Vzorové príklady s riešeniami k lineárnej algebre a geometrie pre aplikovaných informatikov k písomke 23.5.2006

Príklad č.1 Riešte sústavu $Bx = r \backsim (B|r)$

$$(B|r) = \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 2 & 3 & 4 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 & 8 & 0 & -8 & 2 \\ 0 & 6 & 9 & 12 & 6 & -3 & 9 \\ 0 & -2 & -3 & -4 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 6 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & 6 & 8 & 4 & -2 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -2I \\ -3I \\ +I \\ -I \\ -2I \end{array} = \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 2 & 3 & 4 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ :(-2) \\ \\ \\ +II \\ \\ \end{array}$$

Riešenie: Úloha je na precvičenie riešenia tzv. singulárnej sústavy ($det(B) = 0$), čo už síce máte vedieť riešiť, ale keďže to potrebujete pri hľadaní vlastných vektorov v ďalších úlohách, tak to ešte raz uvedieme. Skutočnosť, že $det(B) = 0$ nemusíte alebo môžete vedieť na začiatku, postup je rovnaký. To, že sa jedná o singulárnu sústavu zbadáte po niekoľkých úpravách, keď na ľavej strane dostanete aspoň jeden riadok nulový V tomto semestri sme už mali spomenutú nasledujúcu vetu:

V1: ***Veta o počte riešení lin. sústavy***

Pre ***ľubovoľnú(=každú)*** *pravú stranu r sústavy rovníc (=maticovej rovnice) $Bx = r$ má sústava práve jedno riešenie (t.j. existuje* ***práve jeden*** *vektor x, ktorý spĺňa rovnicu $Bx = r$), práve vtedy keď $det(B) \neq 0$. Nemá žiadne riešenie alebo má nekonečne veľa riešení práve vtedy keď det(B)=0.*

Ak po úplnom zjednodušení matice ekvivalentnými úpravami ku každému nulovému riadku na ľavej strane je príslušny element na pravej strane nulový, tak sústava má nekonečne veľa riešení. Ak k nejakému nulovému riadku na ľavej strane prislúcha nenulový element na pravej strane,tak sústava nemá riešenie. Naša sústava bude mať zrejme nekonečne veľa riešení.Nulové riadky môžeme vynechať a sústavu prepísať takto:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 2 & 3 & 4 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right) \tag{1}$$

Ak (stĺpcovy) vektor riešenia x zapíšeme v zložkách ako $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T$ tak sa predošlím zápisom myslí toto:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Teraz v každom (nenulovom) riadku nájdeme zľava prvý nenulový element a zistíme, stĺpce v ktorom sa tieto prvé nenulové elementy nachádzajú. U nás sú to stĺpce 2 a 5. Z toho usudíme, že elementy vektora x: x_2 a x_5 budú tzv. **závislé parametre** alebo iný názov **zviazané parametre**. Zvyšné elementy vektora x: x_1, x_3, x_4, x_6 budú tzv. **nezávislé parametre** alebo iný názov **voľné parametre**.

Ďalej prepíšeme sústavu do nematicového (stredoškolského) tvaru:

$$\begin{aligned} 0x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 0x_5 - 4x_6 &= 1 \\ 2x_5 + 3x_6 &= 2 \end{aligned}$$

Teraz nám stačí vyjadriť z tohto tvaru zviazané parametre (x_2, x_5) pomocou voľných parametrov (x_1, x_3, x_4, x_6):

$$x_2 = \frac{1}{2}(1 - 3x_3 - 4x_4 - 4x_6)$$
$$x_5 = \frac{1}{2}(2 - 3x_6)$$

To znamená že viem poskladať už celý vektor riešenia x **len z voľných parametrov**. Zviazané parametre vo vektore nahradím predošlými vyjadreniami:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{1}{2}(1 - 0.x_1 + 3x_3 - 4x_4 - 4x_6) \\ x_3 \\ x_4 \\ \frac{1}{2}(2 - 3x_6) \\ x_6 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_6 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ -3/2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Pre každú štvoricu (x_1, x_3, x_4, x_6) voľných parametrov dostávame jedno riešenie x singulárnej sústavy. Pre dve rôzne štvorice dostávame dve rôzne riešenia sústavy. Dostávame teda nekonečne veľa riešení sústavy, pretože máme nekonečne veľa možností ako môžeme vyberať štvoricu voľných parametrov. Toto riešenie môžeme zapísať pomocou tzv. lineárneho obalu vektorov.
Definícia: Lineárny obal k vektorov $\{\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, ..., \overrightarrow{x_k}\}$ *je množina obsahujúca nekonečne veľa vektorov, značí sa takto* $[\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, ..., \overrightarrow{x_k}]$ *a je to množina všetkých lineárnych kombinácií uvedených vektorov. Jedna lineárna kombinácia vektorov* $\{x_1, x_2, x_3\}$ *je napríklad vektor* $\overrightarrow{x} = 2\overrightarrow{x_1} - 5\overrightarrow{x_2} + 7\overrightarrow{x_3}$. *Formálne zapísaná definícia je teda: Ak príslušné vektory* $\overrightarrow{x_i}$ *sú z vektorového priestoru V potom lineárny obal je:*
$[\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, ..., \overrightarrow{x_k}] = \{\overrightarrow{x} \in V, \exists\{c_1, c_2, ..., c_k\} \in \mathbb{R}^k,$ *že* $\overrightarrow{x} = \sum_{i=0}^{k} c_i \overrightarrow{x_i}\}$
Lineárny obal je vektorový/lineárny priestor. *To znamená pre každé 2 vektory* $\overrightarrow{u_1}$ *a* $\overrightarrow{u_2}$ *v lineárnom obale* $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2} \in [\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, ..., \overrightarrow{x_k}]$ *bude aj ich každá lineárna kombinácia* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *v tomto obale:* $\alpha\overrightarrow{u_1} + \beta\overrightarrow{u_2} \in [x_1, x_2, ..., x_k]$ *Dimenzia lineárneho obalu je počet lineárne nezávislých vektorov, uvedených v zápise tohto obalu. Ten istý lineárny obal sa dá zapísať viacerými spôsobmi. Pozri koniec tohto príkladu:*

Vráťme sa k zápisu riešenia sústavy pomocou lineárneho obalu.

$$x \in \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ -3/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \tag{5}$$

Samozrejme, aby sme sa zbavili vo výsledku zlomkov, tak môžeme v lin. obale namiesto vektorov brať aj ich ľubovoľné linárne kombinácie,(napr. aj násobky). Dostávame stále rovnakú množinu riešení:

$$x \in \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right] \tag{6}$$

Dostali sme teda riešenie v tvare $\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{u} + U$,kde $\overrightarrow{u}$ je nejaký vektor(volá sa aditívny) a U je lineárny obal nejakých vektorov (vektorový/lineárny priestor,množina vektorov). Ak vektor $\overrightarrow{u}$ je nulový tak riešenia tvoria vektorový priestor. T.j. pre každé dve riešenia $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{v_1}$ a $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{v_2}$ pôvodnej sústavy je aj ich každá lineárna kombinácia $v_3 = \alpha v_1 + \beta v_2$ tiež riešením pôvodnej sústavy, t.j. hovoríme,že vektorový priestor je uzavretý na lineárne kombinácie. Dimenzia tohto priestoru je vždy menšia rovná ako je dimenzia celého priestoru v ktorom pracujeme. U nás je dimenzia celého priestoru dim(B)=6 a dimenzia vektorového priestoru riešení je daná počtom voľných parametrov (u nás je to 4). Hovoríme, že sme dostali **vektorový/lineárny podpriestor riešení sústavy**. Ak vektor $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ je nenulový(čo je aj náš prípad) tak riešenia tvoria tzv. afinný podpriestor (t.j. vektorový priestor posunutý o nenulový aditívny vektor $\overrightarrow{u}$) Pre afinný (pod)priestor **neplatí**, že lineárna kombinácia vektorov z afinného (pod)priestoru je vektor z toho istého afinného (pod)priestoru. (Hovoríme,že afinný (pod)priestor **nie je** uzavretý na lineárne kombinácie.) Pre sústavu rovníc s pravou stranou r=0 dostávame vždy lineárny podpriestor riešení. Spolu lineárny podpriestor riešení a afinný podpriestor riešení označujeme len ako **podpriestor riešení**. Z každého nenulového riadku sme mali jeden závislý parameter. Zvyšené parametre boli nezávislé (voľné). Dimenzia podpriestoru riešení (čo je počet voľných parametrov, u nás 4) je rovná dimenzii celého priestoru (u nás 6) mínus počet nenulových riadkov matice A po úprave(teda hodnosť matice A, u nás 2).Teda dimenziu podpriestoru riešení viete už pomerne skoro na začiatku riešenia.

Keď dvaja rôzni ľudia riešia (singulárnu) sústavu (alebo neskôr aj diagonalizačnú úlohu) , môže sa stať, že pri viacrozmerných podpriestoroch budú mať každý iné vektory v zápise lin. obalu (a budú to nielen nenulové násobky). Napr. Jednému výjde riešenie nejakej sústavy

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \tag{7}$$

a druhému

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \tag{8}$$

Netreba sa tým nechať zmiasť, stále ešte môžu mať všetci vyriešenú úlohu správne , pretože podpriestor sa dá zapísať rôznymi spôsobmi. To je dobre mať na pamäti napríklad aj vtedy, keď si kontrolujete svoje výsledky s výstupmi týchto úloh riešenými na počítači. (Napr. Ten druhý podpriestor je rovnaký ako ten prvý, pretože má jeden vektor totožný a druhý vektor vznikol ako aritmetický priemer oboch vektor v prvom zápise.) Napríklad ak pre n=2 v trojrozmernom priestore máte 2 vektory určujúce rovinu prechádzajúcu počiatkom $\overrightarrow{0}$ (t.j. je to lineárny podpriestor) a potom ich zrotujete v tejto rovine o rovnaký uhol rovnakým smerom. Dostanete inú dvojicu vektorov ležiacu v tej iste rovine. Obe dvojice vektorov vám určujú tú istú rovinu. V oboch prípadoch ich lineárny obal generuje tu istú rovinu prechádzajúcu počiatkom alebo ten istý dvojrozmerný podpriestor trojrozmerného priestoru. Jednoducho platí, že ten istý podpriestor k-rozmerný podpriestor n-rozmerného *priestoru (0<k<=n) viete generovať viacerými n-ticami vektorov. Pravidlo je jednoduché:* ***Ak nahradíte ľubovoľný(=každý) vektor v lineárnom obale lineárnou kombináciu všetkých vektorov v lin. obale (s podmienkou, že koeficient pri pôvodnom vektore je nenulový), tak sa vám generovaný podpriestor nemení.*** *Napr. nahradíme druhý vektor:*

$$[\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2} \dots \overrightarrow{x_k}] = [\overrightarrow{x_1}, \sum_{i=1}^{k} c_i \overrightarrow{x_i}, \dots \overrightarrow{x_k}], c_2 \neq 0 \tag{9}$$

.To môžete opakovať zakaždým pre iný vektor. Všimnite si dôležitý špeciálny prípad, keď všetky $c_i = 0$ okrem $c_2 \neq 0$.

Príklad č. 2

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

- Riešte tzv. "vlastný problém"matice A. Teda inak povedané nájdite všetky vlastné čísla matice A (t.j. spektrum matice A) a k nim prislúchajúce vlastné vektory prípadne podpriestory.
- Rôzne ale ekvivalentné formulácie tej istej úlohy: Diagonalizujte maticu A. Pre maticu A nájdite čo najjednoduchšiu (t.j. je diagonálnu alebo ,takú ,ktorá sa najviac podobá na diagonálnu.) *podobnú* maticu J a maticu podobnosti P. Nájdite tzv. Jordanov rozklad matice $A = PJP^{-1}$.(názov Jordanov je z príkladu č.5) Nájdite vlastný rozklad matice A. Pre maticu A nejakého lineárneho zobrazenia f v nejakej (starej) báze nájdite maticu prechodu P do novej bázy a maticu J zobrazenia f v novej báze, tak aby matica J bola čo najjednoduchšia. (Pozri aj príklad 3, pre presnejšie vysvetlenie)
- Za použitia predošlých výsledkov nájdite rýchlo determinant matice A.

Riešenie:
(Google keywords:mathworld,eigenproblem,eigenvalue,eigenvector,eigen decomposition,Jordan decomposition)
http://mathworld.wolfram.com/Eigenvalue.html,
http://mathworld.wolfram.com/Eigenvector.html,
http://mathworld.wolfram.com/EigenDecomposition.html
http://mathworld.wolfram.com/JordanMatrixDecomposition.html
(pozrite si: http://distance-ed.math.tamu.edu/Math640/chapter5/node4.html)
Vlastný problém je

$$A\overrightarrow{v_i} = \lambda_i \overrightarrow{v_i} \tag{11}$$

, kde index i čísluje nejaký vlastný vektor $\overrightarrow{v_i}$ z množiny viacerých možných a λ_i je k tomuto vlastnému vektoru príslušné vlastné číslo.($\overrightarrow{v_i}$, teda **ne**znamená i-tá zložka vektora $\overrightarrow{v}$) *(Prečo,Načo,Ako?:Vo všeobecnosti zobrazenie $f : v \rightarrow A.v$ alebo $f(v) = A.v$ najčastejšie (pri náhodnom výbere vektora v) priradí nejakému vektoru v vektor u=Av, taký, že $v \nparallel u$ (sú rôznobežné), v špeciálnych prípadoch (=menej častých prípadoch pri náhodnom výbere) môže nastať, že sú rovnobežné $v \parallel u$, teda $v \parallel Av$, takýto špeciálny vektor v nazývame vlastný vektor (eigenvector). Posledná rovnobežnosť sa zvyčajne zapisuje v tvare $Av = \lambda v$., kde λ sa nazýva vlastné číslo(eigenvalue). Úloha hľadania vlastných čísel a vl. vektorov sa nazýva vlastný problém(eigenproblem). Ďalej táto úloha sa vyskytuje v geometrii a v počítačovej v grafike pri hľadaní osí všeobecných kúželosečiek(elipsa,parabola,hyperbola) v rovine alebo kvadrík (elipsoid,paraboloid,hyperboloid) v priestore. Ďalej sa vl. vektory môžu použiť pri tzv. "stratovej"kompresií grafických dát. Vo fyzike majú vl. vektory* *absolútne kľúčový význam. Takže zaujímame sa práve o tie menej časté (pri náhodnom výbere), ale zato významné vektory. Množina vlastných čísel sa nazýva spektrum matice $\sigma(A)$. Vlastných čísel je vždy menej alebo rovnako ako je dimenzia matice. Teda v našom prípade budú najviac 3. Ku každej matici (komplexnej alebo reálnej) existuje aspoň jedno vlastné číslo (prinajmenšom komplexné). Ku každému vlastnému číslu prislúcha **aspoň jeden** vlastný vektor. Ku každému vlastnému vektoru prislúcha **práve jedno** vlastné číslo. Všetky vlastné čísla každej reálnej symetrickej matice (dokonca aj každej tzv hermitovej) sú reálne (nie sú komplexné, imaginárnu zložku majú nulovú) a vlastné vektory, ktoré prislúchajú rôznym (reálnym) vlastným číslam sú navzájom kolmé (ortogonálne).*

Hľadanie vlastných čísel

Nech I je jednotková štvorcová matica (jednotky na diagonále,inde nuly) rovnakého rozmeru ako A. (Vieme, že pre každý vektor v: $v.I = I.v = v$,overte si to. Ďalej pre každé číslo c (komplexné,reálne) c.A=A.c) Tak môžeme prepísať pravú stranu rovnice (11) : $Av = I.\lambda v$, ďalej prehodíme pravú stranu na ľavú a vytiahneme v ZA súčin. (pozor $Av \neq vA$,pretože vektor je tiež matica, a pre matice sme mali tiež $AB \neq BA$,musíme preto vyťahovať spoločný vektor za a nie pred.)

$$(A - \lambda_i.I)v_i = 0 \tag{12}$$

Využijeme vetu V1 z 1. úlohy: V našom prípade $B = (A - \lambda_i.I)$,$v = x$ a $b = 0$ je nulový vektor, ale veta stále platí. Navyše každá sústava $Bx = 0$ (aj naša $Bv = 0$),má vďaka nulovej pravej strane jedno tzv. triviálne riešenie a to $x = 0$ nulový vektor. Áno je to tak, nulový vektor v_i v rovniciach (11) a (12) triviálne spĺňa rovnicu pre každé λ_i. My sa zaujímame o nenulové vektory (tzv. netriviálne riešenie), ktoré to tiež spĺňaju. Každopádne aj nulové riešenie je riešenie v predošlej vete. Keďže chceme ešte nejaké riešenie,tak chceme/musíme mať aspoň 2 riešenia. Keďže predošla veta, prípúšťa len možnosti (žiadne riešenie,jedno riešenie a nekonečne veľa riešení), to znamená, že my musíme mať nekonečne veľa riešení (ak chceme mať aspoň 2 riešenia, teda aspoň jedno netriviálne riešenie.) O takomto počte riešení veta hovorí, že je to práve vtedy keď det(B)=0.

Teda aspoň jeden netriviálny(nenulový) vlastný vektor v_i budeme mať práve vtedy keď ($\Leftrightarrow$)

$$det(A - \lambda_i.I) = 0 \tag{13}$$

Polynóm n-tého stupňa ($n = dim(A)$,v našom prípade n=3)

$$\chi_A(\lambda) = det(A - \lambda_i.I) \tag{14}$$

sa nazýva charakteristický polynóm (charakteristická funkcia) matice A. Rovnica (13) nám udáva zároveň nutnú a postačujúcu podmienku pre nájdenie vlastných čísel λ_i. To využijeme. Vidíme,že koreňe charakteristického polynómu sú vlastné čísla.

Takže **vlastné čísla matice A hľadáme ako koreňe charakteristického polynómu** $\chi_A(\lambda)$ akýmkoľvek známym spôsobom na hľadanie koreňov, kde zároveň charakteristický polynóm hľadáme akýmkoľvek známym spôsobom na hľadanie determinantu matice(úprava na trojuholníkový tvar a súčin diagonálnych členov alebo výroba nul ekvivalentnými úpravami v nejakom riadku/stĺpci a rozvoj determinantu podľa toho istého riadku alebo pre n=3 kramerovo pravidlo.) V našom prípade si všimnime, že 2.riadok má nejako moc núl, čo je fajn. Rozvinme podľa neho.

$$\chi_A(\lambda) = det(A - \lambda.I) = det\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & -2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 4 & -1 & -3-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)det\begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 4 & -3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = (2-\lambda)[(3-\lambda)(-3-\lambda)+8)] = (2-\lambda)(\lambda^2-9+8) = (2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1)$$

Hneď vidíme všetky korene charakteristického polynómu, teda máme všetky vlastné čísla. Máme teda spektrum matice

$$\sigma(A) = \{-1, 1, 2\} \tag{15}$$

. Je dôležité si všimnúť aj násobnosť koreňov ch. polynómu. Tu uvažujeme len jednonásobné korene. Odlišnosti pre viacnásobné korene sú rozobrané v príklade 4. *Komplikáciou pri určovaní determinantu, je to, že tam máme parameter λ a všetky doteraz naučené postupy pre determinant matice bez parametra sa tu nedajú použiť jednoduchým spôsobom. V prípade $dim(A) = 2$ by ste rátali polynóm vždy priamo. V prípade $dim(A) = 3$ ak vidíte nejaký riadok alebo stĺpec s dvoma nulami tak rozviniete podľa daného riadku/stĺpca. Inak ak poznáte kramerové pravidlo použijete to. Pre $dim(A) >= 3$ si vyberiete riadok alebo stĺpec s najväčším počtom nulových elementov. Ak je tam dva a viac nenulových nediagonálnych elementov, tak podľa jedného nediagonálneho nenulového elementu(kt. nemá λ) a použitím elementárnych úprav pre determinanty "vyrobíte"nuly v zvyšných miestach (okrem diagonálneho) daného stĺpca/riadku. Rozviniete podľa daného riadka/stĺpca. Dostanete výraz s 2 determinantmi s menšou dimenziou. Pri hľadaní koreňov: Polynóm nepárneho stupňa (napr. pre dim(A)=3) pre ľubovoľnú maticu (aj nesymetrickú) má vždy aspoň jeden reálny koreň (viď základná veta algebry.), ch. polynóm symetrickej matice má len reálne korene. Môžeme hádať korene.(postupne z množiny 0,1,-1,2,-2) Ak uhádnete 1 koreň napr. $\lambda_1 = 7$, tak môžete znížiť stupeň polynómu o 1 algoritmom "delenie polynómu polynómom"(ako,to tu už nebudem písať) ,čo uľahčí ďalšie hľadanie koreňov.*
(Nepovinné,len pre labužníkov)Je ešte jeden postup, ako sa dá vyhnúť rátaniu determinantu s parametrom λ, aj keď na úkor toho, že rátame jednu sústavu navyše a rátame viac číselnych (bezparametrických) determinantov. Viete že stupeň charakteristického polynómu je rovnaký ako dimenzia matice. Napr. pre n=3 predpokladáte jeho tvar s tzv "neurčitými koeficientami". $\chi(\lambda) = (-1)^3\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$ Do matice $B = A - \lambda.I$ dosadíme postupne tri rôzne hodnoty λ (napr. 0,1,-1) a dostaneme tri rôzne matice, ktoré sú už bez parametra a teda vieme rátať ich determinant známymi postupmi. Hľadáme a nájdeme teda tri determinanty, čo je hodnota charakteristického polynómu (ktorý ešte nepoznáme) pre tri rôzne hodnoty λ. Potom dosadíme postupne rovnaké hodnoty do ch. polynómu s neurčitými koeficientami a porovnáme. Dostaneme bezparametrickú lineárnu sústavu troch rovníc pre neznáme premenné a,b,c,ktorú vyriešime a tým určíme aj celý ch. polynóm. Je jasné, že tento postup sa hodí len pre väčšie dimenzie a najmä pre automatické rátanie na počítači. Korene ch. polynómu hľadáme ako už bolo spomenuté vyššie.)

Hľadanie vlastných vektorov Máme už spektrum $\sigma(A) = \{-1, 1, 2\}$. Postupne pre všetky vlastné čísla zo spektra λ_i riešime už skôr uvedenú rovnicu (12):
$B_i.v_i = (A - \lambda_i.I)v_i = 0$ ako maticovú rovnicu (lineárnu sústavu) pre neznámy nenulový vektor v_i. (Všimnite si nulovú pravú stranu sústavy.)
Pre $\lambda_1 = -1$

$$B_1 = A - \lambda.I = A + I = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Podľa (13) determinant tejto matice je hodnota ch. polynómu v bode -1: $\chi(-1) = det(B_1)$, ale -1 sme dostali ako koreň ch. polynómu, takže $det(B_1) = \chi(-1) = 0$. Matica B_1 je teda singulárna a sústava má podľa vety V1 z 1. príkladu nekonečne veľa riešení. (žiadne riešenie nemôže mať, lebo vidíte,že nulový vektor je určite riešenie, to sme už spomínali.)
Podľa príkladu 1 riešime sústavu typu $Bv = r$, kde $det(B) = 0$ s nulovou pravou stranou r=0. Z 1. príkladu vieme že máme dostať (lineárny,nie afinný) podpriestor riešení.(pozri

1. príklad pre definíciu tohto pojmu)

$$B_1v_1 = 0 \backsim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \backsim B_1' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Všimnime si, že pravá strana rovnice bude po každej úprave nulová a nemusíme ju písať. Ak predpokladáme vlastný vektor v tvare $v_1 = (r, s, t)$ tak podľa príkladu 1 bude voľný parameter t a nematicový (stredoškolský) tvar sústavy je $2r - t = 0, 1.s + 0.t = 0$. Prepíšeme závisle parametre r,s pomocou voľného parametra t: $r = t/2, s = 0t$. a dosadíme do vlastného vektora
$v_1 = (r, s, t) = (t/2, 0t, t)^T = t(1/2, 0, 1)^T$, kde t je nezávislý (voľný) parameter. Podpriestor riešení sústavy $B_1v_1 = 0$ je $[(1, 0, 2)^T]$. teda $v_1 \in [(1/2, 0, 1)^T] = [(1, 0, 2)^T]$ (Vlastný vektor je určený až na násobiacu konštantu. S každým vlastným vektorom je aj jeho nenulový násobok vlastným vektorom, ktorý prislúcha tomu istému vlastnému číslu.) Podpriestor $[(1, 0, 2)^T]$ riešení sústavy(definovaný v príklade 1) $B_1v_1 = 0$ sa v kontexte hľadania vlastných vektorov nazýva **vlastný podpriestor**. Keďže sme tu mali len jeden voľný parameter t, tak dimenzia podpriestoru riešení je jedna a hovoríme o jednorozmernom vlastnom podpriestore. Viacrozmerné vlastné podpriestory sa vyskytujú v príklade 4. Správne teda hľadáme vlastné podpriestory a nie vlastné vektory. Pri nájdení jednorozmerných vlastných podpriestorov, sa hovorí často nepresne len o nájdených vlastných vektoroch.
Vlastnému číslu $\lambda_1 = -1$ prislúcha jednorozmerný vlastný podpriestor

$$[(1, 0, 2)^T] \tag{16}$$

Pre $\lambda_2 = 1$ dostávame maticu

$$B_2 = A - \lambda_2.I = A - I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & -4 \end{pmatrix} \backsim B_2' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zapíšeme hľadané riešenie po zložkách takto $v_2 = (r, s, t)$ a prepišeme sústavu $B_2'v_2 = 0$ do nematicového tvaru: $r - t = 0, s = 0$, ak vezmeme t ako voľný parameter, tak $v_2 = (t, 0, t) = t(1, 0, 1)$
Vlastnému číslu $\lambda_2 = 1$ prislúcha jednorozmerný vlastný podpriestor

$$[(1, 0, 1)^T] \tag{17}$$

Pre $\lambda_3 = 2$ dostávame maticu

$$B_3 = A - \lambda_3.I = A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -5 \end{pmatrix} \backsim B_3' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Znova zapíšeme hľadané riešenie po zložkách takto $v_3 = (r, s, t)$ a sústavu $B_3'v_3 = 0$ prepíšeme na nematicový tvar: $r - t = 0, s + t = 0$, znova t ako voľný parameter, a dostávame $v_3 = (t, -t, t) = t(1, -1, 1)$
Vlastnému číslu $\lambda_3 = 2$ prislúcha jednorozmerný vlastný podpriestor

$$[(1, -1, 1)^T] \tag{18}$$

b) (Diagonalizácia)Máme nájsť diagonálny (vo všeobecnosti Jordanov) rozklad matice A. *Definícia podobnosti:Hovoríme,že 2 matice A,B sú podobné práve vtedy keď existuje taká regulárna ($det(P) \neq 0$) matica P, že $A = PBP^{-1}$ Diagonalizácia sa nazýva hľadanie takej regulárnej matice P a takej podobnej diagonálnej matice D,že $A = PDP^{-1}$. (Pre všeobecnú nesymetrickú maticu sa to nemusí dať takto rozložiť, pozri príklad č. 5.). Hovoríme, o diagonálnom rozklade matice A, alebo o vlastnom rozklade matice A alebo najvšeobecnejšie, že je to špeciálny prípad tzv. Jordanovho rozkladu. (pozri príklad. č. 5).*

Na určenie P využijeme nájdené vlastné vektory. Označme diagonálnu maticu utvorenú z vlastných čísel matice A ako $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = diag(-1, 1, 2)$ a maticu utvorenú v zodpovedajúcom poradí z vlastných vektorov

$$P = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{19}$$

Potom

$$AP = A.(v_1, v_2, v_3) = (Av_1, Av_2, Av_3) = (\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \lambda_3 v_3) = (v_1, v_2, v_3).D = PD \tag{20}$$

Z toho $A = PDP^{-1}$, čo je diagonálny rozklad matice A, čo je špeciálny prípad tzv. Jordanovho rozkladu, pozri príklad č. 5. Stačí nám teda nájsť ešte inverznú maticu.

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{21}$$

Teda máme rozklad:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{22}$$

Rozklad nie je jednoznačný (nie je len jeden): diagonálna matica, môže mať prehodené elementy. Matica P (tá zľava od diagonálnej) bude mať potom prehodené príslušné stĺpce a matica P^{-1} bude mať prehodené príslušné riadky:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{23}$$

Okrem toho je tam ešte jedná voľnosť na rozklad, ktorá súvisí s tým, že každý stĺpec matice P (je to vlastný vektor) môže sa nahradiť nejakým jeho nenulovým c násobkom, potom príslušný riadok inverznej matice sa musí nahradiť (1/c) násobkom.
c) Máme nájsť šikovne determinant matice A za použitia predošlých výsledkov. Veta:Determinanty podobných matíc sú rovnaké:

$$det(A) = det(PBP^{-1}) = det(P)det(B)det(P^{-1}) = det(P).det(B).(1/det(P)) = det(B) \tag{24}$$

Ak vezmeme za B nájdenu podobnú diagonálnu maticu D a uvedomíme si že determinant každej diagonálnej alebo trojuholníkovej matice je súčin diagonálnych elementov tak máme $det(A) = (-1).2.1 = -2$ Všimnite si, že to môžeme urobiť ešte pred tým ako hľadáme vlastné vektory, hneď po nájdení všetkých vlastných čísel.(teda pri známom spektre matice A).

Príklad č. 3 (Príklad je dobrý aj na ozrejmenie si základných pojmov) Nech je daný ľubovoľný vektorový priestor V s ľubovoľnou dimenziou n=dim(V) a s ľubovoľnou bázou $\{\overrightarrow{e_i}\} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots \overrightarrow{e_n}\}$ Nech v tejto báze je lineárne zobrazenie $f : V \to V$ ($\overrightarrow{y} = f(\overrightarrow{x})$) dané maticou zobrazenia A.(Vezmime pre konkrétnosť n=3 a maticu A z príkladu 2.) Nájdite takú inú bázu $\{\overrightarrow{f_i}\}$ vektorového priestoru V, v ktorej má matica J zobrazenia f najjednoduchší tvar (t.j. je diagonálna alebo najviac podobná diagonálnej.).Nájdite aj maticu J zobrazenia f v novej báze $\{\overrightarrow{f_i}\}$.

Riešenie:**Stručná odpoveď: V báze $\{\overrightarrow{v_i}\}$ svojích vlastných vektorov ($\overrightarrow{v_i} \parallel f(\overrightarrow{v_i})$) má ľubovoľné(=každé) zobrazenie $f : V \to V$ najjednoduchšie maticové vyjadrenie.**

Teda z tej stučnej odpovede vidíme, že zmena matice zobrazenia pri zmene bázy je tiež ekvivalentná s diagonalizáciou a hľadaním vlastných čísel a vlastných vektorov.(Je však treba dávať pozor na smer transformácie P,Q, premyslieť si to a nepomýliť sa.)

Detailne prečo: Keď budete mať takto zadaný príklad na písomke alebo skúške ako je tento, tak budete robiť presne to isté čo je robené v príklade 2 (plus malú časť na samom konci tohto príkladu) a nie to čo obšírne nasleduje. To čo nasleduje je len vysvetlenie toho, prečo môžeme robiť to, čo je príklade 2.

Matica A zobrazenia f udáva vzťah $y_i = \sum_j A_{i,j}x_j$ medzi súradnicami $\{x_i\}, \{y_i\}$ rôznych vektorov $\overrightarrow{x} = \sum_i x_i.\overrightarrow{e_i}$ a $\overrightarrow{y} = \sum_i y_i.\overrightarrow{e_i}$ v rovnakej báze $\{\overrightarrow{e_i}\}$. V maticovom zápise ak n-ticu súradníc vektora $\overrightarrow{x}$ v tejto báze zapíšem len ako x, tak

$$y = Ax \tag{25}$$

Maticu prechodu Q do novej bázy definujeme takto: Nech stĺpce matice Q sú postupne súradnice vektorov $\{\overrightarrow{f_i}\}$ v báze $\{\overrightarrow{e_i}\}$, kde vektory $\{\overrightarrow{f_i}\}$ tvoria novú bázu. Ekvivalentne to môžeme zapísať takto $\overrightarrow{f_i} = \sum_j Q_{j,i}\overrightarrow{e_j}$. Pozor na poradie indexov matice Q, opačne poradie indexov by bolo nesprávne. (druhý index i má byť stĺpec matice Q a teda $Q_{j,i}$ má byť j-tý element vektora $\overrightarrow{f_i}$) Každý vektor $\overrightarrow{x}$ vektorového priestoru V má v dvoch rôznych bázach $\{\overrightarrow{e_i}\}$,$\{\overrightarrow{f_i}\}$ rôzne súradnice $\{x_i\}$,$\{x'_i\}$ a rozklad toho istého vektora do dvoch rôznych báz bude:

$$\overrightarrow{x} = \sum_j x_j.\overrightarrow{e_j} = \sum_i x'_i.\overrightarrow{f_i} = \sum_i x'_i.(\sum_j Q_{j,i}\overrightarrow{e_j}) = \sum_j(\sum_i Q_{j,i}x'_i)\overrightarrow{e_j} \tag{26}$$

Využili sme predošlé vyjadrenie vektora $\overrightarrow{f_i}$,zámenú súm a distributívny zákon (zo základnej školy). teda

$$\overrightarrow{x} = \sum_j x_j.\overrightarrow{e_j} = \sum_j(\sum_i Q_{j,i}x'_i)\overrightarrow{e_j} \tag{27}$$

V jednej báze má každý vektor jednoznačné súradnice (jednoznačný rozklad vektora do danej bázy), teda všetky koeficieny v dvoch rôznych rozvojoch toho istého vektora do tej istej bázy sa musia rovnať:

$$x_j = \sum_i Q_{j,i}x'_i \tag{28}$$

, čo možno zapísať maticovo takto

$$x = Qx' \tag{29}$$

,kde x je n-tica (vektor) súradníc vektora $\overrightarrow{x} \in V$ v starej báze $\{\overrightarrow{e_i}\}$ a x' je n-tica (t.j. vektor) súradníc toho istého vektora $\overrightarrow{x} \in V$ v novej báze. Všimnite si, že musíme rozlišovať medzi (abstraktným) vektorom $\overrightarrow{x} \in V$ a medzi jeho maticovým (t.j. súradnicovým) vyjadrením x. Symbol x možno chápať tiež ako vektor, nie však ako prvok vektorového priestoru V ale ako prvok vektorového priestoru $\mathbb{R}^n$ (teda ako n-ticu.) Často sa pri fixnej báze tieto dve rôzne vektorové priestory stotožňujú.(pretože sú tzv. izomorfné,t.j. zameniteľné). Pri rôznych bázach(čo je náš prípad) sú rozličné maticové vyjadrenia toho istého vektora a je treba preto rozlišovať vektor a jeho maticové vyjadrenie v nejakej báze. Podobne aj vzťah pre maticové vyjadrenia vektora $\overrightarrow{y}$ v dvoch rôznych bázach bude:

$$y = Qy' \tag{30}$$

Dosadíme tieto dve vyjadrenia do zobrazenia $Qy' = AQx'$ a zľava (nie z prava) celú rovnicu prenásobíme inverznou maticou Q^{-1}, dostaneme tvar

$$y' = Q^{-1}AQx' = Jx' \tag{31}$$

Označili sme

$$J = Q^{-1}AQ \tag{32}$$

pretože v zadaní je určené toto označenie a matica J má požadovaný význam: Je to matica J zobrazenia f v novej báze $\{f_i\}$. Predošla rovnica udáva do súvisu matice toho istého zobrazenia f v dvoch rôznych bázach a súvisí prostredníctvom matice prechodu Q oboch báz. Ak prenásobíme predošlú rovnicu zľava maticou Q a zároveň sprava maticou Q^{-1} dostaneme obrátenu rovnicu

$$A = QJQ^{-1} \tag{33}$$

Teraz už naozaj vidno, že úloha nájsť maticu prechodu Q do inej bázy, ktorá zjednoduší zobrazenie f je totožná s úlohou diagonalizácie matice A. Ak stĺpce matice prechodu Q (podobne ako stĺpce matice P v príklade 2) budú pozostávať z maticovho zápisu vlastných vektorov (v starej báze), tak matica J bude jednoduchá. Ak sa vezme matica A z príkladu 2 tak matica J=D bude dokonca diagonálna. Teda: Novú bázu $\{\overrightarrow{f_i}\}$ budú tvoriť lineárne nezávislé vlastné vektory $\{\overrightarrow{v_i}\}$ zobrazenia f. ($\overrightarrow{v_i} \parallel f(\overrightarrow{v_i})$) Teda budú to:(pozri výsledok príkladu 2)

$$\overrightarrow{f_1} = 1\overrightarrow{e_1} + 0\overrightarrow{e_2} + 2e_3 = \overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_3} \tag{34}$$

$$\overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_3} \tag{35}$$

$$\overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3} \tag{36}$$

Matica zobrazenia f v tejto báze bude

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{37}$$

Príklad č. 4 (Rovnaké zadanie ako príkl. č. 2 pre inú maticu A)
Diagonalizujte A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}. \tag{38}$$

Riešenie: Charakteristický polynóm (14) po rozvití podľa 2. riadku bude:

$$\chi(\lambda) = det(A - \lambda I) = det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ -2 & -1 & 4-\lambda \end{pmatrix} \tag{39}$$

$$\chi(\lambda) = (3-\lambda)[(1-\lambda)(4-\lambda) - (-2).1] = (3-\lambda)(4 - 5\lambda + \lambda^2 + 2) \tag{40}$$

$$\chi(\lambda) = (3-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = (3-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-3) \tag{41}$$

Vidíme,že korene charakteristickej rovnice sú 2 a 3, kde číslo 2 je jednoduchý koreň a 3 je dvojnásobný. Teda spektrum matice A bude:

$$\sigma(A) = \{2, 3\} \tag{42}$$

Keďže číslo 2 je jednonásobný koreň ch. rovnice tak (podľa príkladu 2) pre vlastné číslo 2 dostaneme ako riešenie rovice (11) alebo (12) jednorozmerný vlastný podpriestor:

$$B_2 = A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{43}$$

Vezmeme $v_2 = (r, s, t)$ a t ako voľný parameter, potom z poslednej matice $r - t = 0, s = 0$ alebo $r = t, s = 0$ a teda $v_2 = t(1, 0, 1)$, teda jednorozmerný vlastný podpriestor bude $[(1, 0, 1)^T]$ a $v_2 \in [(1, 0, 1)^T]$ (zatiaľ bolo všetko presne ako v príklade 2)
Pre vlastné číslo 3, ktorý je dvojnásobný(všeobecne k-násobný) koreň charakteristickej rovnice, najväčia dimenzia, akú môžeme mať príslušný vlastný podpriestor prislúchajúci vlastnému číslu 3 je 2 (všeobecne k), ale môže mať aj menšiu dimenziu ako 2 (všeobecne menšiu ako k). Vždy však bude mať nenulovú dimenziu.

$$B_3 = A - 3I = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \tag{44}$$

Podľa príkladu 1 riešenie tejto sústavy bude mať až 2 voľné parametre. (Vo všeobecnosti pre inú maticu mohli by sme pre dvojnásobný koreň ch. polynómu dostať aj jeden voľný parameter. Potom pozri príklad č 5. Všeobecne ak pre k-násobné vlastné číslo dostaneš menej ako k voľných parametrov, tak musíš nasledovať príklad č.5.,pretože potom postup v tomto príklad neplatí. Ak pre k-násobné vlastné číslo máš práve k voľných parametrov tak riešiš podľa tohto príkladu.).tu môžeme dostať V zložkách $v_3 = (r, s, t)$ to budú s, t Dva voľné parametre podľa príkladu 1 spôsobia, že predošlá sústava musí mať dvojrozmerný priestor riešení, ktorý sa tu nazve dvojrozmerný vlastný podpriestor. Nájdime presne ten podpriestor: Sústava prechádza na nematicový tvar $r = -s/2 + t/2$, teda riešenie bude

$$\begin{aligned} v_3 &= s(-1/2, 1, 0)^T + t(1/2, 0, 1)^T = s(-1/2)(1, -2, 0)^T + t(1/2)(1, 0, 2) \\ v_3 &= s'(1, -2, 0)^T + t'(1, 0, 2) \end{aligned}$$

, kde sme vyňali zlomky pred vektory kvôli jednoduchosti vektorov. (Kde sme zaviedli nové parametre $s' = -s/2, t' = t/2$, hovorí sa, že sme reparametrizovali, alebo,že nastala reparametrizácia. Reparametrizácia sa robí len z estetických dôvodov a je nepovinná. Odstránenie zlomkov sa môže urobiť aj v zápise lineárneho obalu, ako sa to urobilo v príklade 1.)

$$v_3 \in \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \tag{45}$$

Pozor, ten istý lineárny obal môže byť zadaný aj inými vektormi, pozri záver príkladu č. 1. Cheme utvoriť maticu podobnosti(=prechodu) P. Do stĺpcov matice podobnosti(=prechodu) P za každý jednorozmerný vlastný podpriestor berieme nejaký jeden vlastný vektor, za každý k-rozmerný vlastný podpriestor musíme brať k lineárne nezávislých vlastných vektorov. Ak si zvolíme maticu P ako

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{46}$$

Nájdeme jej inverznú maticu (je P vždy invertibilná?prečo?), potom jeden (Jordanov,vlastný) rozklad matice A môže byť takýto:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ -1 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \tag{47}$$

(Pozri teraz záver 1. príkladu) Iný možný (z nekonečne veľa možných rozkladov) rozklad matice A vznikne, keď namiesto týchto dvoch $v_2 = (1, -2, 0)^T, v_3 = (1, 0, 2)^T$ lineárne nezávislých vl. vektorov z vlastného podpriestoru prislúchajúcemu vl. číslu 3 vezmem iné dve lineárne nezávisle vl. vektory z toho istého vlastného podpriestoru, napr. druhý vektor ponechám a spravím aritmetický priemer $(v_2 + v_3)/2 \to v_3$ oboch. Teda nech teraz budú zmenené vl. vektory takto $v_2 = (1, 0, 2)^T, v_3 = (1, -1, 1)^T$, teda aj 2. a 3. stĺpec matice P bude zmenený. Rozklad matice A bude takýto:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{48}$$

Ako sme už spomínali v úlohe 2, je nejednoznačnosť aj v diagonálnej matici. Vlastné číslo 2 môže byť na druhom alebo na treťom diagonálnom mieste. (príslušne sa prehodia aj stĺpce matice P a riadky matice P^{-1}) Pri výbere vlastných vektorov do stĺpcov matice P z viacrozmerného vlastného priestoru nám stačí ich lineárna nezávislosť. *Ak by sme mali namiesto nesymetrickej matice A zadanú symetrick[maticu S , ($S = S^T$), ktorá má aspoň jednu viacnásobnú (k-násobnú) vlastnú hodnotu λ , tak vlastný podpriestor prislúchajúci vlastnej hodnote λ bude mať dimenziu presne k. (pri nesymetrickej matice to bolo najviac k). Ďalej vieme podľa vety V2, že symetrická matica má vlastné vektory, ktoré prislúchajú rôznym vlastným číslam navzájom kolmé. Vieme už, že do stĺpcov matice podobnosti(=prechodu) P za každý jednorozmerný vlastný podpriestor berieme nejaký jeden vlastný vektor, za každý k-rozmerný vlastný podpriestor musíme brať k lineárne nezávislých vlastných vektorov. Často uvažujeme alebo vyžadujeme len ortogonálne transformácie $P^T P = I$ báz a súradníc maticou prechodu P, to sú napr. rotácie v rovine alebo rôzne natočenia v priestore. Matica P musí mať vtedy ortonormované stĺpce.(t.j. ortogonálne(=kolmé) a zároveň s veľkosťou vektora 1). Aby sa nám zachovala kolmosť všetkých stĺpcov v matici P nestačí nám za k-rozmerný vlastný podpriestor vziať len k lineárne nezávislých vlastných vektorov, musíme vziať takých k lineárne nezávislých vl. vektorov, ktoré sú zároveň aj navzájom kolmé. Na ortogonalizáciu týchto k vlastných vektorov môžete (alebo musíte alebo máte) použiť gramm-schmidtov ortogonalizačný proces.*

Príklad č. 5 Diagonalizácia matice s Jordanovými blokmi. (Rovnaké zadanie ako prínkl. č. 2 pre inú maticu A)

Diagonalizujte maticu A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}. \tag{49}$$

Riešenie: *Nie každá nesymetrická reálna matica sa dá diagonalizovať na diagonálny tvar, tak ako sa dali všetky matice doteraz. Uvidíme, že táto matica sa nedá takto diagonalizovať. (Avšak máte jednoduchú pomôcku: Každá reálna symetrická matica a každá matica, ktorá má jednonásobné korene ch. polynómu.(t.j. vlastné čísla) sa dá diagonalizovať. Niektoré iné nesymetrické sa tiež dajú diagonalizovať, viď príklad č.3., ale to je skôr už výnimka. Väčšina nesymetrických matíc sa nedá diagonalizovať v doterajšom zmysle.) Rozširuje sa preto zmysel diagonalizácie aj na nediagonalizovateľné matice, ako je popísané ďalej. Táto diagonalizácia sa nazýva Jordanová diagonalizácia alebo Jordanov rozklad.*

Jordanová diagonalizácia (alebo Jordanov rozklad) je úplne najvšeobecnejšia, pretože zahŕňa všetky doterajšie prípady.
V3:Ku každej (všeobecnej) matici A (reálnej alebo komplexnej) existuje taká regulárna matica P a taká podobná matica J, že $A = PJP^{-1}$, kde J ma takýto tvar.

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & J_3 & \\ & & & \dots \end{pmatrix}. \tag{50}$$

,kde J_i samotné sú tiež štvorcové matice, nazývajú sa Jordanové bloky a majú hocijaký $(d_i >= 1)$ rozmer d_i. Ich tvar je napr. pre $d_i = 4$ takýto:

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \lambda_i & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}. \tag{51}$$

kde λ_i je nejaké vlastné číslo matice A. Hovoríme, že matica J je blokovo diagonálna. Na diagonále má J len vlastné čísla, v "naddiagonálnom"riadku má len čísla 1 alebo 0. Všade inde sú nuly. V rámci jedného Jordanového boku máme jedno vlastné číslo, ale to isté vlastné číslo môže byť aj v iných Jordanových blokoch. Platí veta, že ku každej matici A existuje jediná(až na poradie Jordanových blokov) podobná($P^{-1}AP$) matica J v tvare ako vyššie. O matici J sa hovorí, že je to Jordanov Kanonický Tvar (JKT) matice A, alebo že matica J je v Jordanovom Kanonickom Tvare. Všimnite si, že ak každý Jordanov blok J_i má rozmer 1 tak matica J je diagonálna, teda dostávame predošlé prípady (v predošlých príkladoch). Násobnosť vlastného čísla λ_i ako koreňa charakteristického polynómu je súčet rozmerov všetkých Jordanových buniek v ktorých sa toto vlastné číslo vyskytuje na diagonále. Pri skladaní matice podobnosti(prechodu) P sme doteraz potrebovali $n = dim(V) = dim(A)$ lineárne nezávislých vl. vektorov. Tu však ku každej bunke J_i prislúcha len jeden vlastný vektor v_i a $d_i - 1$ tzv. "zovšeobecnených"vlastných vektorov.Keďže Jordanových blokov je menej ako je rozmer matice J. (To je vtedy ak aspoň jeden Jordanov blok má rozmer aspoň 2) tak vlastných vektorov je tu málo. Preto sa na skladanie matice prechodu P používajú všetky vlastné vektory matice A a zovšeobecnené vl. vektory.
Všimnite si, že matica A zadaná v tomto príklade a matica A zadaná v príklade č. 4 majú takmer všetky elementy rovnaké, okrem dvoch. Tieto dve elementy spôsobia, že vznikne Jordanova bunka. Charakteristický polynóm bude rovnaký ako v 4.príklade, vzhľadom na takmer úplnu zhodnosť matíc. (Preverte si to, keď neveríte. Ja som tú maticu vymýšľal tak, aby to platilo a aby ste videli ten rozdiel.) $\chi(\lambda) = det(A-\lambda I) = (3-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-3)$ Postupujete tu rovnako ako v príklade č.4. Vidíme teda že ak ch. polynómy sú totožné, tak aj násobnosť koreňov charakteristickej rovnice je rovnaká a sú rovnaké aj spektrá dvoch rôznych matíc. Vlastný vektor jednonásobného vlastného čísla (tu je to vl. číslo 2) sa ráta vždy rovnako ako v predošlých prípadoch. Pre tento príklad jednorozmerný vlastný podpriestor, ktorý prislúcha vl. číslu 2 je $[(1, 0, 1)^T]$. Hľadanie vlastných vektorov prislúchajúcich viacnásobnému vlastnému číslu sa bude odlišovať od predošlých prípadov:

$$B_3 = A - 3I = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{52}$$

Vidíme, už teraz, že pre riešenie $v_3 = (r, s, t)$ sústavy $Bv_3 = 0$ bude voľný parameter len jeden (parameter t) a teda vlastný podpriestor bude len jednorozmerný napriek dvojnásobnosti koreňa 3 v charakteristickej rovnici. (Na porovnanie v príklade č.4 sme mali dvojnásobný koreň a až 2 voľné parametre.) Sústava prepísana do nematicového tvaru $r - 1/2t = 0, s = 0$ dáva riešenie $v_3 = t(1/2, 0, 1)$ a príslušný vlastný podpriestor je teda $[(1, 0, 2)^T]$ Všeobecne ak pre k-násobné vlastné číslo dostanete menej ako k voľných parametrov tak vznikne aspoň jeden Jordanov blok s príslušným vlastným číslom (u nás je to 3) s rozmerom aspoň 2. Navyše konkrétne pre tento príklad (vďaka nízkej dimenzii matice A), vieme, že rozmer Jordanovej bunky pre vlastné číslo 3 nemôže byť väčší ako 2, pretože máme ešte jeden jednorozmerný vlastný podpriestor $[(1, 0, 1)^T]$, ktorý prislúcha vlastnému číslu 2 a celý priestor má v tomto príklade rozmer len 3. (súčet všetkých podpriestorov má byť 3). To znamená, že už vieme presne povedať bez ďalšieho rátania ako bude vyzerať matici A podobná matica J v Jordanovom kanonickom Tvare.(Naozaj to vieme len špeciálne pre matice s rozmerom 3 alebo pre dvojnásobné korene, pretože pri väčších rozmeroch matice A jedno vlastné číslo(viacnásobný koreň char. rov) môže byť vo viacerých Jordanových bunkách a nevieme vopred na tomto miesto povedať rozmer každej bunky z nich. To vieme až neskôr.):

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{53}$$

Zostáva určiť maticu prechodu P. Za vlastné číslo 3 hľadáme do matice P ešte jeden vektor u. Niečo podobné, čo sme už skôr robili v príklade číslo 2 urobíme aj tu: Nech $P = (v_1, v_2, u)$, kde v_1 (v tomto príklad $v_1 = (1, 0, 1)^T$ je vlastný vektor ktorý prislúcha vlastnému číslu λ_1 (tu $\lambda_1 = 2$), v_2 (tu $v_2 = (1, 0, 2)^T$) je vlastný vektor ktorý prislúcha vlastnému číslu λ_2 (u nás $\lambda_2 = 3$) a u nech je hľadaný tzv. "zovšeobecnený"vlastný vektor. Z vety vieme, že $A = PJP^{-1}$, teda, že $AP = PJ$, keď rozpíšeme túto rovnosť po stĺpcoch , do nematicové zápisu a vezmeme horeuvedenú maticu J, tak v našom prípade: $(Av_1, Av_2, Au) = AP = PJ = (\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, v_2 + \lambda_2 u)$ Porovnaním prvých dvoch stĺpcov úplne na ľavo a úplne na pravo nedostávame nič nové, ale porovnaním tretích stĺpcov na úplnych koncoch rovnosti dostávame užitočnú rovnosť $Au = v_2 + \lambda_2 u$. Teraz podobne ako v príklade č.2 doplnením jednotkovej matice I na pravú stranu a prehodením na ľavú stranu dostávame:

$$(A - I\lambda_2)u = v_2 \tag{54}$$

Matica λ_2 a pravá strana rovnice v_2 sú už známe, takže sme dostali singulárnu lineárnu sústavu s nenulovou pravou stranou, ktorej riešením je zovšeobecnený vlastný vektor u. Túto singulárnu sústavu vyriešime štandardným spôsobom ako v príklade 1.

$$(B_3|v_2) = (A - 3I|v_2) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right) \backsim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \tag{55}$$

ak hľadáme riešenie v tvare $u = (r, s, t)^T$, berieme voľný parameter t, potom riešenia dostávame v tvare : $u = (1/2, -1, 0)^T + t(1/2, 0, 1)^T$, teda z afinného podpriestoru (pozri príklad 1): $u \in (1/2, -1, 0)^T + [(1, 0, 2)^T]$ Tak ako sme brali ľubovoľný (no najčastejšie pekný) vlastný vektor z vlastného podpriestoru, tak aj tu si vyberieme ľubovoľný zovšeobecnený vlastný vektor u z afinného podpriestoru: Napr. pre parameter t=1, máme $u = (1, -1, 1)^T$ Takže matica P bude

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{56}$$

K matici P nájdeme inverznú P^{-1}, potom jeden rozklad matice $A = PJP^{-1}$ bude

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{57}$$

Iný rozklad matice A dostaneme ak za zovšebecnený vlastný vektor vezmeme len aditívny vektor $u = (1/2, -1, 0)^T$ v afinnom podpriestore (teda položíme t=0):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1/2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{58}$$

Keby rozmer jordanov bloku bol väčší ako 2 ,tak ďalšie zovšeobecnené vektory pre daný blok sa hľadajú riešením singulárnych sústav:

$$(A - \lambda_i I)u_{i,2} = u \tag{59}$$
$$(A - \lambda_i I)u_{i,3} = u_{i,2} \tag{60}$$
$$(A - \lambda_i I)u_{i,4} = u_{i.3} \tag{61}$$

(u už máme nájdené) Teda vždy na pravú stranu dáme zovšeobecnený vlastný vektor nájdeny ako riešenie v predošlej sústave. Ak preznačíme vlastný vektor v_i ako $u_{i,0}$ a vektor u preznačíme ako $u_{i,1}$ a označíme maticu $B_i = A - \lambda_i I$, tak potom hľadanie vektorov do matice P za Jordanov blok J_i je riešenie zreťazených sústav, ktoré riešime postupne:

$$B_i u_{i,0} = 0 \tag{62}$$
$$B_i u_{i,1} = u_{i,0} \tag{63}$$
$$B_i u_{i,2} = u_{i,1} \tag{64}$$
$$\ldots \tag{65}$$

Každý vlastný vektor (ako prvok jednorozmerného alebo viacrozmerného podpriestoru) má z definície tú vlastnosť, že sa zobrazí maticou A do svojho násobku. Lineárny obal $[v_1, v_2, ...v_k]$ vlastných vektorov prislúchajúcich tomu istému vlastnému číslu sme nazvali preto v príklade 2 vlastný podpriestor. Zovšeobecnené vlastné vektory nemajú tu vlastnosť, že sa zobrazia do svojích násobkov. Napriek tomu lineárny obal jedného vlastného vektora a zovšeobecnených vlastných vektorov $U = [u_{i,0}, u_{i,1}, u_{i,2}....u_{i,d_i}]$ (konrétne v tomto príklade $U = [(1, 0, 2)^T, (1, -1, 1)^T])$ prislúchajúcich tomu istému Jordanovému bloku J_i má istú špeciálnu vlastnosť a to takú, že každý vektor z tohto obalu U sa maticou A zobrazí do toho istého obalu U a nikdy nie mimo tohto obalu. (Napr. v tomto príklade vektor $(1, 0, 1)^T$ a jeho násobky sú mimo obalu).Formálne zapísané: $\forall x \in U : Ax \in U$ alebo

$$AU \subset U \tag{66}$$

Definícia:Každý vektorový(=lineárny) podpriestor U, pre ktorý $AU \subset U$ sa nazýva invariantný podpriestor zobrazenia A. Invariantný znamená asi z latinčiny nemenný, tu sa myslí zobrazením nemenný. (No už je tých (pod)priestorov nejako moc, však!:lineárny podpriestor,podpriestor riešení,vlastný podpriestor,afinný podpriestor,invariatný podpriestor) Každý vlastný podpriestor je zrejmé aj invariantný. Dokonca aj každý podpriestor vlastného podpriestora je invariantný. Takže vlastný podpriestor je špeciálny prípad invariantného podpriestora. Za každdú Jordanový blok máme jeden invariatný podpriestor. Celý priestor sa nám rozloží na toľko invariatných podpriestorov, koľko je Jordanových blokov v matici J.(V tomto príklade sú to dva bloky, jeden blok má

rozmer 1x1 a druhý má rozmer 2x2) Poznaním invariatných podpriestorov zobrazenia sa dá lepšie nahliadnuť, čo robí celé zobrazenie maticou A. Správne teda úloha na diagonalizáciu má znieť: nájdite spektrum matice a všetky jej invariantné podpriestory.
Matice na precvičovanie diagonalizácie si môžete vymyšľať aj sami, zvolíte si hocijakú maticu J,zvolite si nejaku regulárnu maticu P, ktorá má aj jednoduchú inverznú maticu P^{-1} a vyrobíte si $A = PJP^{-1}$

Príklad č. 6 Diagonalizácia symetrickej matice s viacrozmerným vlastným podpriestorom.

Príklad č. 7 Diagonalizujte kvadratickú formu $K(x, y, z) = 2x^2 + 4y^2 + 2z^2 - 4xy + 4xz - 2yz$ lagrangeovou a maticovou metódou a nájdite maticu prechodu Riešenie: *Bilineárna forma je:* $B(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \overrightarrow{x}^T B \overrightarrow{x}$ *Kvadratická forma je:* $K(\overrightarrow{x}) = B(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x})$ *Definícia: Hovoríme, že dve matice A,B sú konkgruentné ak existuje taká regulárna (*$det(P) \neq 0$*) matica P, že* $A = PBP^T$*. (Všimnite si rozdiel s definíciou podobnosti z príkladu 2: A,B sú podobné ak existuje taká regulárna matica P,že* $A = PBP^{-1}$*) Diagonalizáciou kvadratickej formy rozumieme nájsť, také P a takú konguentnú diagonálnu maticu D, že* $A = PDP^T$*. Pri tejto diagonalizácii(na rozdiel od "vlastnej"diagonalizácii v príklade č. 5) stále existuje diagonálny tvar.* Lagrangeov rozklad: Príslušný maticový zápis kvadratickej formy je:

$$K(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{67}$$

Príklad č. 8 Nájdite hlavné a vedľajšie poloosi elipsy $x^2 + 2xy + 3y^2 = 1$