Pokus o riešenia úloh z diskrétnej matiky

(prvý semester)

(c) Mišo Forišek 1999

Kombinatorika

Papier začínajúci "Nech m,n sú celé…"

1. Každá taká cesta zodpovedá postupnosti núl a jednotiek, v ktorej je práve m núl. Takých postupností je ale zjavne $\binom{m+n}{n}$
2. Každá matica $m \times n$ požadovaného tvaru je jednoznačne určená svojou podmaticou $(m-1) \times (n-1)$, lebo zvyšné čísla sa dajú jednoznačne určiť. Preto všetkých matíc požadovaného tvaru je $2^{(m-1)(n-1)}$.
3. Matický alebo fyzikálny navštevuje $35 - 10 = 25$ ľudí, keďže 20 matický, 11 fyzikálny, tak oba navštevuje $20 + 11 - 25 = 6$ ľudí. A teda iba matický $20 - 6 = 14$ ľudí.
4. Špeciálny prípad 5.
5. Kombinatorickou úvahou: Koľkými spôsobmi môžme vybrať k objektov spomedzi $m+n$ rôznych ? $\binom{m+n}{k}$. Ale keď si objekty rozdelíme na 2 kôpky, na jednej m, na druhej n, tak z jednej vyberieme i $\binom{n}{i}$ spôsobmi, z druhej $(k-i)$ $\binom{m}{k-i}$ spôsobmi, toto zrátame cez $\forall i$, mame sumu na ľavej strane, q.e.d.

5'. Indukciou podľa q.
Pre $q = 1$ je $\binom{n}{m} = \binom{n}{m}$, čo dosť očividne platí. Teraz nech $\sum \binom{n_1}{m_1} \cdot \binom{n_2}{m_2} \cdot \ldots \cdot \binom{n_q}{m_q} = \binom{n_1+\ldots+n_q}{m}$ Dokážme, že to platí aj pre $q+1$. Je:

$$\sum_{m_1+\ldots+m_{q+1}=m} \prod_{i=1}^{q+1} \binom{n_i}{m_i} = \sum_{m_1+\ldots+m_{q+1}=m} \binom{n_{q+1}}{m_{q+1}} \cdot \prod_{i=1}^{q} \binom{n_i}{m_i} =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \left(\binom{n_{q+1}}{k} \cdot \sum_{m_1+\ldots+m_{q+1}=m-k} \prod_{i=1}^{q} \binom{n_i}{m_i} \right) = (\text{podľaind.predp.}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \left(\binom{n_{q+1}}{k} \cdot \binom{n_1+\ldots+n_q}{m-k} \right) = (\text{podľa úl. 5.}) = \binom{n_1+\ldots+n_{q+1}}{m}$$

čo bolo treba dokázať. Ešte pre tých, čo sa zdesia už pri pohľade na tú sumu v zadaní - ide o súčet CEZ VŠETKY q-tice $(m_1, \ldots, m_q)$, ktoré spĺňajú podmienky zo zadania. Ide vlastne o to isté ako v 5. - keď máme vybrať m predmetov spomedzi $n_1 + \ldots + n_q$, tak si ich rozdelíme na q

kôpok, na prvú dáme n_1, atď., no a teraz môžme tých m vybrať len tak, že z 1. kôpky vezmeme m_1, atď, pričom m_i musia spĺňať podmienky pod sumou. Aj toto je korektný dôkaz (komb. úvahou), len neviem, nakoľko ho bude E.T. ochotný zožrať.

6. a) V každom stĺpci je jedna, pre tú v prvom máme n možností, pre druhú $(n-1)$, ... takže spolu $n!$.
   b) Pre prvú máme n^2 možností, pre druhú $(n-1)^2$, lebo 1 riadok a 1 stĺpec sú obsadené, ... takže spolu $n^2.(n-1)^2.\cdots.1^2 = (n!)^2$.
   c) Analogicky, vyjde $\prod_{i=0}^{n-1}(m-i)$, resp. to celé na druhú, pre $m < n$ to je zjavne 0 (v súčine je nulový člen), takže to funguje aj pre ne.

7. Jednoduché, len pracné. Pre istotu hodnoty sedmových karát : $D = 2, H = 3, K = 4, 7 = 7, 8 = 8, 9 = 9$, $10 = 10, A = 11$. A je $21 = 11 + 8 + 2 = 11 + 7 + 3 = 10 + 9 + 2 = 10 + 8 + 3 = 10 + 7 + 4 = 9 + 8 + 4$, v každom z týchto prípadov $4^3 = 64$ možností, $\ldots = 9 + 9 + 3$, to je $\binom{4}{2} \cdot 4 = 24$ možností, $\ldots = 7+7+7$, to je $\binom{4}{3} = 4$ možnosti, spolu $6.64+24+4 = 412$ možností.

8. A a B majú dokopy 18 kníh. Tie spomedzi 27 vyberieme $\binom{27}{18}$ spôsobmi. Medzi A a B ich rozdelíme 2^{18} spôsobmi, lebo každú môžeme dať A alebo B. Tým je už určené aj čo dostane C. Preto spolu to je $\binom{27}{18} \cdot 2^{18}$ možností.

9. N mužov usadíme $(n-1)!$ spôsobmi - prvého posadíme kamkoľvek, ostatných polohu už určujeme podľa neho, idú len na 'nepárne' miesta. Potom rozsadíme ženy na zvyšné miesta $n!$ spôsobmi, spolu $n!(n-1)!$ spôsobov.

10. Postupne vyberajme, ktoré guličky dáme do $1., 2., \ldots, k.$ škatule. Do prvej máme pre 1. guličku n možností, pre 2. $(n-1)$ možností, ..., pre n_1 $n - n_1 + 1$ možností. Pre prvú guličku z ďalšej krabice máme $n - n_1$ možností, atď. Takže dokopy by to bolo $n!$ možností, ale v rámci každej krabice sme zarátali $\forall$ usporiadania guličiek, ktorých je pre i. krabicu $n_i!$. Takže všetkých rozdelení je $\frac{n!}{n_1!.n_2!.\cdots.n_k!}$

11. Keďže guličky sú rovnaké, môžme prvých s škatúľ naplniť hneď na začiatku, ostane nám $k = n - \sum a_i$ guličiek a $l = m - s$ krabíc, to je ekvivalentné s počtom riešení rovnice $x_1 + ... + x_l = k \wedge x_i \geq 0$. Takže máme $\binom{k+l-1}{k}$ možností.

12. Na začiatku podávame guličky tam, kam treba, ostane nám $k = n - \sum a_i$ guličiek, ktoré máme ľubovoľne rozmiestniť do m krabíc, to ide $\binom{m+k-1}{k}$ spôsobmi.

13. Predstavme si n objektov v rade. Medzi nimi je $n-1$ medzier. Keď do $k-1$ z nich dáme priehradku, rozpadne sa nám to na k častí, ktoré určujú nejaký usporiadaný rozklad. Zjavne keď dáme priehradky na iné miesta, dostaneme rôzne rozklady. Naopak, každému rozkladu vieme nájsť príslušné rozdelenie priehradok. Preto je rozdelení priehradok a usp. rozkladov rovnako, teda $\binom{n-1}{k-1}$.

14. Koľko čísel od 1 po n je deliteľných p? $\lfloor \frac{n}{p} \rfloor$. Všetkých súčinov je n^k, tých, ktoré nie sú deliteľné p, je $(n - \lfloor \frac{n}{p} \rfloor)^k$, takže zvyšné sú deliteľné p.

15. Z binomickej vety pre $(1+1)^n$.

16. Rozoberieme 6 prípadov podľa toho, koľko žien vyberieme spomedzi známych muža. (potom je jasné, koľko vyberáme ostatných). Mlčky treba predpokladať, že muž a žena nemajú spoločných známych :-)

17. Pre prvého 8 možností, pre druhého 7, atď., každé rozostavenie sme zarátali 8×, preto je to 7!.

18. Keď tých 5 kníh vyberieme, ostatné sa tým rozdelia na 6 častí, z ktorých stredné 4 sú neprázdne. Máme teda zistiť, koľko má riešení rovnica $x_1 + \ldots + x_6 = 12 - 7 = 5$ za podmienok $x_1, x_6 \geq 0 \wedge x_2, \ldots, x_5 > 0$. To je ekvivalentné s rovnicou $x_1 + \ldots + x_6 = 9 \wedge x_i > 0$ o ktorej vieme, že má $\binom{8}{5} = \frac{8.7.6}{3.2.1} = 56$ riešení.

19. a) Buď sú obe čísla párne, alebo obe nepárne, v oboch prípadoch máme $\binom{15}{2}$ možností, spolu $15.14 = 210$ možností.
    b) Buď dávajú všetky tri rovnaký zvyšok po delení 3, to sú 3 prípady, v každom $\binom{10}{3}$ možností, alebo dve z nich dávajú rôzny. Rozobratím prípadov zistíme, že jediná možnosť je tá, že jedno dáva zvyšok 0, jedno 1 a jedno 2, tu je teda 10^3 možností, spolu $3.\binom{10}{3} + 10^3 = 1360$ možností.

20. Pre Joža a Ďura sú len 3 možnosti – buď ide Jožo 5., alebo 6., alebo 7., v jednotlivých prípadoch ide Ďuro 4., 5. alebo 6. Pre Jana máme zakaždým 5 možností, kedy môže ísť. Preto dokopy môžu ísť na skúške $3.5 = 15$ spôsobmi. (A ôsmimi spôsobmi na nej dopadnúť :)

Papier začínajúci "Nájdite súčet všetkých…"

21. Takých čísel je 24, 6 má na mieste jednotiek 1, 6 má 2, atď., analogicky na mieste desiatok a stoviek, preto ich súčet je $(100+10+1).(6.1+6.2+6.3+6.4) = 6660$.

22. Všetkých $\triangle$ je $\binom{n}{3}$. Z nich nevyhovujú tie, ktoré majú niektoré dva vrcholy susedné. Tých je $n.(n-2)$, lebo susednú dvojicu vyberieme n spôsobmi, zvyšný vrchol $n-2$ spôsobmi. Tu sme ale dvakrát zarátali všetky tie, ktoré majú všetky tri vrcholy idúce po sebe. Takých je zjavne n. Takže výsledný počet je $\binom{n}{3} - n(n-2) + n$, pre $n = 3$ treba povedať, že je to 0, lebo tam vzniká chaos pri rátaní…

23. Označme strany a,b,c tak, aby $a \leq b \leq c$. Potom z $\triangle$ nerovnosti $\Rightarrow c < \frac{40}{2} = 20$, zároveň z $a \leq b \leq c \Rightarrow$, že $40 = a+b+c \leq c+c+c = 3.c \Rightarrow c \geq \frac{40}{3}$, pre každú možnosť vieme nájsť max. a min. hodnotu b, (lebo $b \leq c \wedge 40 - c = a + b \leq 2.b$), každej zodpovedá 1 hodnota a, zrátame, hotovo.

24. Spomedzi $000\dots999$ začína jednotkou 100, zo zvyšných má na 2. mieste jednotku $9.10 = 90$, zo zvyšných má na 3. mieste jednotku $9.9 = 81$ a navyše ostala $1000 \Rightarrow 1$ obsahuje $100 + 90 + 81 + 1 = 272$ čísel.

25. Súčet všetkých koeficientov dostaneme na pravej strane, keď za všetky a_i dosadíme 1. Vtedy ale ľavá strana je k^n.

26. Platí : k-ty člen je $\binom{100}{k}.(\sqrt{2})^k.(\sqrt[4]{3})^{100-k}$. Ľahko ukážeme, že toto číslo je rac. práve vtedy, keď sú rac. $(\sqrt{2})^k$ a $(\sqrt[4]{3})^{100-k}$. A to je zasa vtedy, keď $2|k \wedge 4|(100-k)$. Preto je racionálnych členov 26.

27. Cez $k.\binom{n}{k} = n.\binom{n-1}{k-1}$ a $(1-1)^{n-1}$.

28-29. Asi cez 25.

30. Platí $1^n = (\frac{1+x}{2}+\frac{1-x}{2})^n = (\frac{1+x}{2})^n+(\frac{1-x}{2})^n+\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i}\cdot(\frac{1+x}{2})^i\cdot(\frac{1-x}{2})^{n-i} \geq (\frac{1+x}{2})^n + (\frac{1-x}{2})^n$, z čoho vynásobením 2^n máme dokaz. nerovnosť.

31. To je na samostatný papier…

32. Platí $\binom{m}{k}\binom{m-k}{n-k} = \frac{m!.(m-k)!}{k!.(m-k)!.(m-n)!.(n-k)!} = \frac{m!}{k!.(n-k)!.(m-n)!} = \frac{m!.n!}{n!.(m-n)!.k!.(n-k)!} = \binom{m}{n}\binom{n}{k}$, konštantu $\binom{m}{n}$ vyberieme pred sumu a ostane nám zjavná 0.

33-34. Pre $m = 2 \wedge n = 1$ je to 3, takže neplatí ani 1 z tých rovností…

35. Športujú 15 chlapci s dobrým prospechom, t.j. 3 so zlým. Športuje 11 žiakov so zlým prospechom, preto športuje 8 dievčat so zlým prospechom. Dievčat so zlým prospechom je však len 6, preto je v správe chyba.

36. Je ich $n - \varphi(n) = 210 - 210 \cdot (1-\frac{1}{2}) \cdot (1-\frac{1}{3}) \cdot (1-\frac{1}{5}) \cdot (1-\frac{1}{7}) = 210 - 210 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} = 210 - 48 = 162$.

37. Koľko je del. 2 ? $\lfloor\frac{100}{2}\rfloor = 50$. Analogicky tromi je del. 33, piatimi 20. Koľko nie je deliteľné 2, 3 ani 5 ? $100 - 50 - 33 - 20 = -3$??? Nie, lebo sme $2x$ odrátali tie, ktoré sú del. dvomi z nich a $3x$ tie, čo sú del. všetkými tromi. Tie ešte musíme prirátať. 2 a 3, teda 6 je del. 16, 2 a 5 10, 3 a 5 6, tie prirátame, máme $-3+16+10+6 = 29$, ale opäť sme $3x$ prirátali tie, čo sú del. všetkým, ešte ich na záver musíme odrátať, sú 3, takže spomedzi čísel $1\dots100$ ich $29 - 3 = 26$ nie je del. 2, 3 ani 5. Práve (trochu ťažkopádne a rozsiahlo, ale to len kvôli zrozumiteľnosti) použitý princíp sa volá princíp zapojenia a vypojenia, alebo noblesnejšie princíp inklúzie a exklúzie.

38. Je $\binom{n-1}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n+m-1}{m} = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n+m-1}{m} = \binom{n+1}{1}+\ldots+\binom{n+m-1}{m} = \ldots = \binom{n+m-1}{m-1}+\binom{n+m-1}{m} = \binom{n+m}{m}$. Alebo indukciou podľa m.

39. Cez $i.\binom{n}{i} = i \cdot \frac{n!}{i!.(n-i)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(i-1)!.(n-i)!} = n.\binom{n-1}{i-1}$, pre 0 je $i.\binom{n}{i} = 0$, takže tento člen môžme vynechať.

40. - Bez kombinatorickej úvahy : z binomickej vety pre $((m-1)+1)^n$ s využitím $\binom{m+n}{m} = \binom{m+n}{n}$.

- Komb. úvahou : Vyberajme n prvkov spomedzi m, záleží na poradí, môžu sa opakovať. Koľko je takých, v ktorých je k jedničiek ? $\binom{n}{k} \cdot (m-1)^{n-k}$, keď to zrátame cez všetky k, dostaneme počet variácii s opak. n. triedy z m prvkov, ktorých je m^n.

41. Prienik každej s povrchom gule je rovníková kružnica (t.j. kružnica s rovnakým polomerom ako guľa). Zo zadania $\Rightarrow$, že žiadne 3 kružnice nemajú spoločný bod. Keď máme jednu kružnicu, tá delí povrch na 2 časti. Nech n kružníc delí povrch na $P(n)$ častí, na koľko ho môže deliť $n+1$ kružníc ? Keď pridáme $(n+1)$. kružnicu, tá pretne už exist. n v $2n$ bodoch. Tie ju rozdelia na $2n$ úsekov. Každý z týchto úsekov rozdelí jednu z už existujúcich častí na 2. Teda pribudlo presne $2n$ častí, čiže ich je $P(n)+2n$. Teraz už nie je až také ťažké spočítať/uhádnuť a dokázať indukciou vzorec $P(n) = n.(n-1)+2 = n^2-n+2$.

42. Položíme $n = r+m$, máme 38.

43. Pre $k < \frac{n-1}{2}$ je $\binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)!.(n-k-1)!} = \frac{n!}{k!.(n-k)!} \cdot \frac{n-k}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1} > \binom{n}{k}$, druhá nerovnosť analogicky.

Papier začínajúci "Nájdite maximum spomedzi…"

44. Z 43. vyplýva, že je to $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

45. $\binom{p}{k}$ je celé, platí $\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!.(p-k)!}$, p delí čitateľa, nedelí menovateľa, z toho vyplýva, že delí $\binom{p}{k}$.

46. Prenásobíme $n+1$ a použijeme $\frac{a}{b} \cdot \binom{a-1}{b-1} = \binom{a}{b}$ a binomickú vetu pre $(1+1)^a$.

47. Triviálna indukcia

48. Indukciou cez vzorec $1+\ldots+n = \frac{n.(n+1)}{2}$.

49. Je $\frac{1}{(a+i-1)(a+i)} = \frac{1}{a+i-1} - \frac{1}{a+i}$, preto cela suma vyzerá $\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+2} + \cdots - \frac{1}{a+n}$ z čoho sa nám vymlátia dvojice, ostane $\frac{1}{a} - \frac{1}{a+n} = \frac{(a+n)-a}{a(a+n)} = \frac{n}{a(a+n)}$

50. O5 trápna indukcia podľa n.

51-52. Indukcia až to bolí…

53. Indukcia. 2. krok je :

$$\prod_{i=1}^{n+1}(n+1+i) = \frac{(2n+2)(2n+1)}{n+1} \cdot \prod_{i=1}^{n}(n+i) = 2.(2n+1).2^n.\prod_{i=1}^{n}(2i-1) =$$

$$= 2^{n+1}.\prod_{i=1}^{n+1}(2i-1)$$

Papier začínajúci "Ak A, B sú konečné…"

54. Pre každý z m prvkov máme n možností, na čo ho zobraziť…

55. Pre prvý máme n možností, pre druhý $n-1$, …

56-57. Priamo dosadíme do 55.

58. Ten hrozný súčin je maskované $\binom{n}{k}$.

59. A toto je maskované $\sum\binom{n}{i} = 2^n$.

60. a) Z definície.
    b) Z a).
    c) Z definície.
    d) Viď 5.
    e) Z a)
    f) Inými slovami dokážte binomickú vetu. Napr. indukciou.
    g) Z f) pre $x = -1$.
    h) Viď 32.

61-63. Sú riešené na papieroch, čo sme fasovali…

Papier začínajúci "Nech $k, n_1, \ldots, n_k$ …"

64. Riešené na papieri, čo sme dostali.

65. Vyplýva z 64., len to ešte treba predeliť všetkými usporiadaniami tých k podmnožín (keďže na ich poradí nám nezáleží), ktorých je $k!$.

66. (1) Viď 39.
    (2) Analogicky ako (1).
    (3) $\sum(2k+1)\binom{n}{k} = 2.\sum k\binom{n}{k} + \sum\binom{n}{k}$
    (4) Viď 46.
    (5) Presne na to isté kopyto ako (4).
    (6) Indukciou.

$$1 + \cdots + \frac{1}{n+1} = (1 + \cdots + \frac{1}{n}) + \frac{1}{n+1} = (\text{z IP a podúlohy (5)}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\cdot\frac{1}{k}\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\cdot\frac{1}{k}\binom{n}{k} +$$

$$+\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}\binom{n}{k-1} = \frac{(-1)^n}{n+1}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right) =$$

$$= \frac{(-1)^n}{n+1}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}\binom{n+1}{k} = \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}\binom{n+1}{k}$$

(7) Cez $(1+1)^n$ a $(1-1)^n$, v jednom prípade sa to sčíta, v druhom odčíta.

(8) Cez vhodný súčet, resp. rozdiel výrazov $(1+1)^n$, $(1-1)^n$, $(1+i)^n$ a $(1-i)^n$ (treba zvoliť znamienka tak, aby ostali len správne členy).

Dve chuťovky na záver kombinatoriky…

Úloha 31.

Taká úplne nenápadná úloha, skrytá v dave, ale teda tyč na pohľadanie. Položme si najskôr otázku, koľko je permutácii, kde nič nie je na svojom mieste (t.j. špec. prípad $r = 0$). Označme tento počet $P(n)$. Je $P(1) = 0$, $P(2) = 1$. Koľko je $P(n)$? Ak je 1 prehodená s nejakým iným prvkom (t.j. 1 je k-ta a k je prvé), tak máme pre zvyšné prvky P(n-2) možností, zároveň (n-1) možností, ktorý prvok je k. Ak 1 nie je prehodená s inou, keď ju vymeníme s tým, čo je na 1. mieste, na zvyšných $n-1$ miestach dostaneme prehádzanú $(n-1)$-ticu, zakaždým sme mali $n-1$ možností, kde mohla 1 pôvodne byť. Spolu teda máme $P(n) = (n-1).(P(n-1) + P(n-2))$. To je síce pekné, a pre naše účely aj poučné, ale aj na pažu.

Potrebovali by sme explicitný vzorec. (t.j. taký, do ktorého sa dá priamo dosadiť.) Na to použijeme zaužívané kombinatorické delo, ktoré sme síce nemali tú česť preberať, ale príklady naň dá E.T. na skúške ako vidieť s radosťou. Princíp inklúzie a exklúzie. Ten v takom Tomanovskom množinovom zápise vyzerá :

Majme množiny $M_1,\dots,M_n$, potom $|\bigcup M_i| = \sum |M_i| - \sum_{i\neq j}|M_i\cap M_j| + \ldots =$

$$\sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k-1}\cdot\sum_{i_1<\ldots<i_k}\left|\bigcap_{j=1}^{k}M_{i_j}\right|\right)$$

Čo vlastne znamená toľkoto : koľko prvkov má prienik n množin ? To je počet prvkov prvej + … + počet prvkov n., ale 2-krát sme zarátali každý prvok, ktorý je v dvoch z nich, takže odrátame prieniky všetkých dvojíc množín. Prvky, ktoré sú v troch sme $\binom{3}{1}$-krát prirátali, $\binom{3}{2}$-krát odrátali, takže vôbec nie sú zarátané, musíme ich prirátať, atď. (Toto nie je dôkaz, len také intuitívne zdôvodnenie, čo to hovorí a prečo to funguje.)

No a ako to použijeme v našom prípade ? Nech M_i je množina všetkých permutácií, ktoré majú na i-tom mieste i. Čo je zjednotenie týchto množín ? To sú práve všetky nevyhovujúce permutácie. No a keď si ešte uvedomíme, že M_i má $(n-1)!$ prvkov, $\bigcap_{j=1}^{k}M_{i_j}$ je množina všetkých permutácií, ktoré majú k miest pevne určených, má teda $(n-k)!$ prvkov. S tým už môžme rátať:

$$P(n) = n! - \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k-1}\cdot\sum_{i_1<\ldots<i_k}\left|\bigcap_{j=1}^{k}M_{i_j}\right|\right) =$$

$$= n! + \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^k \cdot \binom{n}{k} \cdot (n-k)! \right) = \sum_{k=0}^{n} \left((-1)^k \cdot \binom{n}{k} \cdot (n-k)! \right)$$

Možno sa teraz zlomyseľne pýtate, načo vlastne bola tá prvá úvaha. Jednoducho - ak by E.T. nechcel zožrať inklúziu a exklúziu bez dôkazu, tak sa naňho vytiahnu vzťahy z prvej úvahy, povie sa tento vzorec a indukciou podľa n sa dokáže, že vyhovuje tomu vzťahu a keďže tým je $P(n)$ jednoznačne určené, je to vlastne dôkaz toho vzťahu.
No a koľko je permutácií s práve r prvkami na svojom mieste ? Prvky na svojich miestach vyberieme $\binom{n}{r}$ spôsobmi, zvyšné tvoria prehádzanú permutáciu s $n-r$ prvkami, takže je to $\binom{n}{r} \cdot \sum_{k=0}^{n-r} \left((-1)^k \binom{n-r}{k} (n-r-k)!\right)$

No a keď už sme takí rozbehnutí, tak rovno chuťovka číslo dva. (dve ? jednoducho 2 !)

Angličania a Francúzi.
Pre tých, čo nevedia, o čom je reč: máme n Angličanov, m Francúzov. Koľkými spôsobmi ich možno postaviť do radu tak, aby každý mal vedľa seba aspoň jedného krajana ?
Zabudnime najskôr na to, že Angláni aj Francúzi sú individuality, teda každý iný, ešte sa aj nejako volajú, zaujímajme sa o nich najskôr ako o farebné guličky. Koľkými spôsobmi rozdelíme Angličanov na k skupín tak, aby v každej boli aspoň dvaja ? To je ekvivalentné s rovnicou $a_1 + \ldots + a_k = n \wedge \forall i; a_i \geq 2$, čo je zase ekviv. s $a'_1 + \ldots + a'_k = n - k \wedge \forall i; a'_i = a_i - 1 \geq 1$, o ktorej vieme, že má $\binom{n-k-1}{k-1}$ riešení. A ako medzi nich narvať m Francúzov ? Tí musia byť v každej medzere, teda ich skupín musí byť aspoň $k-1$, ale zároveň ich môže byť najviac $n+1$, lebo už môžu pribudnúť len dve skupiny – na začiatku a na konci. Ak máme $k-1$ skupín Francúzov, na to máme analogicky $\binom{m-k}{k-2}$ možností a je jasné, ako ich tam postavíme. Podobne ak je Francúzov $k+1$ skupín, na to máme $\binom{m-k-2}{k}$ možností a opäť je jediná možnosť, ako ich tam postaviť. Ak ich je k skupín, možností je $\binom{m-k-1}{k-1}$, a postaviť ich tam môžme dvomi spôsobmi – buď je jedna skupina na začiatku, alebo je jedna na konci. Dokopy to pre KAŽDÉ rozostavenie k skupín Angličanov dáva $\binom{m-k}{k-2} + 2 \cdot \binom{m-k-1}{k-1} + \binom{m-k-2}{k}$ vyhovujúcich rozostavení. No a hľadaný počet by bol potom súčet tohto cez všetky k, teda:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \binom{n-k-1}{k-1} \cdot \left(\binom{m-k}{k-2} + 2 \cdot \binom{m-k-1}{k-1} + \binom{m-k-2}{k} \right)$$

To ale ešte stále vyzerá divne kvôli tej sume do ∞ a ešte sme nezarátali rozlíšiteľnosť ľudí. Keď ale máme nejaké usporiadanie, kde máme povedané, kde stoja Angličania a kde Francúzi, tak konkrétnych ľudí naň môžme postaviť $n!.m!$ spôsobmi – Angličanov rozmiestnime na ich miesta $n!$ spôsobmi a Francúzov na ich miesta následne $m!$ spôsobmi. No a z tej sumy je nenulových len prvých $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ členov, lebo pre $k > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ je $k-1 > n-k-1$, teda $\binom{n-k-1}{k-1} = 0$, čiže aj celý sčítanec je 0. Výsledok úlohy teda je:

$$n!.m!.\sum_{k=1}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n-k-1}{k-1}\cdot\left(\binom{m-k}{k-2}+2\cdot\binom{m-k-1}{k-1}+\binom{m-k-2}{k}\right)$$

Množiny & co.

Vybrané z 3 papierov U.x.yy

U-2-20. $\Rightarrow$: Nepriamo. Nech $A \not\subseteq C$. Potom $\exists x; x \in A \wedge x \notin C$. Potom ale $x \in (A \cup (B \cap C)) \ \wedge \ x \notin ((A \cup B) \cap C)$.

$\Leftarrow$: Nech $A \subseteq C$. Potom ak $x \in A$, tak $x \in$ do oboch množín, ak $x \notin A$, tak $x \in (A \cup (B \cap C)) \Leftrightarrow x \in (B \cap C) \Leftrightarrow x \in B \wedge x \in C \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge x \in C \Leftrightarrow x \in ((A \cup B) \cap C)$

U-2-22. Sporom. Nech $A \neq B$. Potom BUNV $\exists x; x \in A \wedge x \notin B$. Preto $x \in B \cup X \Rightarrow x \in A \cup X \Rightarrow x \in X$
Potom ale $x \in B \cap X \Rightarrow x \in A \cap X \Rightarrow x \in A$, čož hľadaný spor.

U-2-24. $\Rightarrow$: $A \in A \cup B = B \cup C$, ostatné rovnako.

$\Leftarrow$: Ak $x \notin A \cap B \cap C$, tak $x \notin A \cup B \wedge x \notin B \cup C \wedge x \notin C \cup A$
Inak BUNV nech $x \in A$. Je $A \subset B \cup C \Rightarrow x \in B \cup C$ a zjavne aj $x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C$.

Všeob. úvaha Drvivá väčšina rovností množinových vzťahov sa dá dokazovať tak, že dokážeme, že x patrí do výrazu na ľavej strane práve vtedy, keď do výrazu na pravej (a takto si to teda prevedieme na ekvivalentnú úlohu s výrokmi, ktorú ľahko vieme riešiť.)
Demo: Dokážte: $A \cup B = A \cup (B - A)$
$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \ \vee \ x \in B \Leftrightarrow x \in A \ \vee \ (x \notin A \wedge x \in B) \Leftrightarrow x \in A \ \vee \ x \in (B - A)$, q.e.d.

Cantor-Bernsteinova veta

1. Má byť prosté a na, inými slovami nájdite bijekciu.

   a) $x \to \frac{1}{x}$

   b) Premietneme os x na kruh so stredom v $(0, 1)$ a polomerom 1 so stredom premietania v $(0, 2)$.

   c) Priamke $y = ax + b$ priradíme pre $a \notin N_0$ dvojicu (a, b), pre $a \in N_0$ dvojicu $(a + 1, b)$, priamke $x = c$ dvojicu $(0, c)$.

   d) ??? Čo sú paraboly v rovine ? Musia mať os rovnobežnú s osou y? Asi nie… Ale vždy sa to dá tak, že ju popíšeme nejakými $4 \ldots 5$ číslami, a nájdeme bijekciu medzi R^3 a R^4 (alebo 5), čo je ekvivalentné s bijekciou medzi R a R^2 a tá sa dá spraviť tak, že pred aj za desatinnou čiarkou dávame cifry striedavo z jedného a druhého čísla.

e) Kruh zobrazíme na $(stred_x, stred_y, polomer)$.

f) Keď si to nakreslíme, vidíme, že pôvodná množina tvorí kruh a výsledná štvorec jemu opísaný. Bod $(0,0)$ nech sa zobrazí sám na seba. Ostatné body zobrazíme takto : spravíme polpriamku so začiatkom v $(0,0)$, prechádzajúcu daným bodom. Označme náš bod A, bod, v ktorom polpriamka pretne štvorec B. Potom obraz bodu A je ten bod C polpriamky, pre ktorý je $|OA| = \frac{|OC|}{|OB|}$. (Teda celú úsečku ležiacu na tejto polpriamke "natiahneme" tak, aby dočiahla až po štvorec)

g) Podobne ako b), len tentokrát premietame guľu z bodu $(0,0,2)$ na rovinu $z = 0$.

2. Treba vlastne nájsť injektívne zobrazenie A do B. Vo všetkých prípadoch sa presvedčte, že uvedené zobrazenie je naozaj prosté !

a) $x \to \frac{x+20}{\text{miliónpäť}}$

b) Postupnosť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ zobrazíme na postupnosť $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, kde $b_i = \frac{a_1}{2^i}$. Potom je $0 <= \sum b_i <= \sum \frac{1}{2^i} = 2$, preto $\sum b_i$ konverguje.

c) Každý člen postupnosti A zapíšeme pomocou dvoch členov B (vyšší a nižší bit :)

d) Pre jednoduchosť nech sú N od jednotky (ak ich chce E.T. od nuly, treba ich najskôr zobraziť každé na o 1 väčšie). Teraz vieme využiť to, že binárny zápis každého prir. čísla začína jednotkou. Preto každé prirodzené číslo vieme zakódovať tak, že najskôr zapíšeme toľko núl, koľko miest má jeho binárny zápis, a potom binárny zápis príslušného čísla.

e) $(x, y) \to (\frac{x}{1999}, \frac{y}{2000})$

3. Treba nájsť injekcie z A do B aj z B do A.

a) Trocha naokolo - ako v 2.d) ukážeme, že majú obe rovnakú mohutnosť ako $\{0,1\}^N$. Ozaj, keby to niekoho zaujímalo, tak N_m^N je množina všetkých postupností čísel $0, 1, \ldots, m$.

b) OOOK ??? čo je to **reálna** ohraničená spojitá f-cia ? Ak je to normálna funkcia $(-1,1) \to R$, tak injekcia z A do B je v zadaní, opačná mi uniká...

c) Jeden smer je zjavný, v opačnom zoberieme každý prvok postupnosti reálnych čísel, arkus tangensom ho zobrazíme na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, a ten interval potom uťapkáme na $(0,1)$.

d) To isté, len to robíme s funkčnou hodnotou.

e) Postupnosť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ zobrazíme na postupnosť $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, kde $b_1 = a_1 \ \wedge \ b_{n+1} = b_n + a_{n+1}$.

f) Oba smery ako v 2.e).

4. Smrť moja... sa mi už nechce...

A drobné upozornenia na záver

To, že niečo na týchto papieroch nesedí s tvojimi výsledkami, môže byť zavinené tromi základnými chybičkami krásy:

- \- Je to to isté, len to máš ináč zapísané. To by až tak nevadilo, na skúške určite nie, len to treba do skúšajúceho dosť dlho tlačiť.
- \- Máš to zle, môžeš sa biť po hlave, aká/ý si blbá/ý (čo budeme diskriminovať feministky tým, že vždy sa skôr píše mužský rod, že, dáme občas skôr ženský ...:)
- \- Mám to zle ja. Aj to sa môže stať, nik nie sme neomylný. V tomto prípade však STRIKTNE odporúčam akékoľvek bitie vynechať, ale budem rád, keď sa mi o tom dá vedieť... (Pozn. po dvoch rokoch: momentálne už viem, že tam nejaké chyby sú, ale mám ich srdečne v paži.)

Tieto papiere NEMAJÚ slúžiť ako náhrada za počítanie príkladov, ale na kontrolu výsledkov a pomoc pri tých najväčších tyčiach, ktoré skoro nik nevie :) ...