Prednáška 2.

Def: Funkcia(zobrazenie) z A do B je relácia z A do B, ktorá je všade definovaná a jednoznačná.

{z každého vrchola množiny A vychádza práve jedna šípka}

Pr1.

A={1,2,3}, B={w,x,y,z}

R_1={(1,w)(2,x)(3,x)}- **funkcia**

R_2={(1,w)(2,x)}- nie je funkcia, pretože nie je všade definovaná

R_3={(1,w)(2,w)(2,x)}- nie je funkcia, lebo nie je jednoznačná a nie je všade definovaná

Označenie: f,g,h,... alebo malé grécke písmená φ

$\mathbf{f_{(x)}}$- obraz bodu x vo funkcii f.

f: A -> B {A - definičný obor funkcie, B – koobor, obor hodnôt}

Pr2.

$f_{(x)}=3x^2+x-1 \quad \forall x\in\mathbb{R} \quad \exists y\in\mathbb{R}$

Veta: Nech R je relácia z množiny A do množiny B, potom R je funkcia, práve vtedy

ak $I_A \le R\circ\overline{R} \ \wedge\ I_B \ge \overline{R}\circ R$.

Pozn.:

$$R\circ\overline{R} \ :\ A\to A$$
$$\overline{R}\circ R \ :\ B\to B$$

Príklady špeciálnych funkcii(zobrazení)

1. **Konštantná funkcia:** $f: A\to B, \quad \exists b\in B \to \forall x\in A\, f(x)=b$
2. **Identické zobrazenie:** $I_A: A\to A, \quad I_A(x)=x$
3. **Postupnosť:** $a_0,a_1,a_2,...$ prvkov z A je funkcia $f:\mathbb{N}\to A, \quad f(i)=a_i$
4. **Usporiadaná n-tica:** $a_0,...a_n$ n prvkov z A je funkcia $f:\{1,..,n\}\to A, \quad f(i)=a_i \quad 1\le i\le n$
5. **Charakteristická funkcia množiny A <=M** $\chi_A: M\to\{0,1\}$ $\chi_A(x) \ =\ x\notin A\to 0 \ \vee\ x\in A\to 1$
6. **Najväčšia celá dolná časť (floor function):** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$ $f(x)=[x]$
7. **Najmenšia celá horná časť(celling function):** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$ $f(x)=najmen\check{s}ie\ cel\acute{e}\ \check{c}\acute{i}slo\ge x$
8. **Funkcia trunc:** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$ *zabúda desatinnú časť čísla*

Vlastnosti funkcii(zobrazení)

Def: Zobrazenie $f: A\to B$ sa nazýva injektívne(prosté) $x_1, x_2\in A, x_1\ne x_2, f(x_1)\ne f(x_2)$

Def: Zobrazenie $f: A \to B$ sa nazýva surjektívne $\forall y \in B \ \exists x \in A \quad f(x) = y$

Pozn: f je injektívna, ak $\overline{f}$ je jednoznačna relacia

f je surjektívna, ak opačná relácia $\overline{f}$ je všade definovaná

Def: Zobrazenie $f: A \to B$ sa nazýva bijektívne(jedno-jednoznačne) ak je injektívne a aj surjektívne.

Pr1.

$$\begin{array}{c} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) = 3x + 7 \end{array}$$ je bijekcia

Pr2.

$$\begin{array}{c} g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ g(x) = x^4 - x \end{array}$$ nie je bijekcia g(0)=$0^4 - 0 = 0$, g(0)=$1^4 - 1 = 0$

Pr3.

A={1,2,3}, B={1,2,3,4,5}

$\mathbb{R}: A \to B, \quad f = \{(1,1),(2,3),(3,4)\} - \textit{funkcia je injektívna, ale nie je surjektívna}$

kolko rôznych $f: A \to B$ vieme nájsť? $\underline{5^3}$.

Def: Ak $f: A \to B$ je funkcia a $A_1 \subseteq A \to f/a_1 A \to B$ je zúženie

funkcia f na množine A_1, ak platí $f/a_1(x) = f(x), \forall x \in A_1$

Pr4.

$$\begin{array}{c} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) = \sin(x) \\ A_1 = [o, \Pi] \quad f/_{[o,\Pi]} [o, \Pi] \to \mathbb{R} \end{array}$$

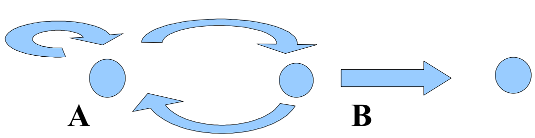
Def: Nech $A_1 \subseteq A, f: A_1 \to B$ *funkcia ak* $g: A \to B$ *je taká, že* $g(x) = f(x) \forall x A_1$ *tak* g sa nazýva **rozšírenie** funkcie f.

Prednáška 3

Relácie na množine: $\begin{array}{c} R \subseteq A \times A \\ A = \mathbb{Z}, \ (k,l) \in R \end{array}$

Pr1.

A = {a,b,c}, R = {(a,a),(a,b),(b,c),(b,a)}



Orientovaný diagram

Def: Nech $R \subseteq A \times A$ R sa nazýva

1. **reflexívna** $\forall a \in A; \ (a,a) \in R$
2. **antireflexívna** $\forall a \in A; \ (a,a) \notin R$

3. **symetrická** $\forall a,b\in A;\ (a,b)\in R\rightarrow(b,a)\in R$
4. **antisymetrická** $\forall a,b\in A;\ [(a,b)\in R\wedge(b,a)\in R]\rightarrow a=b$
5. **asymetrická** $\forall a,b\in A;\ (a,b)\in R\rightarrow(b,a)\notin R$
6. **tranzitívna** $\forall a,b,c\in A;\ [(a,b)\in R\wedge(b,c)\in R]\ \rightarrow\ (a,c)\in R$
7. **trichotomická** $\forall a,b\in A;\ a=b\vee(a,b)\in R\vee(b,a)\in R$

Pr2.

A – množina ľudí

$(\check{c}1,\check{c}2)\in R$

```
č1 je súrodenenec č2
   1. nie
   2. áno
   3. áno
   4. nie
   5. nie
   6. áno
   7. nie
```

Pozn: Všimnite si, že:

1. R je reflexívna,<=> $R\supseteq I_a$
2. R je antireflexívna <=> $R\cap I_a=\{\ \}$
3. R je symetrická <=> $R=\overline{R}$
4. R je antisymetrická <=> $R\cap\overline{R}\subseteq I_a$
5. R je asymetrická <=> $R\cap\overline{R}=\{\ \}$
6. R je tranzitívna<=> $R\supseteq R\circ R$

Def: Binárna relácia R na množine A sa nazýva **<u>ekvivalencia</u>** ak je(naraz): reflexívna, symetrická, tranzitívna.

Pr3. $A=\mathbb{Z};\ (m,n)\in R\quad 4/_{m-n}$

1. Reflexívna $(k,k)\in R$

2. Symetrická $(m,n)\in R\quad 4/_{m-n}\ \rightarrow\ 4/_{n-m}\ \rightarrow\ (m,n)\in R$

3. Tranzitívna $\begin{array}{l}(k,l)\in R\wedge(l,n)\in R\ \rightarrow\ (k,n)\in R\\ \quad 4/_{k-l}\ \wedge\ 4/_{l-n}\ \rightarrow\ 4/_{k-n}\end{array}$

Notácia: E – (ekvivalencia)

$(x,y)\in R;\ (x,y)\in E$

x R y; x E y; x~y; x $\sim_E$ y

Def: Nech E je relácia ekvivalencie na množine A

Potom množina $\{x\in A\ |\ (a,x)\in E\}$ sa nazýva **<u>trieda ekvivalencie prvku a</u>.**

Pr4.

$A=\mathbb{Z}(k,l)\in R\quad 4/_{k,l}$

$[3]_R=\{7,11,15,-1,......\}\subseteq\mathbb{Z}$

$[1]_R=\{5,1,9,-3,......\}\subseteq\mathbb{Z}$

$[7]_R\neq[1]_R=[5]_R$

Lema: nech E je relácia ekvivalencie na A

Potom platí:

1. $\forall a \in A \quad a \in [a]_E$
2. $a E b \equiv [a]_E = [b]_E$
3. pre každé z triedy ekvivalencie platí $[a]_E = [b]_E \vee [a]_E \cap [b]_E = \{\ \}$

Prednáška 4

Nech E je relácia ekvivalencie na A

Trieda ekvivalencie prvku $a \in A$

$[a]_E = \{x \vee (a, x) \in E\} \subseteq A$

Veta: Nech E relácia ekvivalencie na A a nech $x, y \in A$

Potom

1. $x \in [x]_E$
2. $x E y \equiv [x] = [y]$
3. $[x] = [y] \vee [x] \cap [y] = \emptyset$

Dôkaz:

1. vyplýva z reflexívnosti E
2. => Predp., že x E y, nech nejaké $z \in [X]_E \rightarrow z E x \wedge x E y, \quad teda\, z E y \rightarrow z \in [y]_E$

   <= Predp., že $\begin{matrix} [x]_E = [y]_E \\ vieme, že\, x \in [x]_E\, podľa\, a. \rightarrow [x]_E = [y]_E \rightarrow x \in [y]_E \rightarrow x E y \end{matrix}$
3. Sporom:

Predp., že $\begin{matrix} [[x]_E \neq [y]_E \wedge [x] \cap [y] \neq \emptyset] \\ \exists z \in [x]_E \cap [y]_E \rightarrow z \in [x]_E \wedge z \in [y]_E \rightarrow z E x \wedge z E y \rightarrow x E y \rightarrow [x]_E = [y]_E - \boldsymbol{spor!} \end{matrix}$

def:

systém S množín S_i sa nazýva rozklad množiny A, ak

1. $\forall i\, S_i \neq \emptyset$
2. množiny S_i sú po dvojiciach disjunktné
3. $U_{s_i \in S} = A$

Ozn.: Nech E je ekvivalencia na A

Systém tried ekvivalencie označujeme $^A/_E = \{[x]_E \vee x \in A\}$

Veta: Nech E je ekvivalencia na A

Potom $^{A}/_{E}$ - systém tried ekvivalencie na A je rozklad množiny A

Dôkaz: Treba overiť vlastnosti rozkladu

1. neprázdnosť: $\forall x \in A \ [X]_E$ obsahuje aspoň x
2. disjunktívnosť: triedy sú po dvojiciach disjunktné(predchádzajúca veta)
3. $U_{x\in A}[x]_E = A \quad U[x]_E \subseteq A \ \rightarrow \ \forall x \in A \exists [x]_E$

Pr1.

A= {1,2,3,...10} A_1={1,2,..5} A_2 = {6,7,..10}

Def: Nech S je nejaký rozklad možiny A

Relácia E_S na A (ekvivalencia indukovaná rozkladom)

$$E_S = \{(x, y) \in A \times A \vee \exists C \ v \, rozklade \ S \ tak, \ že \ x \in C \wedge y \in C\}$$

Veta: Relácia E_S z predchádzajúcej definície je ekvivalencia na A

Dôkaz:

1. reflexívna $\forall a \in A \exists C \in S$ z vlastnosti
2. symetria
3. tranzitívnosť

$$(x, y) \in E_S \wedge (y, z) \in E_S \rightarrow (\exists C \in S; x, y \in C) \wedge (\exists D \in S; y, z \in D) \rightarrow y \in C \cap D \rightarrow C = D$$

$$x, y, z \in C (x, z) \in E_S \qquad \textit{č.b.t.d.}$$

Vieme $\begin{matrix} E \rightarrow \ ^{A}/_{E} \\ S \rightarrow E_S \end{matrix}$

Veta: Nech E je ekvivalencia na A

Potom $^{A}/_{E}$ je rozklad indukovaný E, E $^{A}/_{E}$ =E

Nech S je rozklad množiny A

Es – ekvivalencia indukovaná rozkladom S. Potom $^{A}/_{E_S}$ =S

ekvivalencia na A = rozklad množiny A

Def: Binárna relácia R na množine A sa nazýva <u>čiastočné usporiadanie množiny A</u>, ak je

a) reflexívna
b) antisymetrická
c) tranzitívna

$\leq$ *na množine* $\mathbb{Z}$ $(\mathbb{Z}, \leq)$

d) *Pr2.:* $\leq$ *na množine* $\mathbb{R}$

$A = ser Z^+ \quad R = / \quad (l, k) \in R \; ^{l}/_{k} \qquad (\mathbb{Z}^+, /)$

Pr3.: $A \neq \emptyset \quad (P(A), \subseteq)$ je to čiastočné usporiadanie?

Prednáška 5

Pr1.:

A{1,2,3,4}

R{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(1,3),(1,4),(2,4)} => a R b ak a | b

Zjednodušený diagram čiastočného diagramu – Hasseho diagram

Ostré usporiadanie

Def: bin relácia R, definovaná na A sa nazýva ostré usporiadanie ak je

1. asymetrická
2. tranzitívna

Veta: (vzťah ostrého a čiastočného usporiadania)

a) Nech R je čiast. usp. množiny A, potom relácia S, ktorú definujeme takto: a S b práve vtedy a R b $a \neq b$ je osté usporiadanie

b) Nech S je ostré usp. množiny A, potom relácia R, ktorú definujeme a R b práve vtedy a S b alebo a = b je čiastočné usp.

Def: Nech $a, b \in A$ sú prvky množiny A

Nech R je relácia čiastočného usporiadania(ostrého) na A

Prvky a,b nazývame porovnateľné v usp. R

ak a R b alebo b R a - nie sú porovnateľné

Def: Usporiadanie R sa nazýva lineárne(úplné) usporiadanie ak každé dva prvky z A sú porovnateľné v usp. R

(A,R) sa nazýva lineárne (úplné) usporiadaná množina

Def: Nech A je čiast. (ostro) usporiadaná množina

Podmnožina $B \subseteq A$ sa nazýva reťazec v A, ak každé dva prvky z B sú porovnateľné.

Def: Nech R je čiast. usporiadanie na A.

nech $B \subseteq A$

a) Prvok $b \in B$ je najmenším prvkom v Bvzhľadom na usp. R, ak $\forall x \in B$ b R x.

b) Prvok $b \in B$ sa nazýva minimálny prvok B vzhľadom na usp. R, ak $\neg \exists x \in B$ také, že x R b

Veta: Nech A je čiast. usp. množina

nech $B \subseteq A$

a) B má nanajvýš jeden najmenší prvok
b) Najmenší prvok (ak existuje) je zároveň aj minimálny
c) Ak B je reťazec, tak minimálny je najmenší.

Veta: podobne pre najväčší a maximálny prvok

Dôkaz:

Sporom predpokl., že máme 2 rôzne najmenšie prvky

$$b_{1,} b_2 \in B$$

$$b_1\ je\ najmenšie \rightarrow b_1 \leq b_2 \quad \wedge \quad b_2\ je\ najmenšie \rightarrow b_1 \geq b_2 \quad \rightarrow b_1 = b_2 \rightarrow SPOR$$

Def: Nech A je čiastočne usp. množina A s usp. R nech $B \subseteq A$.
$a \in A$ sa nazýva <u>dolné ohraničenie</u> množiny B, ak a R x $\forall x \in B$