1[S_1, r_1]$, $K_2[S_2, r_2]$ ležiacim v rovine E_2 . Potom

$$(i) S_1 = S_2 \wedge r_1 \neq r_2 \Rightarrow H = \emptyset$$

$$(ii) S_1 = S_2 \wedge r_1 = r_2 \Rightarrow H = E_2$$

$$(iii) S_1 \neq S_2 \Rightarrow H \text{ je priamka (túto priamku nazývame chordála kružníc } K_1, K_2) \text{ kolmá na strednú } S_1S_2.$$

Dôkaz. V rovine E_2 zvolíme karteziánsku súradnicovú sústavu tak, že x -ová os prechádza bodmi S_1, S_2 . Nech v tejto sústave majú body X, S_1, S_2 v poradí súradnice $[x, y]$, $[0, 0]$, $[s, 0]$. Keď $X \in H$, podľa (29.1) $|XS_1|^2 - r_1^2 = |XS_2|^2 - r_2^2$, ak túto rovnosť prepíšeme pomocou súradníc, dostávame

$$x^2 + y^2 - r_1^2 = (x - s)^2 + y^2 - r_2^2,$$

odkiaľ po úprave

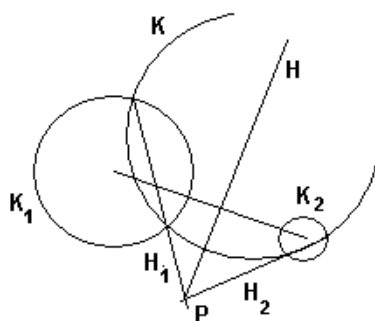
$$2sx = r_1^2 - r_2^2 + s^2. \quad (29.2)$$

Teda bod $X \in H$ práve vtedy, keď jeho súradnice x, y vyhovujú rovnici (29.2). Množina H je neprázdna, ak existuje riešenie rovnice (29.2). Je zrejmé, že táto rovnica nemá riešenie, ak sú splnené predpoklady v (i) a každý bod $X[x, y]$ roviny E_2 je jej riešením, ak sú splnené predpoklady v (ii). Ak $S_1 \neq S_2$

$$x = \frac{r_1^2 - r_2^2 + s^2}{2s}$$

je jediné riešenie rovnice (29.2), preto H je priamka o rovnici (29.2); táto priamka je zrejme kolmá na x -ovú os, čiže na priamku S_1S_2 . Tým je dôkaz ukončený.

Ak bod M leží na dvoch rôznych kružniciach K_1, K_2 , jeho mocnosť ku každej z nich je nula. To znamená, že bod M má rovnakú mocnosť k týmto kružniciam, čiže leží na ich chordále. Preto chordála dvoch kružníc prechádza každým priesečníkom týchto kružníc (ak existujú). Ak dve kružnice majú dva rôzne body spoločné, tak ich chordála prechádza každým z týchto bodov a ak sa dotýkajú v bode T , ich chordála je ich spoločná dotyčnica prechádzajúca bodom T (chordála prechádza totiž bodom T kolmo na strednú S_1S_2). Tento fakt možno využiť na konštrukciu chordály dvoch kružníc K_1, K_2 , ktoré nemajú ani jeden spoločný bod (viď obrázok):



Zostrojíme takú kružnicu K , ktorá pretína každú z kružníc K_1, K_2 . Nech H_1 , resp. H_2 sú chordály dvojíc K, K_1 , resp. K, K_2 potom chordála H kružníc K_1, K_2 prechádza priesečníkom P chordál H_1, H_2 kolmo na strednú kružníc K_1, K_2 . Bod P má totiž rovnaké mocnosti ku kružniciam K_1, K resp. K, K_2 a to znamená, že P má rovnakú mocnosť ku kružniciam K_1, K_2 . Takýto bod P , ktorý má rovnakú mocnosť k trom daným kružniciam nazývame *potenčný bod* týchto kružníc.

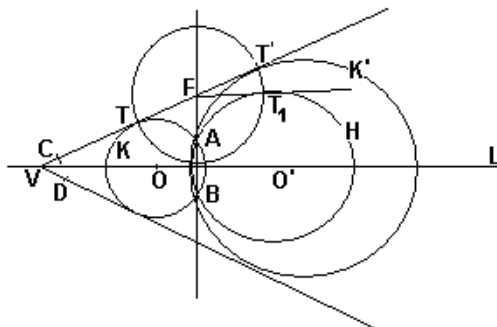
Nech A je taký bod chordály dvoch kružníc K_1, K_2 , z ktorého existujú dotyčnice k týmto kružniciam, označme T_1, T_2 príslušné dotykové body. Podľa tvrdenia 29.7 $|AT_1|^2 = |AT_2|^2$, odkiaľ $|AT_1| = |AT_2|$, čiže platí

Veta 29.9 *Dĺžky dotyčníc (ak existujú) z bodu na chordále dvoch kružníc k týmto kružniciam sú rovnaké.*

Táto vlastnosť sa dá využiť na riešenie niektorých konštrukčných úloh.

Príklad 29.10 *V rovine E_2 je daný nenulový dutý uhol CVD a jeho vnútorný bod A . Zostrojte kružnicu, ktorá prechádza bodom A a dotýka sa priamok CV, DV .*

Riešenie. Rozbor. Nech L je os dutého uhla CVD a nech σ_L je osová súmernosť; σ_L zobrazí polpriamku VC na polpriamku VD ; nech $B = \sigma_L A$. Predpokladajme, že $N = A + \vec{L}^\perp$, $F \in N \cap \overline{CV}$ a nech K je hľadaná kružnica. Potom $\mu[F, K] = |FA| \cdot |FB| = d^2$. Ak T je dotykový bod priamky CV a kružnice K , tak $|FT| = d$ (viď obrázok).



Konštrukcia:

- (K1) Os L dutého uhla CVD
 (K2) $N = A + \vec{L}^\pm, F \in N \cap \overline{CV}$
 (K3) Kružnica H prechádzajúca bodom A so stredom na L
 (K4) Dotyčnica $\overline{FT_1}$ kružnice $H, T_1 \in H$
 (K5) Kružnica $G[F, |FT_1|], T \in G \cap \overline{VC}$
 (K6) $O \in (T + \overrightarrow{CV} >^\pm) \cap L$
 (K7) $K[O, |OT|]$

Dôkaz a diskusia: Priamka L existuje jediná, preto aj bod F existuje jediný. Pre body $T, T' \in G \cap \overline{VC}$ platí $|FT| = |FT'| = \sqrt{|FA||FB|}$; také body existujú práve dva a sú rôzne, pre $S = N \cap L$ je totiž

$$|VF|^2 = |VS|^2 + |SF|^2 = |VS|^2 + (|AF| - |AS|)(|BF| + |BS|) = |AF| \cdot |BF| + |VA|^2,$$

odkiaľ $|VF| > \sqrt{\mu[F, K]} = |TF|$, preto aj body O, O' sú rôzne. Úloha má teda vždy dve riešenia.

Kružnicová inverzia

Každá afinita zobrazí priamku na priamku. Také zobrazenia sú tzv. lineárne. Medzi zobrazenia, ktoré nie sú lineárne patrí kružnicová inverzia, ktorou sa budeme zaoberať v tomto subčlánku.

Daná je kružnica $K[O, r]$ v rovine E_2 . Zobrazenie $\omega = \omega[O, r]$ z E_2 do E_2 dané predpisom

$$\omega X = X' \Leftrightarrow X' \in \overline{OX} \wedge |OX| \cdot |OX'| = r^2 \quad (29.3)$$

nazývame *kružnicová inverzia*, kružnicu K nazývame *určujúca kružnica* a jej stred *stredom inverzie* ω .

Kružnicová inverzia nie je definovaná na rovine E_2 , pretože neexistuje obraz stredu určujúcej kružnice; ak totiž $X = O$, tak $|OX| = 0$ a teda $|OX| \cdot |OX'| = 0 \neq r^2$.

Keď $\omega X = X'$, potom $\omega X' = X$; vyplýva to zo symetrie relácie (29.3) vzhľadom na permutáciu $X \leftrightarrow X'$. Teda $\omega(\omega X) = X$ pre každé $X \neq O$, to je dôvod prečo ω nazývame inverzia.

Lema 29.11 *Nech $\omega = \omega[O, r]$ je kružnicová inverzia, $\omega A = A', \omega B = B'$ a nech O, A, B sú nekolineárne body. Potom $\triangle OAB \sim \triangle OB'A'$ a*

$$|\sphericalangle OAB| = |\sphericalangle OB'A'|. \quad (29.4)$$

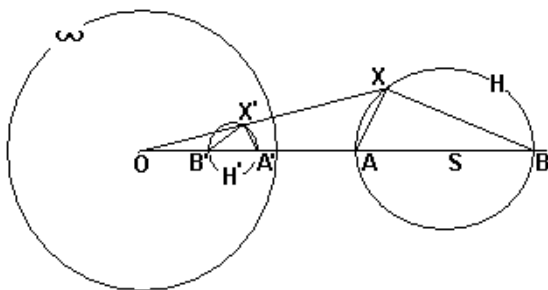
Dôkaz. $\sphericalangle O \cong \sphericalangle O$ a ďalej $|OA| \cdot |OA'| = r^2 = |OB| \cdot |OB'|$, odkiaľ $|OA| : |OB| = |OB'| : |OA'|$, takže vzhľadom na Vetu 28.7 platí $\triangle OAB \sim \triangle OB'A'$. Z tejto podobnosti máme (29.4).

Veta 29.12 *Obráz priamky neprechádzajúcej stredom kružnicovej inverzie je kružnica prechádzajúca stredom inverzie (okrem stredu inverzie) a obrátene.*

Dôkaz. Nech $\omega = \omega[O, r]$ je kružnicová inverzia, L priamka neprechádzajúca stredom O a nech A je päta kolmice z bodu O na priamku L . Nech $X \in L$ a $\omega A = A', \omega X = X', X \neq A$. Podľa (29.4), $90^\circ = |\sphericalangle OAX| = |\sphericalangle OX'A'|$. To znamená, že z bodu X' vidíme úsečku OA' pod pravým uhlom, preto X' leží na Tálesovej kružnici, povedzme L' , nad priemerom OA' . Obrátene, každý bod kružnice L' , (okrem bodu O) sa zobrazí na priamku L a tým je dôkaz ukončený.

Veta 29.13 *Kružnicová inverzia zobrazí kružnicu neprechádzajúcu stredom inverzie na kružnicu, ktorá neprechádza stredom inverzie.*

Dôkaz. Nech $\omega = \omega[O, r]$ je kružnicová inverzia, $H[S, h]$ kružnica neprechádzajúca bodom O . Ak $S = O$ tvrdenie je triviálne. Predpokladajme preto, že $S \neq O$; nech $\overline{SO} \cap H = \{A, B\}$ (viď obrázok).



Potom

$$\sphericalangle OXB \cong \sphericalangle OB'X', \quad \sphericalangle OXA \cong \sphericalangle OA'X';$$

odčítaním týchto rovností máme

$$90^\circ = |\sphericalangle OXB| - |\sphericalangle OXA| = |\sphericalangle OB'X'| - |\sphericalangle OA'X'| = |\sphericalangle B'X'A'|$$

a teda $X' \in H'$, kde H' je Tálesova kružnica nad priemerom $A'B'$. Obrátene, každý bod kružnice H' sa zobrazí do kružnice H a tým je dôkaz ukončený.

Úloha 29.14 Nech $E_2^* = E_2 - \{O\}$ a nech $\omega = \omega[O, r]$ je kružnicová inverzia. Dokážte, že $\omega : E_2^* \rightarrow E_2^*$ je bijekcia.

Úloha 29.15 Nech $\omega = \omega[O, r]$ je kružnicová inverzia a K, H dve kružnice dotýkajúce sa v bode O . Dokážte, že $\omega K, \omega H$ sú rovnobežné priamky.

Pre stučnosť vo vyjadrovaní budeme považovať dve rovnobežné priamky za priamky, ktoré sa dotýkajú; Uhol dvoch čiar K, L každá, z ktorých je buď kružnica alebo priamka, budeme nazývať uhol dotyčníc týchto čiar v ich priesečníku; ak uhol týchto čiar je $\pi/2$, hovoríme, že sú kolmé alebo ortogonálne.

Veta 29.16 Nech každá z čiar K, L je buď kružnica alebo priamka a nech ω je kružnicová inverzia. Potom

- (i) keď K, L , sa dotýkajú, dotýkajú sa aj $\omega K, \omega L$ (t.j. dotykovosť je invariant inverzie)
- (ii) uhol čiar K, L je invariant kružnicovej inverzie ω .

Dôkaz. (i) vyplýva z úloh 29.14, 29.15. (ii) dokážeme len pre dve priamky, zvyšok analogicky. Nech teda K, L sú priamky neprechádzajúce stredom S inverzie, potom ωK je kružnica, ktorej dotyčnica v S je rovnobežná s K , podobne je to aj s ωL . Uhol kružníc $\omega K, \omega L$ je uhol ich dotyčníc v bode S a tie sú rovnobežné s K, L .

Veta 29.17 Nech $\omega \equiv K[S, r]$ je kružnicová inverzia. Kružnica H je samodružná kružnica inverzie ω práve vtedy, keď $K \equiv H$ alebo K, H sú ortogonálne.

Dôkaz. \Rightarrow Nech $H \neq K$, potom H obsahuje jeden vnútorný bod A a jeden vonkajší bod A' kružnice K (vnútro K ω zobrazí na vonkajšok kružnice K a to sú disjunktné množiny), môžeme dokonca predpokladať, že A, A' ležia na strednej kružnici K, H . Potom $A \in H \Rightarrow \omega A \in H \Rightarrow A' = \omega A$ a keďže H je súmerná podľa AA' , tak AA' je jej priemer. $A' = \omega A$ implikuje $|SA||SA'| = r^2$, čiže mocnosť bodu S ku H je r^2 preto \overline{ST} ($T \in K \cap H$) je dotyčnica kružnice H , t.j. K, H sú ortogonálne. \Leftarrow Ak $K = H$ tvrdenie je zřejmé. Nech K, H sú ortogonálne kružnice, nech A, B sú priesečníky H so strednou kružnicou K, H a nech $T \in K \cap H$. Potom $|SA||SB| = \mu(S, H) = |ST|^2 = r^2$ čo implikuje $B = \omega A$ a tak H je samodružná kružnica.

Príklad 29.18 V E_2 sú dané dve rôzne dotýkajúce sa kružnice K, H a priamka L neprechádzajúca ich dotykovým bodom T . Zostrojte kružnicu G tak, aby sa dotýkala kružníc K, H a priamky L .

Riešenie: Rozbor. Nech S, R sú v poradí stredu kružníc K, H a nech $\omega = \omega[T, r]$ je kružnicová inverzia. Potom $\omega K, \omega H$ sú rovnobežné priamky a ωL kružnica prechádzajúca bodom T . Obraz ωG hľadanej kružnice G je kružnica dotýkajúca sa priamok $\omega K, \omega H$ a kružnice $\omega L[Q, a]$. Jej polomer g je polovica vzdialenosti priamok $\omega K, \omega H$, preto jej stred leží na (možno dvoch) kružniciach $L_1[Q, a + g], L_2[Q, a - g]$.

Konstruktia:

- (K1) $\omega = \omega[T, r]$, r volíme tak, aby určujúca kružnica inverzie pretínala obe kružnice K, H .
 (K2) ωK (resp. ωH) je priamka prechádzajúca priesečníkmi kružníc K, ω (resp. H, ω).
 (K3) N je os súmernosti priamok $\omega K, \omega H$ a $N \parallel \omega K$.
 (K4) $g = \omega K \perp N$.
 (K5) A - päta kolmice z T na L .
 (K6) $A' = \omega A$
 (K7) $\omega L[Q, a]$ je kružnica nad priemerom $A'T$.
 (K8) $L_1[Q, a + g], L_2[Q, a - g]$ sú kružnice.
 (K9) G_i je kružnica so stredom v $(N \cap L_1) \cup (N \cap L_2)$ a polomerom g .
 (K10) $\omega G'_i = G_i$ sú hľadané kružnice.

Dôkaz: vyplýva z konštrukcie a vlastnosti kružnicovej inverzie. Počet riešení závisí od počtu kružníc dotýkajúcich sa rovnobežiek $\omega K, \omega H$ a kružnice ωL . Takých kružníc môže byť 0,1,2, 3 alebo 4. Tým je určený aj počet riešení úlohy.

Táto konštrukčná úloha patrí medzi tzv. *Apollóniove úlohy*. Všeobecne Apollóniova úloha znie takto: V rovine E_2 sú dané tri útvary K_1, K_2, K_3 . Každý z týchto útvarov je bod, priamka alebo kružnica. Zostrojte kružnicu K tak, aby sa dotýkala všetkých troch útvarov K_1, K_2, K_3 (kružnica sa dotýka bodu, ak ním prechádza).

Cvičenie

- 29.1 Nech A, B, C sú navzájom rôzne body kružnice $K[S, r]$. Prienik polroviny ABC s kružnicou K nazývame *kružnicový oblúk* (skrátene len oblúk); A, B sú jeho krajné body, C vnútorný; taký oblúk označujeme \widehat{ACB} . Oblúky $\widehat{ACB}, \widehat{ADB}$ nazývame opačné, ak ich zjednotenie je kružnica. Dutý uhol ACB nazývame *obvodový uhol* prislúchajúci oblúku \widehat{ADB} , ak $\widehat{ACB}, \widehat{ADB}$ sú opačné oblúky (tiež hovoríme, že \widehat{ACB} je obvodový uhol nad oblúkom \widehat{ADB}). Ten uhol ASB , ktorého podmnožinou je oblúk \widehat{ADB} nazývame *stredový uhol* príslušný k oblúku \widehat{ADB} (alebo stredový uhol nad oblúkom \widehat{ADB}). Dokážte, že všetky obvodové uhly nad tým istým oblúkom sú zhodné (veta o obvodových uhloch). Stredový uhol nazývame príslušný k obvodovému uhlu (a obrátene), ak oba prislúchajú tomu istému oblúku. Dokážte, že veľkosť obvodového uhla sa rovná polovici veľkosti príslušného stredového uhla.
- 29.2 Nech kružnice $K[S, r], H[O, h]$ sa dotýkajú zvonku v bode T , nech priamka AB sa dotýka kružníc K, H v bodoch A, B a nech spoločná dotyčnica v bode T pretína priamku AB v bode C . Dokážte, že priamky AT, TB, SC, CO ohraničujú obdĺžnik.
- 29.3 Dokážte, že ak A, B, C, D sú štyri body priestoru E_3 neležiace v jednej rovine, existuje jediný bod, ktorý má od všetkých štyroch bodov rovnakú vzdialenosť a uďte jeho konštrukciu.
- 29.4 Nech dotykové roviny guľovej plochy v bodoch A, B sa pretínajú v priamke L . Dokážte, že $L \perp \overline{AB}$.
- 29.5 V E_2 sú dané body $S \neq O$. Zostrojte rovnoramenný $\triangle AA'O$ ($|AO| = |A'O|$) tak, že $(AA'S) = -\frac{2}{3}$ a $\widehat{AOA'} = 30^\circ$.
- 29.6 Nech $\rho[S, -\frac{2}{3}]$ je rovnolahlosť a $\omega[O, +30^\circ]$ je otáčanie. Nech A, A' sú body ako v cvičení 5. Dokážte, že $\rho\omega(A) = \rho A' = A$.
- 29.7 Dokážte, že každé dva štvorce, každé dve kocky a každé dve guľové plochy sú podobné.
- 29.8 Dokážte, že neplatí: Ak sa dva štvoruholníky zhodujú vo všetkých uhloch, sú podobné.
- 29.9 Dokážte, že obdĺžniky sú podobné, ak pomery dvoch ich susedných strán sú rovnaké.
- 29.10 *Deltoid* je konvexný štvoruholník, ktorý nie je rovnobežník a ktorý je súmerný podľa svojej uhlopriečky. Dokážte, že dva deltoidy sú podobné, ak sa zhodujú vo dvoch uhloch.
- 29.11 Dokážte, že každý štvoruholník podobný s deltoidom je deltoid.

29.12 Dokážte, že štvorec a obdĺžnik nie sú podobné.

29.13 Nech ω je kružnicová inverzia s určujúcou kružnicou $K[O, r]$.

(i) Nech $A \notin K$, $A \neq O$, $A' = \omega A$ a nech H je kružnica o priemere AA' . Dokážte, že $\omega H = H$.

(ii) Nech $A \notin K$, $A \neq O$, $A' = \omega A$, $|OA| < |OA'|$ a nech G je kružnica o priemere OA' . Dokážte, že A leží na priamke prechádzajúcej priesečníkmi kružníc K, G .

PROJEKTÍVNA ROVINA a KOLINEÁCIE

30 Projektívna rovina

Homogénne súradnice

Každý bod roviny E_2 je charakterizovaný svojimi súradnicami (v nejakom repére $E = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$), ktoré nazývame tiež afinné súradnice. Ak $ax + by + c = 0$ je rovnica priamky L a $A_E = [a_1, a_2]$ je bod roviny E_2 , tak bod A leží na priamke L práve vtedy, keď $aa_1 + ba_2 + c = 0$, čo pomocou matíc môžeme písať

$$(a \ b \ c) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (a \ b \ c) \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ k \end{pmatrix} = 0$$

kde $k \neq 0$ je ľubovoľné reálne číslo; to znamená, že miesto dvoch súradníc bodu A môžeme brať do úvahy trojice (ka_1, ka_2, k) , $k \neq 0$, ktoré určujú ten istý bod A ; tieto trojice nazývame *homogénne súradnice*. Je prirodzené položiť otázku, aký bod priamky L je určený trojicou $(b, -a, 0)$, keďže

$$(a \ b \ c) \begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Je zrejmé, že "bod" $(b, -a, 0)$ vyhovuje aj rovnici každej priamky rovnobežnej s L , pretože

$$(a \ b \ c') \begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

To znamená, že bodom $(b, -a, 0)$ prechádzajú všetky navzájom rovnobežné priamky (ich smerový vektor je $(b, -a)$). Taký bod budeme nazývať *nevlastný bod* priamky (a, b, c) .

Nech $H = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ je báza priestoru \vec{E}_3 ; všetky súradnice vektorov priestoru \vec{E}_3 (ak nebude povedané inak) budeme uvádzať v báze H . Ak M je matica, tak M^T je k nej transponovaná matica.

Definícia 30.1 *Množinu*

$$RP_2 = \{(x, y, t) \in \vec{E}_3, (x, y, t) \neq (0, 0, 0)\}$$

nazývame reálna projektívna rovina, jej prvky nazývame body, pričom body (x, y, t) , (x', y', t') sú totožné (t, j , $x, y, t \equiv (x', y', t')$) práve vtedy, keď

$$\text{hod} \begin{pmatrix} x & y & t \\ x' & y' & t' \end{pmatrix} = 1$$

(*hod*(M) je hodnosť matice M). Nech (a, b, c) je nenulový vektor priestoru \vec{E}_3 ; priamkou $L \equiv (a \ b \ c)$ roviny RP_2 nazývame množinu všetkých bodov $X = (x, y, t) \in RP_2$, pre ktoré platí $ax + by + ct = 0$ t.j. $XL^T = 0$ alebo $LX^T = 0$. Priamku roviny RP_2 o rovnici $t = 0$ nazývame *nevlastná priamka* a každý jej bod *nevlastný bod*.

V zmysle tejto definície priamku môžeme interpretovať ako usporiadanú trojicu (a, b, c) (vektor $\in \vec{E}_3$) reálnych čísel, pričom dve priamky sú totožné, keď jedna trojica je nenulovým násobkom druhej trojice.

Parametrické rovnice priamky

Tak ako afinná priamka (t.j. priamka roviny E_2) aj projektívna priamka sa dá charakterizovať všeobecnou a parametrickými rovnicami.

Nech $P_1 = (x_1, y_1, t_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, t_2)$ sú rôzne body roviny RP_2 . Ako sa určí všeobecná rovnica projektívnej priamky P_1P_2 v homogénnych súradniciach? Keď $ax + by + ct = 0$ je hľadaná rovnica, potom čísla a, b, c musia vyhovovať rovnicam

$$\begin{aligned} ax_1 + by_1 + ct_1 &= 0 \\ ax_2 + by_2 + ct_2 &= 0. \end{aligned}$$

Riešenie tejto sústavy rovníc je

$$(a \ b \ c) = \left(\begin{array}{cc|cc} y_1 & t_1 & - & x_1 \ t_1 \\ y_2 & t_2 & & x_2 \ t_2 \end{array} \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \begin{array}{cc} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{array} \right).$$

Majme ďalší bod $X = (x, y, t)$. Vzniká otázka, kedy existuje priamka, ktorá prechádza bodmi P_1, P_2, X , $P_1 \neq P_2$? Zrejme vtedy, ak existujú čísla a, b, c (nie súčasne rovné nule) tak, že

$$\begin{aligned} ax + by + ct &= 0 \\ ax_2 + by_2 + ct_2 &= 0 \\ ax_1 + by_1 + ct_1 &= 0. \end{aligned}$$

Táto sústava homogénnych lineárnych rovníc má netriviálne riešenie práve vtedy, keď jej determinant je nula, t.j. keď

$$\begin{vmatrix} x & y & t \\ x_1 & y_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & t_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (30.1)$$

To nastane práve vtedy, keď prvý riadok je lineárnou kombináciou druhých dvoch (druhé dva riadky sú nezávislé, pretože $P_1 \neq P_2$), t.j. keď existujú reálne čísla k_1, k_2 (nie súčasne rovné nule) tak, že

$$\begin{aligned} x &= k_1 \cdot x_1 + k_2 \cdot x_2 \\ y &= k_1 \cdot y_1 + k_2 \cdot y_2 \\ t &= k_1 \cdot t_1 + k_2 \cdot t_2. \end{aligned}$$

Sústavu týchto troch rovníc nazývame *parametrické rovnice* projektívnej priamky P_1P_2 ; k_1, k_2 sú parametre. Túto sústavu parametrických rovníc budeme zapisovať aj pomocou matíc (t.j. vektorov) $X = k_1P_1 + k_2P_2$ alebo $X^T = k_1P_1^T + k_2P_2^T$. Je zrejmé, že keď v (30.1) rozvineme determinant dostaneme všeobecnú rovnicu priamky P_1P_2 .

Príklad 30.2 Vypočítajte súradnice nevlastného bodu projektívnej priamky P_1P_2 , ak $P_1 = (1, -1, 3)$, $P_2 = (2, 4, 7)$.

Riešenie. Všeobecná rovnica priamky P_1P_2 je

$$\begin{vmatrix} x & y & t \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{t.j.} \quad -19x - y + 6t = 0$$

Nevlastný bod tejto priamky na nej leží a jeho tretia súradnica je nula. To znamená, že $-19x - y + 6 \cdot 0 = 0$ odkiaľ $x = 1$, $y = -19$, čiže $(1, -19, 0)$ je nevlastný bod priamky P_1P_2 .

Veta 30.3 Nech P_1, P_2 sú rôzne body a nech

$$C = k_1P_1 + k_2P_2, \quad D = m_1P_1 + m_2P_2.$$

Potom $C \equiv D$ práve vtedy, keď

$$\begin{vmatrix} k_1 & k_2 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (30.2)$$

Dôkaz. $C \equiv D$ práve vtedy, keď vektory $C, D \in \vec{E}_3$ sú lineárne závislé. k_1, k_2 , resp. m_1, m_2 , sú súradnice vektorov C, D v báze (P_1, P_2) preto C, D sú lineárne závislé práve vtedy, keď platí 30.2.

Příklad 30.4 Dokážte, že v RP_2 sa každé dve rôzne priamky pretínajú práve v jednom bode.

Riešenie. Ak $L(a, b, c), N(d, e, f)$ sú rôzne priamky roviny RP_2 , tak

$$\text{hod} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = 2$$

preto sústava

$$\begin{aligned} ax + by + ct &= 0 \\ dx + ey + ft &= 0 \end{aligned}$$

má netriviálne riešenie

$$x : y : t = \left| \begin{array}{cc} b & c \\ e & f \end{array} \right| : - \left| \begin{array}{cc} a & c \\ d & f \end{array} \right| : \left| \begin{array}{cc} a & b \\ d & e \end{array} \right|.$$

Úloha 30.5 Dokážte, že každý bod projektívnej priamky $L(0, 0, 1)$ je nevlastný. Napíšte jej všeobecnú rovnicu.

Veta 30.6 Priamky

$$L_1 \equiv (a_1 \ b_1 \ c_1), \quad L_2 \equiv (a_2 \ b_2 \ c_2), \dots, \quad L_s \equiv (a_s \ b_s \ c_s)$$

prechádzajú jedným bodom (t.j. patria zväzku priamok) práve vtedy, keď

$$\text{hod} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_s & b_s & c_s \end{pmatrix} < 3.$$

Dôkaz. Homogénna sústava lineárnych rovníc

$$L_1 X^T = 0, \quad L_2 X^T = 0, \quad \dots, \quad L_s X^T = 0$$

má netriviálne riešenie (t.j. existuje bod, ktorý leží na každej z nich) práve vtedy, keď platí tvrdenie tejto vety.

Dôsledok 30.7 Keď navzájom rôzne priamky

$$L_1 \equiv (a_1 \ b_1 \ c_1), \quad L_2 \equiv (a_2 \ b_2 \ c_2), \quad L_3 \equiv (a_3 \ b_3 \ c_3)$$

patria zväzku priamok, tak existujú nenulové čísla k_1, k_2 tak, že $L_3 = k_1 L_1 + k_2 L_2$.

Keď L je priamka (resp. bod) roviny E_2 , budeme hovoriť, že L je *afinná priamka* (resp. *afinný bod*). Ak z projektívnej priamky L' vynecháme nevlastný bod, dostaneme afinnú priamku L , ktorú budeme nazývať *afinné zúženie priamky L'* a obrátene L' nazývame *projektívne rozšírenie afinnej priamky L* . Všeobecne, ak z útvaru $U \subset RP_2$ vynecháme všetky nevlastné body, dostaneme útvar, ktorý nazývame *afinné zúženie útvaru U* .

Zmena súradnicového systému

Súradnicový systém v RP_2 je báza priestoru \vec{E}_3 . Nech G, H sú dve bázy priestoru \vec{E}_3 a A je vektor v \vec{E}_3 . Potom závislosť súradníc bodu A v bázach G, H je vyjadrená rovnosťou

$$A^H = G^H A^G. \tag{30.3}$$

Po transponovaní $A_H = A_G G_H$ t.j. $A' = AM$, kde A', A je ten istý bod v rôznych súradnicových systémoch a M je matica typu 3×3 , ktorej determinant je nenulový.

Veta 30.8 Nech L je priamka, ktorej matica v báze G je $L_G = (a \ b \ c)$ a nech G, H sú bázy priestoru \vec{E}_3 . Potom $L_H = L_G H^G$ je matica priamky L v báze H .

Dôkaz. Maticová rovnica priamky L v báze G je $L_G X^G = 0$, odkiaľ $L_G H^G X^H = 0$ je maticová rovnica priamky L v báze H .

Dvojpomer

Nech A, B, C, D sú po dvoch rôzne body priamky L . Potom existujú skaláry k_1, k_2, m_1, m_2 (každý rôzny od nuly) tak, že

$$C = k_1A + k_2B, \quad D = m_1A + m_2B \quad (30.4)$$

Číslo

$$\frac{k_2}{k_1} : \frac{m_2}{m_1}$$

nazývame *dvojpomer* štvorice A, B, C, D (v tomto poradí) a zapisujeme

$$(ABCD) = \frac{k_2}{k_1} : \frac{m_2}{m_1} \quad (30.5)$$

Dvojpomer $(ABCD)$ nie je nikdy rovný jednej; v opačnom prípade

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{m_2}{m_1} \quad \text{t.j.} \quad -k_2m_1 + k_1m_2 = 0,$$

čiže

$$\begin{vmatrix} k_1 & k_2 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix} = 0$$

a tak podľa 30.2, $C = D$.

Mimo dvojpomeru $(ABCD)$ bodov A, B, C, D možno uvažovať aj o dvojpomeroch $(BACD)$, $(ABDC)$, ... atď. Ako sa pritom mení dvojpomer ukazujú rovnosti

$$(ABCD) = \frac{1}{(BACD)} = \frac{1}{(ABDC)} \quad (30.6)$$

$$(ABCD) = 1 - (ACBD) = 1 - (DBCA). \quad (30.7)$$

Dokážeme len (30.6): z (30.4) vyplýva $C = k_2B + k_1A$, $D = m_2B + m_1A$, odkiaľ $(BACD) = (k_1/k_2)/(m_1/m_2) = 1/(ABCD)$.

Štvoricu kolineárnych navzájom rôznych bodov A, B, C, D nazývame *harmonická štvorica*, ak $(ABCD) = -1$; v tomto prípade hovoríme tiež, že body C, D harmonicky oddeľujú body A, B .

Úloha 30.9 Dokážte, že ak $(ABCD) = -1$, tak aj

$$(ABDC) = (BACD) = (BADC) = (CDAB) = (DCAB) = (CDBA) = (DCBA) = -1.$$

Príklad 30.10 Nech $P_i = (x_i, y_i, t_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$ sú navzájom rôzne kolineárne body. Dokážte, že

$$(P_1P_2P_3P_4) = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_4 \\ y_1 & y_4 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} x_2 & x_4 \\ y_2 & y_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}}$$

alebo

$$(P_1P_2P_3P_4) = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ t_1 & t_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_4 \\ t_1 & t_4 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} x_2 & x_4 \\ t_2 & t_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ t_2 & t_3 \end{vmatrix}}$$

alebo

$$(P_1P_2P_3P_4) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ t_1 & t_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_4 \\ t_1 & t_4 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} y_2 & y_4 \\ t_2 & t_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ t_2 & t_3 \end{vmatrix}}$$

Riešenie. Nech $P_3 = k_1P_1 + k_2P_2$, $P_4 = m_1P_1 + m_2P_2$. Ak

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

tak rozpísaním rovností $P_3 = k_1P_1 + k_2P_2$, $P_4 = m_1P_1 + m_2P_2$ do prvých dvoch súradníc dostaneme

$$\begin{array}{ll} k_1x_1 + k_2x_2 = x_3 & m_1x_1 + m_2x_2 = x_4 \\ k_1y_1 + k_2y_2 = y_3 & m_1y_1 + m_2y_2 = y_4 \end{array}$$

odkiaľ

$$k_2 : k_1 = \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_3 & x_2 \\ y_3 & y_2 \end{vmatrix} \quad m_2 : m_1 = \begin{vmatrix} x_1 & x_4 \\ y_1 & y_4 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_4 & x_2 \\ y_4 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Podobne postupujeme vo zvyšných prípadoch.

Veta 30.11 *Dvoj pomer nezávisí na voľbe súradnicového systému.*

Dôkaz. Nech P_i, P'_i je ten istý bod vyjadrený v dvoch súradnicových sústavách (pre všetky $i = 1, 2, 3, 4$), potom $P'_i = P_iM$, kde M je matica prechodu. Ak $P_3 = k_1P_1 + k_2P_2$, a $P_4 = m_1P_1 + m_2P_2$, tak

$$\begin{array}{l} P'_3 = P_3M = (k_1P_1 + k_2P_2)M = k_1P_1M + k_2P_2M = k_1P'_1 + k_2P'_2 \\ P'_4 = P_4M = (m_1P_1 + m_2P_2)M = m_1P_1M + m_2P_2M = m_1P'_1 + m_2P'_2, \end{array}$$

odkiaľ $(P_1P_2P_3P_4) = (P'_1P'_2P'_3P'_4)$.

Deliaci pomer sme definovali v afinnej rovine pre každé tri kolineárne navzájom rôzne body; túto definíciu rozšírime a to nasledovne: Nech $A \neq B$ sú afinné body, potom $(ABC) = 1 \Leftrightarrow C$ je nevlastný bod priamky AB .

Veta 30.12 *Nech A, B sú rôzne afinné body. Potom $(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)}$.*

Dôkaz. Dvoj pomer nezávisí na voľbe súradnicovej sústavy, predpokladajme preto, že $A = (0, 0, 1)$, $B = (0, 1, 1)$, $C = k_1A + k_2B$, $D = m_1A + m_2B$. Keď aj C, D sú vlastné body, potom ich afinné súradnice sú

$$A[0, 0], B[0, 1], C\left[0, \frac{k_2}{k_1 + k_2}\right], D\left[0, \frac{m_2}{m_1 + m_2}\right],$$

takže $(ABC) = -\frac{k_2}{k_1}$ a $(ABD) = -\frac{m_2}{m_1}$. Keď bod D je nevlastný, $m_1 + m_2 = 0$ t.j. $-m_2/m_1 = 1$ a teda $(ABD) = 1 = -m_2/m_1$, analogicky postupujeme, keď C je nevlastný bod.

Príklad 30.13 *Nech S je stred dvojice afinných bodov A, B a nech D je nevlastný bod priamky AB . Dokážte, že $(ABSD) = -1$.*

Riešenie. Keďže $(ABS) = -1$, $(ABD) = 1$, tak podľa Lemy 30.12 $(ABSD) = -1$.

Úloha 30.14 *Nech $d \neq 1$ je kladné reálne číslo a nech $C \neq D$ sú také body afinnej priamky AB ($A \neq B$), že $|AC| = d|BC|$, $|AD| = d|BD|$. Dokážte, že $(ABCD) = -1$.*

Úloha 30.15 *Nech $d \neq 0, 1$ je reálne číslo a nech A, B, C sú po dvoch rôzne kolineárne body. Dokážte, že existuje práve jeden bod D tak, že $(ABCD) = d$.*

Projektívne transformácie

Zmenu súradnicového systému s maticou prechodu B , môžeme interpretovať ako zobrazenie $\alpha : \vec{E}_3 \rightarrow \vec{E}_3$, ktoré vektoru P priradí vektor $P' = PB$ a keďže vektoru kP priradí vektor $kPB = kP'$, tak α je tiež zobrazenie $RP_2 \rightarrow RP_2$.

Definícia 30.16 *Nech*

$$M = \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad (30.8)$$

je matica s determinantom rôznym od nuly. Zobrazenie $\alpha : RP_2 \rightarrow RP_2, P \mapsto P' = PM$ nazývame kolíneácia alebo projektívna transformácia.

Nech E, F sú dve bázy a nech kolíneácia $\alpha : RP_2 \rightarrow RP_2$ je daná maticou M a predpisom $X \mapsto Y, Y_E = X_E M$, kde X_E, Y_E sú body X, Y vyjadrené v báze E . Nájdeme závislosť medzi bodom X a jeho obrazom Y v novej báze F . Nech prechod od bázy E ku F je daný maticou B , t.j. vzorcom $X_F = X_E B$. Potom $X_F B^{-1} = X_E$ a

$$Y_F = Y_E B = X_E M B = X_F B^{-1} M B \rightarrow Y_F = X_F B^{-1} M B,$$

čiže kolíneácia $\alpha : RP_2 \rightarrow RP_2$ je v novej báze opäť násobenie konštantnou štvorcovou maticou zprava.

Veta 30.17 *Každá kolíneácia je bijekcia.*

Dôkaz. Nech α je kolíneácia daná maticou (30.8) a nech P, Q sú rôzne body. Keď $\alpha P = \alpha Q$, tak $PM = kQM$ pre nejaké $k \neq 0$, odkiaľ $(P - kQ)M = (0 \ 0 \ 0)$, $P - kQ = (0 \ 0 \ 0)M^{-1} = (0 \ 0 \ 0)$, čo implikuje $P = kQ$ a to je spor s predpokladom; to znamená, že α je injekcia. Pre každý bod P' je bod $P'M^{-1}$ jeho vzor (lebo $P'M^{-1}M = P'$) a teda α je aj surjekcia.

Je zrejmé, že všetky kolíneácie na RP_2 tvoria grupu, nazývame ju *grupa kolíneácií* alebo *projektívna grupa roviny* RP_2 .

Z Definície 30.16 a Vety 30.11 vyplýva

Veta 30.18 *Dvoj pomer je invariantom každej kolíneácie.*

Nech kolíneácia je daná maticou M , a nech bod X leží na priamke L . Ak $X' = XM$ t.j. X' je obraz bodu X v kolíneácii s maticou M , tak

$$X \in L \Leftrightarrow 0 = LX^T = L(M^T)^{-1}M^T X'^T = L(M^T)^{-1}(XM)^T = L(M^T)^{-1}(X')^T,$$

čiže X' leží na priamke $L(M^T)^{-1}$, preto priamku $L(M^T)^{-1}$ nazývame *obraz priamky* L v kolíneácii danej maticou M .

Dôsledok 30.19 *Bod X leží na priamke L práve vtedy, keď jeho obraz v ľubovoľnej kolíneácii leží na obraze priamky L v tejto kolíneácii (t.j. incidencia bodu a priamky je invariantom každej kolíneácie).*

Veta 30.20 *Nevlastná priamka je invariantom kolíneácie práve vtedy, keď matica kolíneácie je tvaru*

$$M = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ e & f & g \end{pmatrix}$$

s nenulovým determinantom.

Dôkaz. Nech kolíneácia je daná maticou M . Z vlastností transponovanej matice a inverznej matice vyplýva, že v matici $(M^T)^{-1}$ sú prvky v 3. riadku a prvých dvoch stĺpcoch nuly, preto obraz $(0 \ 0 \ 1)(M^T)^{-1} = (0 \ 0 \ k), k \neq 0$, nevlastnej priamky je nevlastná priamka. Zrejme platí i obrátene.

Každú kolíneáciu, ktorej invariantom je nevlastná priamka nazývame *afinita*. Z predošlej vety vyplýva, že každá afinita zobrazí každý nevlastný bod na nevlastný a každý vlastný bod na vlastný bod.

Afinita $\alpha : E_2 \rightarrow E_2$ zobrazí nevlastný zväzok afínných priamok na nevlastný zväzok afínných priamok (pozri vety 16.2, 16.7) preto môžeme definovať $\alpha(P_\infty) = Q_\infty$ vtedy, keď obraz afínnej priamky s nevlastným bodom P_∞ v afinite α je afínná priamka s nevlastným bodom Q_∞ . Zobrazenie $\alpha : RP_2 \rightarrow RP_2$ nazývame *projektívne rozšírenie afinity* $\alpha : E_2 \rightarrow E_2$ a obátene $\alpha : E_2 \rightarrow E_2$ nazývame *afínné zúženie kolíneácie* $\alpha : RP_2 \rightarrow RP_2$, ktorá zobrazí nevlastnú priamku na nevlastnú priamku.

Príklad 30.21 Nech afinita $\alpha : E_2 \rightarrow E_2$ je daná maticou

$$\alpha^E = \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \end{pmatrix}.$$

Dokážte, že jej projektívne rozšírenie $\alpha : RP_2 \rightarrow RP_2$ je dané maticou

$$\begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (30.9)$$

t.j. pre $X = (x, y, t)$, $X' = (x', y', t')$ je $\alpha X = X'$ práve vtedy, keď pre nejaké $k \neq 0$

$$\begin{aligned} k \cdot x' &= ax + by + et \\ k \cdot y' &= cx + dy + ft \\ k \cdot t' &= t \end{aligned} \quad (30.10)$$

Dôkaz. Nech X je vlastný bod. Potom $t \neq 0$, takže afinné súradnice bodov X , $\alpha X = X'$ sú

$$\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}\right) \quad \text{resp.} \quad \left(a\frac{x}{t} + b\frac{y}{t} + e, c\frac{x}{t} + d\frac{y}{t} + f\right),$$

odkiaľ dostávame homogénne súradnice bodu $X' : (ax + by + et, cx + dy + ft, t) \equiv (x', y', t')$. To je však v zhode s (30.10). Nech $O_E = (0, 0)$, $A_E = (x, y)$ sú vlastné body. Je zrejmé, že nevlastný bod priamky OA je $X_H = (x, y, 0)$. Preto αX je nevlastný bod obrazu priamky OA v afinite α , t.j. X' je nevlastný bod priamky $\alpha O \alpha A$. Keď $O' = \alpha O$, $A' = \alpha A$, potom zrejme

$$O'_E = (e, f), \quad A'_E = (ax + by + e, cx + dy + f),$$

takže $\overrightarrow{O'A'_E} = (ax + by, cx + dy)$ t.j. $X'_H = (ax + by, cx + dy, 0)$ je nevlastný bod priamky $O'A'$. Opäť je to v zhode s (30.10), kde je uplatnené $t = 0$.

Dôsledok 30.22 Projektívne rozšírenie každej afinity je kolineácia.

Obrátene,

Veta 30.23 Afinné zúženie projektívnej transformácie, ktorej nevlastná priamka je samodružná je afinita na E_2 .

Dôkaz. Nech α je kolineácia, ktorá zobrazí každý nevlastný bod na nevlastný. Nech A, B, C sú kolineárne afinné body, po dvoch rôzne a nech D je nevlastný bod priamky \overline{AB} . Potom pre obrazy A', B', C', D' bodov A, B, C, D v α platí $(ABCD) = (A'B'C'D')$ a keďže $(ABD) = (A'B'D') = 1$ z Vety 30.12 dostávame $(ABC) = (A'B'C')$. Deliaci pomer je invariant afinného zúženia kolineácie α , preto je to afinita.

Určenosť kolineácie

Lema 30.24 Ak $P_i = (x_i, y_i, t_i)$, $P'_i = (x'_i, y'_i, t'_i)$ $i = 1, 2, 3$ sú dve trojice nekolineárnych bodov, tak kolineácia, ktorej matica je

$$F = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & t_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 & y'_1 & t'_1 \\ x'_2 & y'_2 & t'_2 \\ x'_3 & y'_3 & t'_3 \end{pmatrix},$$

kde k_1, k_2, k_3 sú ľubovoľné nenulové skaláry, zobrazí bod P_i na P'_i pre všetky $i = 1, 2, 3$.

Dôkaz. Obrazy $P'_i = (x'_i, y'_i, t'_i)$ bodov $P_i = (x_i, y_i, t_i)$ v kolineácii danej maticou F sú riadky matice

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & t_3 \end{pmatrix} \cdot F = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & t_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & t_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 & y'_1 & t'_1 \\ x'_2 & y'_2 & t'_2 \\ x'_3 & y'_3 & t'_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} k_1 x'_1 & k_1 y'_1 & k_1 t'_1 \\ k_2 x'_2 & k_2 y'_2 & k_2 t'_2 \\ k_3 x'_3 & k_3 y'_3 & k_3 t'_3 \end{pmatrix}.$$

Z tejto lemy vyplýva, že existuje ∞ mnoho kolineácií, ktoré zobrazia všetky vrcholy jedného daného trojuholníka na vrcholy druhého daného trojuholníka.

Štvoricu bodov, v ktorej sú každé tri body nekolineárne nazývame *štvorroh*.

Veta 30.25 Ak $P_i = (x_i, y_i, t_i)$, $P'_i = (x'_i, y'_i, t'_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$ sú dva štvorrohy, tak existuje jediná kolineácia, ktorá zobrazí bod P_i na P'_i pre všetky $i = 1, 2, 3, 4$.

Dôkaz. Nech kolineácia, ktorá zobrazí bod P_i na P'_i pre všetky $i = 1, 2, 3$ má maticu F (z predošlej lemy). Keďže bod P_4 sa zobrazí do P'_4 , tak pre nejaké $k_4 \neq 0$

$$k_4 \begin{pmatrix} x'_4 & y'_4 & t'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 & y_4 & t_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & t_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 & y'_1 & t'_1 \\ x'_2 & y'_2 & t'_2 \\ x'_3 & y'_3 & t'_3 \end{pmatrix}$$

odkiaľ

$$k_4 \begin{pmatrix} x'_4 & y'_4 & t'_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 & y'_1 & t'_1 \\ x'_2 & y'_2 & t'_2 \\ x'_3 & y'_3 & t'_3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} x_4 & y_4 & t_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & t_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix}$$

t.j.

$$\begin{aligned} (k_4/D'_4) \begin{pmatrix} x'_4 & y'_4 & t'_4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} - \begin{vmatrix} y'_2 & t'_2 \\ y'_3 & t'_3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} y'_1 & t'_1 \\ y'_3 & t'_3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} y'_1 & t'_1 \\ y'_2 & t'_2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} x'_2 & t'_2 \\ x'_3 & t'_3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} x'_2 & t'_2 \\ x'_3 & t'_3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} x'_1 & t'_1 \\ x'_2 & t'_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x'_2 & y'_2 \\ x'_3 & y'_3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 \\ x'_3 & y'_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} x_4 & y_4 & t_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & t_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

kde D'_4 , resp. D_4 je determinant matice, ktorej riadky sú body P'_1, P'_2, P'_3 , resp. P_1, P_2, P_3 . Keď označíme

$$\begin{aligned} a'_1 &= x'_4 \begin{vmatrix} y'_2 & t'_2 \\ y'_3 & t'_3 \end{vmatrix} - y'_4 \begin{vmatrix} x'_2 & t'_2 \\ x'_3 & t'_3 \end{vmatrix} + t'_4 \begin{vmatrix} x'_2 & y'_2 \\ x'_3 & y'_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x'_4 & y'_4 & t'_4 \\ x'_2 & y'_2 & t'_2 \\ x'_3 & y'_3 & t'_3 \end{vmatrix} \\ a'_2 &= \dots = \begin{vmatrix} x'_4 & y'_4 & t'_4 \\ x'_1 & y'_1 & t'_1 \\ x'_3 & y'_3 & t'_3 \end{vmatrix} \\ &\vdots \\ a_3 &= \dots = \begin{vmatrix} x_4 & y_4 & t_4 \\ x_1 & y_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & t_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

dostaneme

$$k_4(D_4/D'_4) \begin{pmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix}$$

kde $a'_1, a'_2, a'_3, a_1, a_2, a_3$ sú rôzne od nuly; tejto rovnici vyhovujú nenulové skaláry k_1, k_2, k_3, k_4 :

$$k_1 = \frac{a'_1}{a_1} \quad k_2 = \frac{a'_2}{a_2} \quad k_3 = \frac{a'_3}{a_3} \quad k_4 = D'_4/D_4.$$

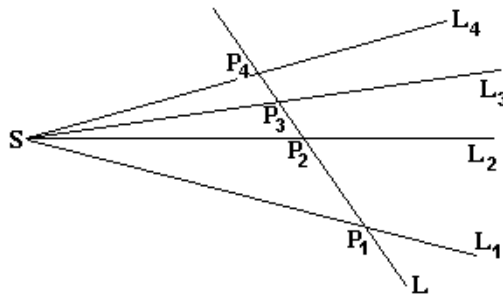
Táto veta hovorí, že každá kolíneácia je jednoznačne určená dvomi štvorohmi (priradenie je: prvý bod sa zobrazí do prvého, ...) a zároveň (jej dôkaz) ukazuje ako sa nájde matica kolíneácie danej súradnicami vrcholov dvoch štvorohov.

Afinná grupa roviny E_2 je izomorfná s podgrupou projektívnej grupy, tvorenej všetkými kolíneáciami o matici tvaru (30.9) alebo jej nenulových násobkov.

Veta 30.26 (Pappova) Nech L_1, L_2, L_3, L_4 sú navzájom rôzne priamky prechádzajúce bodom S . Nech $P_i \in L_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ (viď obrázok) sú navzájom rôzne body priamky L . Keď

$$L_3 = k_1 L_1 + k_2 L_2, \quad L_4 = m_1 L_1 + m_2 L_2$$

potom $(P_1 P_2 P_3 P_4) = (k_2/k_1)/(m_2/m_1)$.



Dôkaz. Nech

$$P_3 = r_1 P_1 + r_2 P_2, \quad P_4 = q_1 P_1 + q_2 P_2.$$

Keďže $P_i \in L_i \Rightarrow P_i L_i^T = 0$ pre všetky $i = 1, \dots, 4$, tak

$$\begin{aligned} 0 &= P_3 L_3^T = (r_1 P_1 + r_2 P_2)(k_1 L_1 + k_2 L_2)^T = (r_1 P_1 + r_2 P_2)(k_1 L_1^T + k_2 L_2^T) = \\ &= r_1 k_1 P_1 L_1^T + r_1 k_2 P_1 L_2^T + r_2 k_1 P_2 L_1^T + r_2 k_2 P_2 L_2^T = r_1 k_2 P_1 L_2^T + r_2 k_1 P_2 L_1^T \end{aligned}$$

odkiaľ $r_1 k_2 / r_2 k_1 = -P_2 L_1^T / P_1 L_2^T$. Analogicky odvodíme $q_1 m_2 / q_2 m_1 = -P_2 L_1^T / P_1 L_2^T$. Porovnaním ostatných dvoch rovností dostávame $(k_2/k_1)/(m_2/m_1) = (r_2/r_1)/(q_2/q_1)$. Číslo $(k_2/k_1)/(m_2/m_1)$ nazývame dvojpomer štvorice navzájom rôznych priamok patriacich nejakému zväzku a označujeme $(L_1 L_2 L_3 L_4)$.

Túto vetu možno stručnejšie (ale aj voľnejšie) formulovať aj takto:

Dôsledok 30.27 Stredovým premietaním sa dvojpomer nemení.

Definícia 30.28 Neidentickú kolíneáciu, ku ktorej existuje priamka, ktorej každý bod je samodružný, nazývame perspektívna kolíneácia (túto priamku nazývame os perspektívnej kolíneácie).

Dôkaz Dôsledku 30.27 možno urobiť aj tak, že definujeme perspektívnu kolíneáciu, ktorej stred je stred premietania a os prechádza priesečníkom priamky a jej stredového priemetu.

Cvičenie

- 30.1 Nech žiadne tri z bodov P, Q, R, S neležia na jednej priamke a nech $A = \overline{RQ} \cap \overline{PS}$, $B = \overline{RP} \cap \overline{QS}$, $C = \overline{PQ} \cap \overline{AB}$, $D = \overline{AB} \cap \overline{RS}$. Dokážte, že A, B, C, D je harmonická štvorica bodov.
- 30.2 Dokážte, že keď tri navzájom rôzne body priamky L sú samodružné body kolineácie α , potom každý bod priamky L je samodružný.
- 30.3 Dokážte, že každá priamka a jej obraz v perspektívnej kolineácii sú totožné alebo sa pretínajú na osi tejto kolineácie.
- 30.4 Dokážte, že každá kolinitná priamka (prechádza bodom a jeho obrazom, ak sú rôzne) perspektívnej kolineácie je samodružná.
- 30.5 Dokážte, že priesečník dvoch rôznych kolinitných priamok perspektívnej kolineácie je samodružný bod.
- 30.6 Dokážte, že všetky kolinitné priamky perspektívnej kolineácie patria zväzku priamok (jeho stred nazývame *stred perspektívnej kolineácie*).
- 30.7 Dané sú navzájom rôzne kolineárne body A, A', S a priamka N neprechádzajúca žiadnym z bodov A, A' . Dokážte, že existuje jediná perspektívna kolineácia α so stredom S a osou N , ktorá zobrazí $A \mapsto A'$ (takú kolineáciu budeme označovať $\alpha(N, S, A \mapsto A')$).
- 30.8 Nech S je nevlastný bod, N nevlastná priamka a α kolineácia ako v cvičení 7. Dokážte, že afinné zúženie kolineácie α je posunutie na E_2 .
- 30.9 Nech S je vlastný bod, N nevlastná priamka a α kolineácia ako v cvičení 7. Dokážte, že afinné zúženie kolineácie α je rovnolahlosť na E_2 .
- 30.10 Dokážte, že afinné zúženie perspektívnej kolineácie s nevlastným stredom a vlastnou osou je perspektívna afinita.
- 30.11 Nech S je nevlastný bod, N vlastná priamka. Dokážte, že afinné zúženie perspektívnej kolineácie α s osou N a stredom S je homológia, ak $S \notin N$ a elácia, ak $S \in N$.
- 30.12 Nech A, B, C, S resp. A', B', C', S sú také dva rôzne štvorohy, že A, A', S , resp. B, B', S , resp. C, C', S , sú tri trojice kolineárnych bodov a nech α je kolineácia, ktorá zobrazí $A \mapsto A', B \mapsto B', C \mapsto C', S \mapsto S$. Dokážte, že
- keď $D = \overline{AB} \cap \overline{SC}$, $D' = \overline{A'B'} \cap \overline{SC}$, potom $\alpha(D) = D'$
 - keď $E = \overline{AB} \cap \overline{A'B'}$, potom $\alpha(E) = E$
 - keď $F = \overline{BC} \cap \overline{B'C'}$ a $G = \overline{AC} \cap \overline{A'C'}$, potom $\alpha(F) = F$, $\alpha(G) = G$, body E, F, G sú kolineárne a každý bod priamky \overline{EF} je samodružný
 - platí Desarguesova veta
 - α je perspektívna kolineácia.
- 30.13 Nech A, B, C, D sú štyri kolineárne navzájom rôzne body a nech A', B', C' sú tri kolineárne navzájom rôzne body. Zostrojte (pravítkom a kružidlom) bod D tak, že $(ABCD) = (A'B'C'D')$.
- 30.14 Nech $ABCD, ABCD'$ sú dva štvorohy a nech $E = \overline{CD'} \cap \overline{BD}$. Dokážte, že súčin perspektívnych kolineácií $\psi(\overline{AB}, C, E \mapsto D')$, $\alpha(\overline{AC}, B, D \mapsto E)$, zobrazí štvoroh $ABCD$ na $ABCD'$.
- 30.15 Dokážte, že každá kolineácia $RP_2 \rightarrow RP_2$ je súčinom nie viac ako piatich perspektívnych kolineácií.
- 30.16 Ak ku priestoru E_3 pridáme nevlastné body všetkých priamok priestoru E_3 , dostaneme projektívny priestor RP_3 (technika prevedenia je analogická ako pri vytvorení RP_2). Nech N, M sú rôzne projektívne roviny priestoru RP_3 , P, S body neležiace v žiadnej z nich. Nech $\pi : M \rightarrow N$, $\rho : N \rightarrow M$ sú stredové premietania so stredmi P , resp. S . Dokážte, že $\pi\rho : N \rightarrow N$ je perspektívna kolineácia.

K U Ź E Ľ O S E Č K Y

31 Definícia kuželosečky

Rovinným rezom rotačnej kuželovej plochy je kuželosečka; ak rovina rezu prechádza vrcholom kuželovej plochy, rezom je jedna priamka alebo zjednotenie dvoch rôznobežných priamok. Rovnica kuželosečky, ktorá je zjednotením priamok $x+4y-3t=0$, $5x-4y+7t=0$ je

$$(x+4y-3t)(5x-4y+7t)=0, \quad t.j. \quad 5x^2+16xy-16y^2-8xt+40yt-21t^2=0$$

a to je špeciálny prípad rovnice

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}xt+2a_{23}yt+a_{33}t^2=0. \quad (31.1)$$

Ak položíme $a_{ik}=a_{ki}$, pre všetky $i, k=1, 2, 3$, túto rovnicu môžeme prepísať do tvaru

$$x(a_{11}x+a_{12}y+a_{13}t)+y(a_{21}x+a_{22}y+a_{23}t)+t(a_{31}x+a_{32}y+a_{33}t)=0 \quad (31.2)$$

čo pomocou matíc je

$$XKX^T=0, \quad (31.3)$$

kde X je matica $(x \ y \ t)$ a

$$K = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (31.4)$$

Rovnicu (31.1) píšeme skrátene v tvare

$$f(x, y, t) = 0.$$

Definícia 31.1 Nenulovú symetrickú maticu (31.4) (nad poľom R), nazývame kuželosečka. Dve kuželosečky považujeme za totožné, keď jedna je nenulový násobok druhej. Hovoríme, že bod $P = (p_1, p_2, p_3) \in RP_2$ je bodom kuželosečky K , keď $PKP^T = 0$; ak P je vlastný bod kuželosečky K , tak je jej afinný bod. Determinant matice K nazývame determinant kuželosečky K . Kuželosečka je regulárna, keď má aspoň jeden bod a jej determinant je rôzny od nuly. Rovnicu (31.3) nazývame maticová rovnica kuželosečky K .

Existujú kuželosečky, ktoré nemajú ani jeden bod, majú práve jeden bod alebo sú zjednotením dvoch priamok (aj totožných), ostatné kuželosečky sú regulárne.

Obrazom kuželosečky K v kolíneácii danej maticou M nazývame kuželosečku $M^{-1}K(M^{-1})^T$.

Veta 31.2 Bod X leží na kuželosečke K práve vtedy, keď jeho obraz v ľubovoľnej kolíneácii leží na obraze kuželosečky K v tejto kolíneácii (t.j. incidenciu bodu a kuželosečky je invariantom každej kolíneácie).

Dôkaz. Nech kolíneácia je daná maticou M a nech bod X leží na kuželosečke K , potom

$$X \in K \Leftrightarrow 0 = XKX^T = XMM^{-1}K(XMM^{-1})^T = X'M^{-1}K(M^{-1})^T X'^T \Leftrightarrow X' \in K'.$$

32 Prienik priamky s kuželosečkou

Ak $P_i = (x_i, y_i, t_i)$ a $P_j = (x_j, y_j, t_j)$ sú body a K kuželosečka, tak definujeme

$$P_i K P_j^T = f^{(ij)}.$$

Keďže $f^{(ij)}$ je skalár, $f^{(ij)T} = f^{(ij)}$, takže $(P_i K P_j^T)^T = (P_i K P_j^T)^T = P_j K^T P_i^T = P_j K P_i^T$, odkiaľ

$$f^{(ij)} = f^{(ji)}.$$

Veta 32.1 Keď $X = k_1P_1 + k_2P_2$, potom

$$f(X) = XKX^T = k_1^2 f^{(11)} + 2k_1k_2 f^{(12)} + k_2^2 f^{(22)}. \quad (32.1)$$

Dôkaz.

$$\begin{aligned} XKX^T &= (k_1P_1 + k_2P_2)K(k_1P_1 + k_2P_2)^T = (k_1P_1 + k_2P_2)K(k_1P_1^T + k_2P_2^T) = \\ &= (k_1P_1 + k_2P_2)(k_1KP_1^T + k_2KP_2^T) = \\ &= k_1k_1P_1KP_1^T + k_2k_1P_2KP_1^T + k_1k_2P_1KP_2^T + k_2k_2P_2KP_2^T = \\ &= k_1^2 f^{(11)} + 2k_1k_2 f^{(12)} + k_2^2 f^{(22)}. \end{aligned}$$

Hľadáme priesečníky projektívnej priamky L (určenej bodmi $P_1(x_1, y_1, t_1) \neq P_2(x_2, y_2, t_2)$) s kuželosečkou (31.1), t.j. s kuželosečkou K , ktorej maticová rovnica je $XKX^T = 0$.

Podľa (32.1)

$$k_1^2 f^{(11)} + 2k_1k_2 f^{(12)} + k_2^2 f^{(22)} = 0. \quad (32.2)$$

Ak nenulové riešenie k_1, k_2 tejto rovnice dosadíme do rovníc priamky P_1P_2 , dostaneme hľadané priesečníky. Počet týchto priesečníkov závisí od diskriminantu $D = 4((f^{(12)})^2 - f^{(11)}f^{(22)})$ kvadratickej rovnice (32.2):

$$\begin{aligned} \text{ak } D < 0, & \quad \text{priamka } L \text{ nepretína kuželosečku } K \text{ v žiadnom bode,} \\ \text{ak } D = 0, & \quad \text{priamka } L \text{ pretína kuželosečku v jednom bode alebo} \\ & \quad \text{(v prípade, keď } f^{(11)} = f^{(12)} = f^{(22)} = 0) \text{ je jej podmnožinou,} \\ \text{ak } D > 0, & \quad \text{priamka } L \text{ pretína kuželosečku } K \text{ vo dvoch rôznych bodoch.} \end{aligned} \quad (32.3)$$

To znamená, že ak priamka nie je podmnožinou kuželosečky, tak ju pretína najviac vo dvoch bodoch.

Typ kuželosečky

Nevlastné body kuželosečky (31.1) sú body prieniku nevlastnej priamky $(0 \ 0 \ 1)$ s kuželosečkou. Tretia súradnica každého nevlastného bodu je 0, t.j. $t = 0$, preto z rovnice (31.1) máme

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0 \quad (32.4)$$

Množina všetkých bodov $(x, y, 0)$, ktoré vyhovujú tejto rovnici, je množina všetkých nevlastných bodov kuželosečky (31.1). Ak $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$ tak, nevlastná priamka je podmnožinou kuželosečky K . Ak a_{11}, a_{12}, a_{22} nie sú súčasne rovné nule, tak rovnici (32.4) nevyhovuje každý bod nevlastnej priamky. Riešime rovnicu (32.4). Vydelením tejto rovnice s y^2 dostaneme kvadratickú rovnicu

$$a_{11}\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2a_{12}\frac{x}{y} + a_{22} = 0,$$

ktorej korene sú

$$\frac{x}{y} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22}}}{a_{11}}$$

To znamená, že keď $a_{11} \neq 0$ nevlastné body sú

$$P_1^\infty = (-a_{12} + \sqrt{-A_{33}}, a_{11}, 0),$$

$$P_2^\infty = (-a_{12} - \sqrt{-A_{33}}, a_{11}, 0),$$

a keď $a_{22} \neq 0$

$$P_1^\infty = (a_{22}, -a_{12} + \sqrt{-A_{33}}, 0),$$

$$P_2^\infty = (a_{22}, -a_{12} - \sqrt{-A_{33}}, 0),$$

kde

$$A_{33} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2$$

nazývame *diskriminant kuželosečky* (31.1) (je to minor matice (31.4)). Počet nevlastných bodov závisí od existencie $\sqrt{-A_{33}}$, preto kuželosečka (31.1) má

- (i) dva rôzne nevlastné body, ak $A_{33} < 0$
(ii) jeden nevlastný bod alebo priamku nevlastných bodov, ak $A_{33} = 0$
(iii) nemá ani jeden nevlastný bod, ak $A_{33} > 0$.

Kuželosečku s dvomi nevlastnými bodmi nazývame kuželosečka *typu hyperbola*, s jedným nevlastným bodom alebo s priamkou nevlastných bodov *typu parabola* a kuželosečku, ktorá nemá ani jeden nevlastný bod nazývame kuželosečka *typu elipsa*. Ak z projektívnej kuželosečky (31.1) vynecháme všetky nevlastné body, dostaneme jej afinné zúženie

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \quad (32.5)$$

ktoré nazývame afinná kuželosečka.

O afinnom zúžení projektívnej kuželosečky typu hyperbola (resp. parabola, elipsa) hovoríme, že tiež je typu hyperbola (resp. parabola, elipsa). Ak P^∞ je nevlastný bod kuželosečky (31.1), hovoríme, že P^∞ je nevlastný bod afinnej kuželosečky (32.5)

Príklad 32.2 Určte *typ a nevlastné body afinnej kuželosečky*

$$K : 4x^2 + 20xy + 25y^2 - 4x - 10y + 1 = 0.$$

Riešenie. $A_{33} = 4.25 - 100 = 0$. Kuželosečka K má teda práve 1 nevlastný bod $P^\infty(-10, 4, 0) \equiv (-5, 2, 0)$; K je typu parabola.

Regulárnu kuželosečku typu elipsa, parabola, hyperbola nazývame v poradí *elipsa, parabola, hyperbola*. Zrejme, typ kuželosečky je invariantom, každej afinity.

Cvičenie

32.1 V E_2 je daná priamka $L : x = -\frac{p}{2}$, bod $F = (\frac{p}{2}, 0)$, $p \neq 0$ a kuželosečka

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p \\ 0 & 1 & 0 \\ -p & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dokážte, že K je parabola o rovnici $y^2 = 2px$ a

$$\{X \in E_2; |FX| = L \dashv X\} = \{X(x, y) \in E_2; y^2 = 2px\}$$

(všetky súradnice sú v ortonormálnom repére).

32.2 V E_2 sú dané body $F(e, 0)$, $E(-e, 0)$, $e \geq 0$ a také reálne číslo a , že $a > e$; nech $e^2 = a^2 - b^2$ a nech kuželosečka

$$K = \begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2b^2 \end{pmatrix}.$$

Dokážte, že K je elipsa a

$$\{X \in E_2; |EX| + |FX| = 2a\} = \{X(x, y) \in E_2; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$$

(všetky súradnice sú v ortonormálnom repére).

32.3 V E_2 sú dané body $E(-e, 0)$, $F(e, 0)$, $e > 0$ a kladné reálne čísla $a, e, a < e$; nech $e^2 = a^2 + b^2$ a nech kuželosečka

$$K = \begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2b^2 \end{pmatrix}.$$

Dokážte, že K je hyperbola a

$$\{X \in E_2; |EX| - |FX| = \pm 2a\} = \{X(x, y) \in E_2; \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\}$$

(všetky súradnice sú v ortonormálnom repére).

33 Dotyčnice a singulárne body kuželosečky

Hovoríme, že priamka L je *dotyčnicou kuželosečky* K , ak $L \cap K$ je jeden bod alebo $L \subset K$; v tom prípade, hovoríme tiež, že afinné zúženie priamky L je dotyčnicou afinného zúženia kuželosečky K . Dotyčnicu kuželosečky v jej nevlastnom bode nazývame *asymptota* tejto kuželosečky. Bod P nazývame *singulárny bod* kuželosečky K , keď $PK = (0 \ 0 \ 0)$. Je zrejmé, že keď P je singulárny bod kuželosečky K , tak P je jej bodom, je totiž $PKP^T = 0$.

Veta 33.1 *Ak bod P_1 leží na kuželosečke K , tak priamka P_1K je dotyčnica kuželosečky K prechádzajúca bodom P_1 alebo P_1 je singulárny bod kuželosečky K .*

Dôkaz. Nech P_1 nie je singulárny bod kuželosečky K . Potom $P_1K \neq (0 \ 0 \ 0)$ a tak $P_1K = L$ je priamka. Ak $P_2 \in L$, t.j. $0 = LP_2^T = P_1KP_2^T = f^{(12)}$, tak $D = 4((f^{(12)})^2 - f^{(11)}f^{(22)}) = 0$ a teda L je dotyčnica;

Bod $P(x, y, t)$ je singulárny bod kuželosečky K práve vtedy, keď je riešením maticovej rovnice $PK = (0 \ 0 \ 0)$, t.j. sústavy lineárnych homogénnych rovníc

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}t &= 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}t &= 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}t &= 0 \end{aligned} \tag{33.1}$$

Je zrejmé, že

$$(0 \ 0 \ 0) = PK \Rightarrow (0 \ 0 \ 0)(M^{-1})^T = PMM^{-1}K(M^{-1})^T \Rightarrow (0 \ 0 \ 0) = (PM)M^{-1}K(M^{-1})^T$$

čo znamená, že kolineácia zobrazí singulárny bod na singulárny bod.

Z riešenia sústavy lineárnych homogénnych rovníc vyplýva, že kuželosečka nemá ani jeden singulárny bod (ak je navyše neprázdna, je regulárna) alebo má jeden singulárny bod alebo má priamku singulárnych bodov (vtedy hovoríme, že je singulárna.) Zrejme, kuželosečka je singulárna práve vtedy, keď determinant matice kuželosečky sa rovná 0.

Veta 33.2 *Kuželosečka má 0, 1 alebo priamku singulárnych bodov, ak hodnosť jej matice je v poradí 3, 2, 1.*

Príklad 33.3 *Určte singulárne body kuželosečky*

$$K : 3x^2 + 14xy - 5y^2 + 2xt + 26yt - 5t^2 = 0.$$

Riešenie. Nech $X = (x, y, t)$ je singulárny bod kuželosečky K . Potom $XK = (0 \ 0 \ 0)$ a to znamená, že množina všetkých singulárnych bodov kuželosečky K je množina všetkých riešení sústavy lineárnych rovníc):

$$\begin{aligned} 3x + 7y + 1t &= 0 \\ 7x - 5y + 13t &= 0 \\ x + 13y - 5t &= 0. \end{aligned}$$

Determinant tejto sústavy je determinant kuželosečky K (pozri (31.4)); ten musí byť rovný nule, aby existoval aspoň jeden singulárny bod. Ľahko sa overí, že $\det K = 0$ a hodnosť matice sústavy je 2, preto existuje jediný singulárny bod, je to bod $(-3, 1, 2)$.

Každá singulárna kuželosečka je buď bodom alebo je zjednotením priamok (vtedy hovoríme, že kuželosečka sa rozpadá na priamky). Skutočne, nech P_1 je singulárny bod a nech $P_2 \neq P_1$ je ľubovoľný bod kuželosečky K . Potom priamka P_1P_2 je dotyčnica, ktorá má s kuželosečkou aspoň body $P_2 \neq P_1$ spoločné, preto priamka $P_1P_2 \subset K$, čiže K je zjednotením priamok, ktoré prechádzajú bodom P_1 . Takých priamok je menej ako tri; ak by boli aspoň tri, tak ľubovoľná priamka neprechádzajúca bodom P_1 by pretínala tieto priamky a teda aj K v aspoň troch bodoch a bola by jej časťou, teda K by bola celá rovina a to nie je možné, lebo matica K nie je nulová. Tým je tiež dokázané, že všetky priamky, na ktoré sa kuželosečka rozpadá, prechádzajú každým jej singulárnym bodom.

Príklad 33.4 Daný je ľubovoľný bod P_1 projektívnej roviny a kuželosečka

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dokážte, že každá priamka prechádzajúca bodom P_1 je dotyčnica kuželosečky K .

Riešenie. Dôkaz vyplýva z faktu, že K je priamka $(x + y + t)^2 = 0$.

Veta 33.5 Nech P_1 je taký bod kuželosečky K , že každá priamka ním prechádzajúca je dotyčnica kuželosečky K . Potom P_1 je singulárny bod kuželosečky K .

Dôkaz. Zrejme $f^{(11)} = 0$. Nech $P_1K \neq (0 \ 0 \ 0)$; potom P_1K je priamka a P_1P_2 je dotyčnica kuželosečky K , pre každé P_2 rôzne od P_1 . Preto $(f^{(12)})^2 - f^{(11)}f^{(22)} = 0$, odkiaľ $f^{(12)} = 0$ t.j. $P_1KP_2^T = 0$, čiže bod P_2 leží na P_1K a tak $RP_2 \subset P_1K$, t.j. RP_2 je priamka, čo nie je pravda.

Veta 33.6 Na každej priamke, ktorá je podmnožinou kuželosečky, leží aspoň jeden singulárny bod tejto kuželosečky.

Dôkaz. Nech priamka L je podmnožina kuželosečky K a nech P_1, P_2 sú rôzne nesingulárne body priamky L . Potom P_1K, P_2K sú priamky, totožné s priamkou P_1P_2 (je totiž $P_1KP_2^T = 0$, $P_1KP_1^T = 0$, $P_2KP_1^T = 0$, $P_2KP_2^T = 0$ viď 32.3). Preto existuje $k \neq 0$ tak, že $P_1K = kP_2K$, odkiaľ $(P_1 - kP_2)K = (0 \ 0 \ 0)$ a teda $(P_1 - kP_2)$ je singulárny bod.

Dôsledok 33.7 Ak existuje priamka, ktorá je podmnožinou kuželosečky, tak kuželosečka je singulárna.

Príklad 33.8 Napíšte rovnice asymptôt afinnej kuželosečky

$$K : 48x^2 + 32xy - 12y^2 - 176x - 76y + 105 = 0.$$

Riešenie. Najprv nájdeme nevlastné body. Riešime kvadratickú rovnicu

$$48 \left(\frac{x}{y} \right)^2 + 32 \frac{x}{y} - 12 = 0.$$

Jej korene sú

$$\frac{x}{y} = \frac{-2 \pm \sqrt{13}}{6},$$

nevlastné body sú

$$P_1^\infty(-2 + \sqrt{13}, 6, 0) \quad P_2^\infty(-2 - \sqrt{13}, 6, 0).$$

Dotyčnice v týchto bodoch sú hľadané asymptoty. Napíšeme najprv maticu danej kuželosečky

$$\begin{pmatrix} 48 & 16 & -88 \\ -16 & -12 & -38 \\ -88 & -38 & 105 \end{pmatrix}$$

Prvá asymptota je teda dotyčnica v bode P_1^∞ :

$$P_1K = (48\sqrt{13} \quad - (40 + 16\sqrt{13}) \quad - (52 + 88\sqrt{13})).$$

Podobne určíme druhú asymptotu

$$P_2K = (-12\sqrt{13} \quad - (10 - 4\sqrt{13}) \quad - (13 - 22\sqrt{13})).$$

Príklad 33.9 Napíšte rovnice priamok, na ktoré sa rozpadá kuželosečka

$$3x^2 + 14xy - 5y^2 + 2x + 26y - 5 = 0.$$

Riešenie. Najprv nájdeme singulárne body. Riešením rovníc (33.1) zistíme, že $P(-3, 1, 2)$ je jediný singulárny bod danej kuželosečky. Jej nevlastné body sú $P_1^\infty(1, 3, 0), P_2^\infty(5, -1, 0)$. Priamky PP_1, PP_2 , ktorých rovnice určíme podľa (30.1), sú priamky, na ktoré sa kuželosečka rozpadá:

$$PP_1 : \begin{vmatrix} x & y & t \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{t.j.} \quad 3x - y + 5 = 0$$

$$PP_2 : \begin{vmatrix} x & y & t \\ -3 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{t.j.} \quad x + 5y - 1 = 0.$$

Priamym výpočtom možno overiť, že súčin rovníc priamok PP_1, PP_2 je rovnica danej kuželosečky (alebo jej násobok).

Úloha 33.10 Dokážte, že priamky, na ktoré sa kuželosečka rozpadá, sú jej asymptoty. Dokážte, že obrátené tvrdenie neplatí.

Úloha 33.11 Dokážte, že kuželosečka, ktorá má aspoň dva rôzne singulárne body je priamka.

Úloha 33.12 Dokážte, že kuželosečka sa rozpadá na dve rôzne priamky (resp. na jednu priamku) práve vtedy, keď hodnosť jej matice je 2 a má aspoň jeden nesingulárny bod (resp. hodnosť jej matice je 1).

Úloha 33.13 Dokážte, že afinná kuželosečka sa rozpadá na dve rôznobežné (resp. rovnobežné) afinné priamky práve vtedy, keď je singulárna a má 2 rôzne nevlastné body (resp. jeden nevlastný bod).

Úloha 33.14 Dokážte, že singulárna kuželosečka je buď jeden bod, jedna priamka alebo dve rôzne priamky.

Cvičenie

33.1 Daná je kuželosečka $9x^2 - 4y^2 = 36$. Určte jej asymptoty a určte dotyčnice v bodoch $(3, 0, 1), (-3, 0, 1)$. Určte rovnice jej dotyčnice rovnobežnej s priamkou $7x + 2y - 1 = 0$. Koľko je takých dotyčníc?

33.2 Overte, že kuželosečka o rovnici $(ax + bt)^2 + (cy + dt)^2 = 0$ (nie všetky a, b, c, d sú nuly), je singulárna.

33.3 Dokážte, že kuželosečka, ktorej každý bod je jej singulárnym bodom je bod alebo jedna priamka.

33.4 Nech K je afinná singulárna kuželosečka. Dokážte, že existuje réper roviny E_2 a reálne čísla a, c tak, že K má v tomto répere jednu z rovníc

$$x^2 + y^2 = 0, \quad y^2 - c^2 = 0, \quad a^2x^2 - y^2 = 0.$$

34 Polárne vlastnosti kuželosečiek

Polára, pól

Polárne vlastnosti kuželosečiek použijeme na definície takých dôležitých pojmov, ako sú stred, osi, priemery, ohniská ... kuželosečiek.

Lema 34.1 Daný je bod P_1 a kuželosečka K tak, že $P_1 \notin K$. Keď P_2 je taký bod, že priamka P_1P_2 pretne K vo dvoch bodoch Q_1, Q_2 a $(P_1P_2Q_1Q_2) = -1$, potom P_2 leží na priamke P_1K .

Dôkaz. Nech $Q_1 = k_1P_1 + k_2P_2$. Z rovnosti $(P_1P_2Q_1Q_2) = -1$ vyplýva $Q_2 = k_1P_1 - k_2P_2$, pričom $k_1k_2 \neq 0$. To znamená, že

$$\begin{aligned} k_1^2 f^{(11)} + 2k_1k_2 f^{(12)} + k_2^2 f^{(22)} &= 0 & (*) \\ k_1^2 f^{(11)} + 2k_1(-k_2) f^{(12)} + (-k_2)^2 f^{(22)} &= 0. \end{aligned}$$

Odcítaním týchto rovníc dostaneme $4k_1k_2f^{(12)} = 0$, odkiaľ $f^{(12)} = 0$, čiže $P_1K P_2^T = 0$ a teda $P_2 \in P_1K$.

Definícia 34.2 Daná je kuželosečka K a bod P_1 . Priamku $L = P_1K$ nazývame polára bodu P_1 a bod P_1 pól priamky L (vzhľadom na kuželosečku K).

Veta 34.3 Polarita je invariantom každej kolineácie (t.j. ak P_1 je pól priamky p_1 vzhľadom na kuželosečku K , tak to platí aj pre ich obrazy v každej kolineácii).

Dôkaz: Nech kolineácia α je daná maticou M . Potom

$$\alpha(P_1K) = P_1K(M^{-1})^T = (P_1M)M^{-1}K(M^{-1})^T = \alpha P_1\alpha K$$

Z Vety 33.1 vyplýva, že polára bodu, ktorý leží na kuželosečke je dotyčnica kuželosečky v tomto bode.

Príklad 34.4 Daná je kuželosečka $x^2 - 2xy - y^2 - 4xt + 6t^2 = 0$. Vypočítajte rovnicu poláry bodu $P_1(2, 1, -1)$.

Riešenie. Najprv určíme maticu danej kuželosečky:

$$K = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ďalej vypočítame súčin matíc $P_1K = (3 \ -3 \ -10)$, rovnica hľadanej poláry je $3x - 3y - 10t = 0$.

Príklad 34.5 Vypočítajte súradnice pólu nevlastnej priamky, ak je daná kuželosečka

$$K : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - t^2 = 0, \quad a \neq 0 \neq b.$$

Riešenie. Rovnicu kuželosečky upravíme na tvar $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2t^2 = 0$; jej matica je

$$\begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2b^2 \end{pmatrix}$$

Ak nevlastná priamka je polára bodu $P(x, y, t)$, tak $PK = (0 \ 0 \ k)$, $k \neq 0$, preto súradnice (x, y, t) pólu nevlastnej priamky sú riešenia sústavy rovníc $b^2x = 0$, $a^2y = 0$, $-a^2b^2t = k$. Jediný bod, ktorý vyhovuje tejto sústave je $(0, 0, 1)$. Teda začiatok répera roviny E_2 je pólom nevlastnej priamky.

Združené poláry

Nech žiadny z bodov P_1, P_2 nie je singulárny bod kuželosečky K . Potom bod P_2 leží na poláre bodu P_1 práve vtedy, keď $P_1KP_2^T = 0 \Leftrightarrow f^{(12)} = 0$ t.j. práve vtedy, keď $f^{(21)} = 0 \Leftrightarrow P_2KP_1^T$ t.j. keď P_1 leží na poláre bodu P_2 . Z toho vyplýva

Veta 34.6 Polára (ak existuje) bodu ležiaceho na poláre bodu P_1 , prechádza bodom P_1 . Polára bodu P_1 obsahuje body dotyku, všetkých dotyčníc kuželosečky prechádzajúcich bodom P_1 .

Hovoríme, že dve poláry sú *združené poláry*, ak pól jednej z nich inciduje s druhou z nich.

Príklad 34.7 Daná je kuželosečka a bod P_1 ako v Prípade 34.4. Určte dotyčnice kuželosečky, ktoré prechádzajú bodom P_1 .

Riešenie. Dotykové body sú priesečníky kuželosečky s polárou bodu P_1 . Riešime preto sústavu rovníc

$$\begin{aligned} 3x - 3y - 10t &= 0 \\ x^2 - 2xy - y^2 - 4xt + 6t^2 &= 0. \end{aligned}$$

Pretože $t = 0$ implikuje $x = y = 0$, môžeme položiť $t = 3$. Potom $x = y + 10$ dosadíme do rovnice kuželosečky a dostaneme rovnicu $y^2 + 6y - 17 = 0$. Tá má korene $-3 \pm \sqrt{26}$, preto

$$A_1(7 + \sqrt{26}, -3 + \sqrt{26}, 3) \quad A_2(7 - \sqrt{26}, -3 - \sqrt{26}, 3)$$

sú dotykové body. Hľadané dotyčnice sú priamky P_1A_1 , P_1A_2 , ktorých rovnice sú

$$\begin{aligned} \sqrt{26}x - (13 + \sqrt{26})y - (13 - \sqrt{26})t &= 0 \\ \sqrt{26}x - (13 - \sqrt{26})y - (13 + \sqrt{26})t &= 0. \end{aligned}$$

Priesečníky poláry bodu P_1 s kuželosečkou možno nájsť aj nasledovne. Na poláre zvolíme dva body, povedzme $Q_1(1, 1, 0)$, $Q_2(5, -5, 3)$. Vypočítame $f^{(11)} = -2$, $f^{(12)} = 4$, $f^{(22)} = 44$. Potom riešime rovnicu (32.2): $-2k_1^2 + 8k_1k_2 + 44k_2^2 = 0$. Jej korene $k_1 : k_2 = 2 \pm \sqrt{26}$ dosadíme do rovnice $A = k_1Q_1 + k_2Q_2$ a dostaneme dotykové body A_1, A_2 .

Príklad 34.8 Daná je afinná kuželosečka $y^2 - 2px = 0$, $p \neq 0$. Dokážte, že polára ľubovoľného nevlastného bodu prechádza bodom $(1, 0, 0)$. Vypočítajte rovnicu dotyčnice rovnobežnej s priamkou $3x + 2y - 1 = 0$.

Riešenie. Nech $Q = (a, b, 0)$ je ľubovoľný nevlastný bod. Jeho polára je určená rovnicou $QKX^T = 0$. Rovnica projektívneho rozšírenia danej afinnej kuželosečky je $y^2 - 2px = 0$; jej matica je

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -p \\ 0 & 1 & 0 \\ -p & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hľadaná polára bodu $Q = (a, b, 0)$ je $by - apt = 0$; na nej zrejme leží bod $(1, 0, 0)$. Nevlastný bod danej priamky je $P(2, -3, 0)$. Určiť rovnicu hľadanej dotyčnice znamená nájsť dotyčnicu kuželosečky K prechádzajúcu bodom P . Dotykové body sú priesečníky kuželosečky s polárou bodu P ; podľa prvej časti tohto príkladu $3y + 2pt = 0$ je rovnica tejto poláry a tá pretína danú kuželosečku v bodoch $A(1, 0, 0)$, $B(2p, -6p, 9)$. Priamky PA, PB sú hľadané dotyčnice; z nich len PB je afinná priamka, ktorej rovnica je

$$\begin{vmatrix} x & y & t \\ 2 & -3 & 0 \\ 2p & -6p & 9 \end{vmatrix} = 0, \quad t.j. \quad 9x + 6y + 2p = 0$$

Príklad 34.9 Dokážte, že nevlastná priamka sa dotýka kuželosečky $y^2 - 2px = 0$, $p \neq 0$, v bode $(1, 0, 0)$.

Dôkaz. Vyplyva z príkladu 34.8.

Príklad 34.10 Dokážte, že priamky $t = 0$, $3y + 2pt = 0$ sú združené poláry kuželosečky $y^2 - 2px = 0$, $p \neq 0$.

Dôkaz. Použiť príklady 34.8 a 34.9.

Cvičenie

34.1 Daná je kuželosečka $K : x^2 + xy - 6y^2 + 4t^2 = 0$. Určte jej asymptoty, pól nevlastnej priamky a dotyčnice prechádzajúce bodom $P_1(1, 2, 3)$. Určte dotyčnice afinného zúženia kuželosečky K rovnobežné s priamkou $x = 0$. Vypočítajte rovnice dotyčnic kuželosečky K prechádzajúcich bodom $(0, \sqrt{6}, 3)$.

34.2 Dokážte, že polára ľubovoľného nesingulárneho bodu prechádza každým singulárnym bodom kuželosečky.

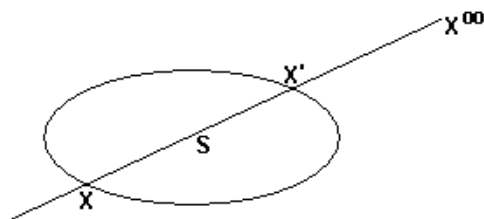
34.3 Nech K je singulárna kuželosečka a L priamka neprechádzajúca žiadnym jej singulárnym bodom. Dokážte, že pól priamky L neexistuje.

35 Metrické vlastnosti kuželosečiek

Súmernosť kuželosečiek

Ak v E_2 stredová (resp. osová) súmernosť so stredom S (resp. osou L) je symetria útvaru U , hovoríme, že S je stred súmernosti (resp. L je os súmernosti) útvaru U .

Nech S -vlastný bod je stred kuželosečky K , X^∞ ľubovoľný bod nevlastnej priamky. Nech $K \cap \overline{SX^\infty} = \{X, X'\}$, $X \neq X'$ a nech S, X sú navzájom rôzne body (viď obrázok).



Potom $\sigma_S X = X'$, preto $(X'XS) = -1$ a podľa príkladu 30.7 aj $(X'XSX^\infty) = -1$. Podľa definície 34.2 a Lemy 34.1 polára bodu X^∞ prechádza bodom S . Teda polára ľubovoľného bodu nevlastnej priamky prechádza stredom S kuželosečky K preto S je pól nevlastnej priamky.

Definícia 35.1 Pól nevlastnej priamky nazývame stred kuželosečky.

Príklad 35.2 Vypočítajte súradnice stredu S kuželosečky (31.1).

Riešenie. Pól X nevlastnej priamky je riešenie maticovej rovnice $XK = (0 \ 0 \ k)$, kde $k \neq 0$ je vhodné reálne číslo, t.j. je také riešenie sústavy lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}t &= 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}t &= 0 \end{aligned} \quad (35.1)$$

že $a_{31}x + a_{32}y + a_{33}t \neq 0$.

Ak kuželosečka nie je singularná, existuje jediný stred $S(A_{31}, -A_{32}, A_{33})$, kde A_{ik} je minor matice kuželosečky (31.1); regulárna kuželosečka má vlastný stred ak $A_{33} \neq 0$.

Príklad 35.3 Dokážte, že bod $(0, 0, 1)$ je stred regulárnej kuželosečky (31.1) práve vtedy, keď $a_{13} = a_{23} = 0$.

Dôkaz. Ak $(0, 0, 1)$ je stred, musia jeho súradnice vyhovovať rovniciam (35.1), odkiaľ po dosadení $x = 0$, $y = 0$, $t = 1$ dostávame $a_{13} = a_{23} = 0$. Zrejme platí i obrátene.

Príklad 35.4 Dokážte, že kuželosečka $(1 \ 6 \ 9 \ 3 \ 9 \ 5)$ má len jeden bod, nekonečne mnoho stredov a je typu parabola.

Dôkaz. Matica tejto kuželosečky je

$$K = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 6 & 18 & 9 \\ 3 & 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

Jediný singularný bod $(3 \ -1 \ 0)$ je riešením rovnice $XK = (0 \ 0 \ 0)$. Stredy kuželosečky K sú nesingularné body, ktoré sú riešením prvých dvoch rovníc sústavy $XK = (0 \ 0 \ 0)$. Keďže tieto rovnice sú lineárne závislé, stredom kuželosečky K je každý bod priamky $(2 \ 6 \ 3)$ okrem singularného bodu $(3 \ -1 \ 0)$. Prienik afinnej priamky $(1 \ 3 \ c)$ (ktorej nevlastný bod je $(3 \ -1 \ 0)$) s K je \emptyset , preto kuželosečka K má len jeden bod.

Priemery kuželosečiek

Poláru nevlastného bodu nazývame *priemer kuželosečky*. Združené poláry, ktoré sú jej priermi nazývame združené priemery kuželosečky. Každý priemer kuželosečky prechádza jej stredom (podľa vety 34.6). Združené priemery L , resp. N nazývame *hlavné združené priemery*, ak pre ich nevlastné body $P^\infty(a, b, 0)$, $Q^\infty(c, d, 0)$ platí $ac + bd = 0$; L i N nazývame *hlavný priemer* kuželosečky. V prípade, že L , N sú vlastné priamky, posledná rovnosť vyjadruje fakt, že $L \perp N$. To znamená, že združené priemery prechádzajúce vlastným stredom kuželosečky sú hlavné združené priemery práve vtedy, keď sú navzájom kolmé.

Nech $P^\infty(a, b, 0)$, $Q^\infty(c, d, 0)$ sú nevlastné body združených hlavných priemerov. Potom existuje λ tak, že jeden z bodov P^∞ , Q^∞ je $(\lambda, 1, 0)$ a druhý $(1, -\lambda, 0)$. Skutočne, aspoň jedno z čísel a , b je rôzne od nuly, povedzme $b \neq 0$. Nech $a = \lambda b$ potom $P^\infty(\lambda b, b, 0) \equiv (\lambda, 1, 0)$. Ďalej $ac + bd = 0$ implikuje $\lambda bc + bd = 0$, odkiaľ $d = -\lambda c$, takže $Q^\infty(c, -\lambda c, 0) \equiv (1, -\lambda, 0)$. Nevlastné body združených hlavných priemerov nesplývajú. Ak by totiž $P^\infty = Q^\infty$, tak hodnota matice

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

musí byť jedna, preto $\lambda^2 + 1 = 0$; také reálne číslo λ však neexistuje.

Veta 35.5 *Hlavný priemer, ktorý je vlastná priamka, je osou kuželosečky.*

Dôkaz prevedieme len pre afinné zúženie K danej kuželosečky. Nech P^∞ resp. Q^∞ sú nevlastné body hlavných združených priemerov, L , resp. N a N je vlastná priamka. Nech $X \in K$ je ľubovoľný bod. Nech X' je ďalší priesečník priamky XP^∞ s kuželosečkou K . Ak $X \neq X'$, existuje bod X_0 tak, že $(P^\infty X_0 X X') = -1$, ktorý podľa Lemy 34.1 leží na poláre N bodu P^∞ a teda $X_0 \in N$. Keďže $(X' X X_0) = -1$ (pozri Príklad 34.7) a $\overline{XP^\infty} \perp N$, tak $\sigma_N X = X'$. Ak $X = X'$, priamka XP sa dotýka kuželosečky K v bode $X = X'$, je teda polárou bodu X a preto podľa vety 34.6 bod X leží na poláre bodu P^∞ , čiže $X = X' \in N$ t.j. $\sigma_N X = X'$. Zostala posledná možnosť, $\overline{XP^\infty} \cap K$ má aspoň tri rôzne body. Potom $\overline{XP^\infty} \subset K$ a keďže $\overline{XP^\infty} \perp N$, tak XP^∞ je samodružná priamka osovej súmernosti σ_N , preto $\sigma_N X \in \overline{XP^\infty} \subset K$. Tým je dôkaz skončený.

Hľadáme hlavné priemery kuželosečky K , danej rovnicou (31.1). Nech $P^\infty(\lambda, 1, 0)$, $Q^\infty(1, -\lambda, 0)$ sú nevlastné body združených hlavných priemerov. Polára $P^\infty K$ bodu P^∞ obsahuje bod Q^∞ , preto $P^\infty K (Q^\infty)^T = 0$ odkiaľ

$$a_{12}\lambda^2 + (a_{22} - a_{11})\lambda - a_{12} = 0. \quad (35.2)$$

Diskriminant $(a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}^2$ tejto kvadratickej rovnice je nezáporný, preto rovnica (35.2), ktorú budeme nazývať *sekulárna*, má vždy aspoň jeden reálny koreň. To znamená, že každá kuželosečka má aspoň dva hlavné priemery. Sú to poláry bodov P^∞ , Q^∞ .

Definícia 35.6 *Priesečníky kuželosečky s jej osami nazývame vrcholy tejto kuželosečky.*

Úloha 35.7 *Priamka $y = 0$ (t.j. x -ová súradná os) je os kuželosečky (31.1) práve vtedy, keď $a_{12} = a_{23} = 0$.*

Úloha 35.8 *Ku každej kuželosečke existuje repér tak, že jej rovnica je*

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}xt + a_{33}t^2 = 0. \quad (35.3)$$

Úloha 35.9 *Ku každej nestredovej kuželosečke existuje repér tak, že jej rovnica je*

$$y^2 = 2pxt, \quad p \neq 0. \quad (35.4)$$

Úloha 35.10 *Ku každej stredovej kuželosečke existuje repér tak, že jej rovnica je*

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}t^2 = 0. \quad (35.5)$$

Úloha 35.11 *Parabola je jediná nestredová regulárna kuželosečka. Ku každej afinnej parabole existuje ortonormálny repér tak, že jej rovnica je*

$$y^2 = 2px, \quad p \neq 0. \quad (35.6)$$

Úloha 35.12 Dokážte, že kužeľosečka (35.5) je regulárna práve vtedy, keď $a_{11}a_{22}a_{33} \neq 0$ a aspoň jedno z čísel a_{11} , a_{22} , a_{33} je záporné a aspoň jedno kladné.

Úloha 35.13 Ku každej hyperbole roviny E_2 existuje ortonormálny repér tak, že jej rovnica je

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \cdot b \neq 0. \quad (35.7)$$

Ku každej elipse roviny E_2 existuje ortonormálny repér tak, že jej rovnica je

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \cdot b \neq 0. \quad (35.8)$$

Úloha 35.14 Každá regulárna afinná kužeľosečka má kanonickú rovnicu. Je to práve jedna z rovníc (35.6), (35.7), (35.8).

Úloha 35.15 Nech kužeľosečka K je daná kanonickou rovnicou (t.j. jednou z rovníc (35.6), (35.7), (35.8)). Keď K je parabola, potom K prechádza začiatkom repéra, nemá stred a x -ová súradná os je jej jedinou osou súmernosti. Ak K je elipsa alebo hyperbola, tak začiatok ortonormálneho repéra je jej jediný stred a súradné osi sú jej osi súmernosti.

Úloha 35.16 Vypočítajte kanonickú rovnicu afinnej kužeľosečky K , danej rovnicou (v ortonormálnom repére)

$$x^2 - 6xy + 9y^2 + 8x - 4y - 7 = 0. \quad (35.9)$$

Úloha 35.17 Daná je elipsa K rovnicou $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Dokážte, že každé dve združené poláry elipsy K prechádzajúce bodom $F(3, 0)$ sú navzájom kolmé priamky.

Úloha 35.18 Dokážte, že $F(\frac{p}{2}, 0)$ je jediné ohnisko (ležiace v euklidovskej rovine) afinnej paraboly $y^2 = 2px$.

Úloha 35.19 Dokážte, že hyperbola je množina všetkých bodov roviny E_2 , ktorých rozdiel vzdialeností od dvoch rôznych bodov E , F je $\pm a$, kde $a < |EF|$ je dané kladné reálne číslo.

Úloha 35.20 Dokážte, že elipsa je množina všetkých bodov roviny E_2 , ktorých súčet vzdialeností od dvoch rôznych bodov E , F je konštantný a väčší ako $|EF|$.

Úloha 35.21 Dokážte, že parabola je množina všetkých bodov roviny E_2 , ktorých vzdialenosti od daného bodu F a danej priamky r , $F \notin r$, sú rovnaké.

Úloha 35.22 Nech $\alpha : E_2 \rightarrow E_2$ je afinita, K je afinná kužeľosečka. Obraz K je opäť afinná kužeľosečka toho istého typu ako K . Ak K je regulárna, αK je tiež regulárna; ak K je singulárna, K je tiež singulárna.

Úloha 35.23 Afinita zobrazí elipsu na elipsu, parabolu na parabolu a hyperbolu na hyperbolu.

Úloha 35.24 Daná je afinita $\alpha : E_2 \rightarrow E_2$ rovnicami $x' = x + 2y$ $y' = 3y$ a kružnica $K(Q, 2)$, $Q(0, 0)$. Dokážte, že αK je elipsa (ktorá nie je kružnica) a nájdite jej stred a osi.

Cvičenie

35.1 Dokážte, že každá kružnica je elipsa.

35.2 Dokážte, že ak $a = b$, tak elipsa (35.8) je kružnica.

35.3 Dokážte, že kužeľosečka (31.1) je kružnica práve vtedy, keď $a_{12} = 0$ a $a_{11} = a_{22}$.

35.4 Dokážte, že každé dva združené priemery kružnice sú hlavné.

35.5 Dokážte, že ak $a \geq b$, ohniská elipsy (35.8) sú body $E(e, 0)$. $F(-e, 0)$, kde $e^2 = a^2 - b^2$.

35.6 Dokážte, že ak každé dva združené priemery elipsy sú hlavné, tak táto elipsa je kružnica.

35.7 Dokážte, že asymptoty hyperboly (35.7) sú priamky

$$bx - ay = 0 \quad bx + ay = 0.$$

35.8 Dokážte, že ohniská hyperboly (35.7) sú body $E(e, 0)$, $F(-e, 0)$, kde $e^2 = a^2 + b^2$.

35.9 Nech K je elipsa alebo hyperbola, daná jednou z rovníc (35.7), (35.8). Nech E , F sú ohniská, t dotyčnica kužeľosečky K v bode $A \in K$ a nech $B = \sigma_t F$ (σ_t je osová súmernosť s osou t). Dokážte, že $B \in \overline{EA}$ a $|EB| = 2a$. (Pozri cvičenia 35.4, 35.5).

35.10 Nech K je parabola, F jej ohnisko, t dotyčnica v bode $A \in K$, B pravouhlý priemet bodu A na os M paraboly K a nech $C = t \cap M$. Dokážte, že vrchol paraboly je stred úsečky BC .

35.11 Priamku $x = -\frac{p}{2}$ nazývame riadiaca priamka paraboly (35.6). Dokážte, že dotyčnice paraboly zostrojené z jej riadiacej priamky sú navzájom kolmé priamky.

35.12 Dĺžkou osi stredovej regulárnej kužeľosečky rozumieme vzdialenosť vrcholov kužeľosečky ležiacich na tejto osi. Napíšte rovnicu elipsy, ktorej ohniská sú $E(1, 0)$, $F(0, 1)$ a väčšia os má dĺžku 2.

35.13 Vypočítajte rovnicu hyperboly, ktorej ohniská sú $E(1, 0)$, $F(0, 1)$ a asymptoty sú rovnobežné so súradnými osami.

35.14 Dokážte, že ku každej elipse existuje repér (nie nutne ortonormálny !) tak, že jej rovnica je $x^2 + y^2 = r^2$, $r \neq 0$.

35.15 Nech $a \neq 0$, $b \neq 0$ sú reálne čísla. Dokážte, že množina

$$\{(a \cdot \cos t, b \cdot \sin t) \in E_2; t \in R\}$$

je elipsa. Rovnice

$$x = a \cdot \cos t \quad y = b \cdot \sin t$$

nazývame *parametrické rovnice elipsy*.

35.16 Nech $\pi : 3x + 4y + z - 3 = 0$ je rovina v E_3 a nech L je ľubovoľná priamka rôznobežná s π . Nech $\alpha : E_3 \rightarrow E_3$ je rovnobežné premietanie so smerom L na rovinu π . Dokážte, že keď K je kružnica $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, tak K je elipsa (inak povedané rovnobežným priemetom kružnice je elipsa.)

35.17 Dokážte, že elipsa má 4 vrcholy, afinná parabola jeden a afinná hyperbola dva. Os hyperboly, na ktorej ležia vrcholy nazývame *reálna os*, tá druhá je *imaginárna os* hyperboly.

35.18 Nech $\kappa : RP_2 \rightarrow RP_2$ je perspektívna kolineácia so stredom $S(0, 2, 1)$, osou $N = (0, 1, 0)$ a párom odpovedajúcich si bodov $A(0, 1, 1)$, $A'(0, 1, 0)$, t.j. $\kappa A = A'$. Dokážte, že obraz kružnice $(x - 1)^2 + y^2 = r^2$ je parabola, ak $r = 1$, hyperbola, ak $r > 1$ a elipsa, ak $r < 1$.

35.19 Napíšte rovnice afinity, ktorá zobrazí elipsu $\frac{(x - 2)^2}{4} + \frac{(y + 3)^2}{9} = 1$ na kružnicu.

35.20 Dokážte, že kolineácia zobrazí kužeľosečku na kužeľosečku a pritom regulárnu na regulárnu a singulárnu na singulárnu.

L I T E R A T Ú R A

- [1] Artin, E.: Geometričeskaja algebra. Nauka, Moskva 1969
- [2] Dieudonné, J.: Linejnaja algebra i elementarnaja geometrija. Moskva 1970
- [3] Hejný M. a kol.: Geometria 1. SPN Bratislava 1985
- [4] Sekanina M. a kol.: Geometria II, SPN Praha 1988.
- [5] Šedivý O. a kol.: Geometria 2. SPN Bratislava 1987