Príklady k prednáške Matematika 1

Elementárny kalkulus

Ako vhodné príklady sú vybraté typické úlohy. Rôznym modifikáciam, úpravám alebo rozšíreniam sa medze nekladú. Zoznam úloh sa bude postupne doplňať.

Nerovnosti

Úvod. Nerovnosti čísiel (celých, racionálnych alebo reálnych) majú nasledujúce vlastnosti:

• Pre dve rôzne čísla x a y platí buďx a y $x < y$ (x je menšie ako y) alebo $y < x$; vzťah $x < y$ je ekvivalentný vzťahu $y > x$ (y je väčšie ako x).

Čísla sú lineárne usporiadané: Ak $x > y$ a $y > z$ potom $x > z$;

• Ak $x > y$ potom $x + z > y + z$ pre ľubovoľné číslo z.

Ak $x > y$ a $z > 0$ potom $x.z > y.z$; pokiaľ $z < 0$ potom $x.z < y.z$; špeciálne ak $x > y$ vynásobíme -1, dostaneme $-x < -y$.

• Je užitočné znázorňovať čísla ako body na číselnej osi: nakreslíme si (na papieri alebo tabuli, v mysli) priamku a na nej zvolíme počiatok - bod 0, smerom doprava (doľava) v jednotkovej vzdialenosti od počiatku vyznačíme bod $+1$ (-1), dvojkovej vzdialenosti smerom doprava (doľava) vyznačíme bod $+2$ (-2), atď. Body na číselnej osi medzi celými číslami odpovedajú reálnym a racionálnym číslam: ak $x < y$ potom x je naľavo od y.

1) Riešte nerovnosti:

$$8x < 35 + 3x,$$

$$12x - 21 < 27 + 4x,$$

$$5(x-1) > 12 - (17 - 3x),$$

$$7 - 4x < 3 - 2x$$

$$\frac{2x+1}{8} < \frac{3x-4}{3},$$

$$\frac{x+10}{6} + 1 - \frac{x}{4} > \frac{4-5x}{6} - 1$$

.

2) Vyznačte na číselnej osi riešenie sústavy nerovností:

a) $3x + 6 > 0,\ 2 + 3x > 0$,

b) $2x - 3 < 3x - 2,\ 4x - 1 < 2x + 3$,

c) $3x + 5 < x + 1$, $4x - 3 < x + 6$.

Druhá odmocnina $\sqrt{x} \equiv x^{\frac{1}{2}}$, $x \geq 0$, *je definovaná ako nezáporné číslo, pre ktoré platí* $(\sqrt{x})^2 = x$.

3) Riešte nerovnosti s odmocninou. Najprv dokážte: $a > b > 0 \Leftrightarrow a^2 > b^2$.

a) $\sqrt{14} + \sqrt{6} > 2\sqrt{3} + \sqrt{7}$,

b) $\sqrt{14} + \sqrt{5} > \sqrt{11} + \sqrt{7}$,

c) $\sqrt{15} + \sqrt{3} < \sqrt{6} + \sqrt{10}$.

4) Riešte nerovnice (najprv určte definičný obor výrazov)

$$x^2 - 3x + 2 > 0$$

$$\frac{(x-1)(2+x)}{x-3} \geq 0$$

$$\frac{x^2 + x + 1}{x(x^2 - 7x + 3} \leq 0$$

$$2 \sin x + 3 \cos x > 1$$

Návod: Rozložte výraz obsahujúci premennú x na faktory $(x - a)$, urobte tabuľku ich znamienok na relevantných intervaloch a výsledné znamienko výrazu. Nezabudnite na rozdiel medzi ostrými a neostrými nerovnosťami.

Absolútna hodnota čísla $|x|$ *je nezáporné číslo definované takto:* $|x| = x$ *pre* $x \geq 0$ *a* $|x| = -x$ *pre* $x \leq 0$.

5) Ukážte, že $|x| = \max\{x, -x\}$ je ekvivalentné uvedenej definícii.

6) Riešte nerovnosť $|x - a| < b$ a riešenie vyznačte na číselnej osi pre nasledujúce dvojice a a b:

$a = 3,\ b = 1,\quad a = -1,\ b = 1,\quad a = 1,\ b = 2,$

$a = 1,\ b = \frac{1}{10},\quad a = -2,\ b = \frac{1}{2},\quad a = -\frac{1}{2},\ b = \frac{1}{4}.$

7) Riešte nerovnice s absolútnymi hodnotami

$$|x - 2| - |x + 1| \geq 3,$$

$$3|x-1| + |x-2| \leq 7$$

$$|x-7| - |x+2| < 3$$

$$|x-7| + x \geq 1$$

Návod: Najdite nuly absolútnych hodnôt, na intervaloch určených tymito bodmi a $\pm\infty$, potom riešte príslušné nerovnice.

Matematická indukcia.

1. Overovanie formuly $F(n)$ (závislej na prirodzenom čísle n) metódou matematickej indukcie. Úloha sa rieši v dvoch krokoch:

1) Overí sa formula $F(1)$ pre $n = 1$,

2) Za predpokladu, že platí $F(n)$ dokáže sa platnosť $F(n+1)$.

1. Metódou matematickej indukcie overte formuly:

a) $\sum_{k=1}^{n} k^2 \ = \ 1 + 4 + ... + n^2 \ = \ \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$,

b) $\sum_{k=1}^{n} k^3 \ = \ 1 + 9 + ... + n^3 \ = \ \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$,

c) $\sum_{k=1}^{n} 2k - 1 \ = \ 1 + 3 + ... + 2n - 1 \ = \ n^2$,

d) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) \ = \ 1.2 + 2.3 + ... + n.(n+1) \ = \ \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$,

e) $\sum_{k=1}^{n} k(k+2) \ = \ 1.3 + 2.4 + ... + n.(n+2) \ = \ \frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$,

f) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \ = \ \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \ = \ \frac{n+1}{2n+1}$,

g) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 \ = \ 1 + 9 + ... + (2n-1)^2 \ = \ \frac{1}{3}n(4n^2+1)$,

h) $\sum_{k=1}^{n} a + (k-1)d \ = \ a \ + \ a + d + \ ... \ + \ a + (n-1)d \ = \ \frac{n}{2}[2a + (n-1)d$,

i) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) \ = \ 1.2.3 + 2.3.4 + ... + n(n+1)(n+2) \ = \ \frac{1}{4}(n+1)(n+2)(n+3)$,

j) $\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} \ = \ a + ar + ... + ar^{n-1} \ = \ a\frac{r^n - 1}{r - 1}, \ r \neq 1$.

2. Riešte pomocou matametickej indukcie

a) 2 delí $n.(n+3)$

b) 6 delí $n^3 + 11n$

c) 5 delí $2.11^n + 3$

d) 9 delí $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$

e) 31 delí $5^{n+1} + 6^{2n-1}$

3. Dokážte nerovnosti (možno využiť matematickú indukciu, ale nerovnosti sa dajú dokázať aj bez toho):

a) $n! > 2^{n-1}$ pre $n > 2$.

b)

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad \text{pre } n > 1.$$

c)

$$\binom{n}{k} \equiv \frac{n!}{k!(n-k)!} < \frac{n^k}{k!}.\ \text{Určte najprv prípustné hodnoty } n \text{ a } k.$$

*d)

$$2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.\ \text{Použite binomickú vetu a príklady 1) a 3).}$$

*e)

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} < 2.$$

Pre $k > 2$ využite nerovnosť

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

*f)

$$n^{n+1} > (n+1)^n \quad \text{pre } n > 2.$$

*g)

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$

*h) Analyzujte nerovnosť $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$ a potom dokážte matematickou indukciou $|x_1 + x_2 + ... + x_n| \leq |x_1| + x_2| + ... + |x_n| \leq$

*i) Pre $x > 0$ dokážte nerovnosť $(1+x)^n > (1+nx)$.

2. Goniometrické funkcie.

Na základe súčtových vzorcov

$$\sin(x+y) \;=\; \sin x\,\cos y \;+\; \cos x\,\sin y\ ,$$

$$\cos(x+y) \;=\; \cos x\,\cos y \;-\; \sin x\,\sin y\ .$$

pre goniometrické funkcie a ich hodnôt v bodoch $x = 0$ a $x = \frac{\pi}{2}$

$$\sin 0 \;=\; 0\ ,\ \sin\frac{\pi}{2} \;=\; 1\ ,$$

$$\cos 0 \;=\; 1\ ,\ \cos\frac{\pi}{2} \;=\; 0\ .$$

možno ľahko odvodiť rozmanité vzorčeky pre goniometrické funkcie.

Dokážte nasledujúce formuly pre funkcie $\sin x$ a $\cos x$:

1) $\sin 2x \;=\; 2\sin x\cos x$, $\sin^2 x + \cos^2 x \;=\; 1$,
$\cos 2x \;=\; \cos^2 x - \sin^2 x \;=\; 2\cos^2 x - 1 \;=\; 1 - 2\sin^2 x$.

2) $\sin\pi \;=\; 0\ ,\ \cos\pi \;=\; -1$,
$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x\ ,\ \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$,
$\sin(x+\pi) \;=\; -\sin x\ ,\ \cos(x+\pi) \;=\; -\cos x$.

Ukážte, že z posledných dvoch vzťahov vyplýva periodičnosť goniometrických funkcií: $\sin(x+2\pi) = \sin x$, $\cos(x+\pi) = \cos x$.

3) Dokkážte vzťahy

$$|\sin\frac{x}{2}| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}\ ,\ |\cos\frac{x}{2}| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\ .$$

Goniometrické funkcie $tg\, x$ *a* $cotg\, x$ *sú definované vzťahmi:*

$$tg\, x = \frac{\sin x}{\cos x}\ ,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\ ,$$

$$cotg\, x = \frac{\cos x}{\sin x}\ ,\ x \neq k\pi\ .$$

(miesto $tg\, x$ *a* $cotg\, x$ *používa sa tiež značenie* $\tan x$ *resp.* $\cot x$*).*

4) Vysvetlite pôvod definičných oborov pre funkcie $\mathrm{tg}\, x$ a $\mathrm{cotg}\, x$.

5) Odvoďte vzorce

$$\mathrm{tg}\, 2x = \frac{2\mathrm{tg}\, x}{1-\mathrm{tg}^2\, x}\ ,$$

$$\mathrm{cotg}\, 2x = \frac{1}{2}(\mathrm{cotg}\, x - \mathrm{tg}\, x)\ ,$$

$$|\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\ .$$

5) Dokážte periodičnosť:

$$\mathrm{tg}\,(x+\pi) = \mathrm{tg}\, x\ ,\ \mathrm{cotg}\,(x+\pi) = \mathrm{cotg}\, x\ .$$

Limity postupností, rady.

Limity postupností

1. Vypočítajte limity

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n+4}{n^2}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+n+1}{n^2+1}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n+4}{n^3}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+3}$ f) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1})$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+1} - n)$ h) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n+1} - n)$

2. Ukážte, že

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{3^n} = 0$

(Najprv dokážte, že $\frac{n}{3^n} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ **pre všetky** n.**)**

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$

3. Dokážte, že pre prirodzené číslo $k > 0$ **platí**

a) $\lim\limits_{n\to\infty} n^k = +\infty$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-k} = 0$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^k} = 0$

4. Dokážte, že platí

a)

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{array}{ll} +\infty & \textbf{pre } a > 1, \\ 1 & \textbf{pre } a = 1, \\ 0 & \textbf{pre } 0 < a < 1. \end{array}$$

* b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ **pre** $a > 0$

5. Nájdite zo známej hodoty $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$ **tieto limity**

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{n^2-1}{n^2+1})^{n^2}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{k}{n})^n$, k**-prirodzené, ale aj reálne kladné číslo**

c) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n$, $\qquad\qquad \lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{k}{n})^n$

(Návod: $(1-\frac{1}{n}) = (\frac{1-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}})$.**)**

6. Dokážte odhady

a) $n! > 2^{n-1}$ **pre** $n > 2$

b) $n! < k!\,n^{n-k}$

c) Pre $x > 0$ **platí**

$(1+x)^n > 1+nx, \qquad (1+x)^n > nx, \qquad (1+x)^n > \frac{n(n-1)}{2}x^2$

(Použite binomickú vetu.)

7. Aplikácie odhadov

a) Položme $\sqrt[n]{2} = 1+\omega_n$. **Dokážte, že** $\omega_n < \frac{1}{n}$.

b) Položme $\sqrt[n]{n} = 1+\omega_n$, $n > 1$. **Dokážte, že** $\omega_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$, $n > 1$.

8. Vypočítajte limity

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8n^2+1}{5n^2-1}$, $\qquad$ **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n-1}-\sqrt{n})$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{\sqrt{3n^2+5}}$, $\qquad$ **d)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\ldots+n}{n^2}$.