Mohutnost mnozin a konecne mnoziny.

1. Dokazte nasledovne tvrdenia (za tvrdenim je oznacenie podla prednasky; niektore boli dokazane uz na prednaske).

a) Ak $|A| \leq |X|,\ |B| \leq |Y|$, potom $|A| + |B| \leq |X| + |Y|$ (2a)

b) Ak $|A| \leq |X|,\ |B| \leq |Y|$, potom $|A|.|B| \leq |X|.|Y|$ (2b)

c) Ak $|A| \leq |X|,\ |B| \leq |Y|$, potom $|A|^{|B|} \leq |X|^{|Y|}$ (2c)

d) $|A| + |B| = |B| + |A|$ (3a)

e) $|A| + (|B| + |C|) = (|A| + |B|) + |C|$ (3b)

f) $|A|.|B| = |B|.|A|$ (3c)

g) $|A|.(|B|.|C|) = (|A|.|B|).|C|$ (3d)

h) $|A|.(|B| + |C|) = (|A|.|B|) + (|A|.|C|)$ (3e)

i) $|A|^{|B|+|C|} = |A|^B.|A|^C$ (4a)

j) $(|A|.|B|)^{|C|} = |A|^{|C|}.|B|^{|C|}$ (4b)

k) $\left(|A|^{|B|}\right)^{|C|} = |A|^{|B|\cdot|C|}$ (4c)

2. Ak ma mnozina $n \in \mathbb{N}$ prvkov, potom je konecna.

3. Dokazte, ze mnozina vsetkych prvocisel je nekonecna. Mozete pouzit tvrdenie, ze kazde prirodzene cislo $n \geq 2$ ma rozklad na prvocisla.

4. Oznacime $A_n = \{(k,l) \in \mathbb{N}^2;\ \max\{k,l\} = n\}$.

a) Ukazte, ze $A_n \cap A_m = \emptyset$ pre $n \neq m$.

b) Pre kazde n plati $\mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_n = \bigcup_{p=0}^{n-1} A_p$.

c) Na zaklade *a)* a *b)* dokazte, ze $\sum_{i=0}^{n}(2i+1) = (n+1)^2$.

d) celu uvahu vhodne graficky znazornite.

5. Uvahou podobnou, ako v ulohe 4 dokazte tieto rovnosti (pre lubovolne $n \in \mathbb{N}$):

a) $\sum_{i=0}^{n}(3i^2 + 3i + 1) = (n+1)^3$

b) $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n^2 - n}{2} + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

6. Nech X je konecna mnozina. Potom plati:

a) ak $f : X \xrightarrow{1-1} X$, tak f je zobrazenie na mnozinu X;

b) ak $f : X \ \overrightarrow{na}\ X$, tak f je proste zobrazenie.

Dokazte.

7. Nech X je mnozina pre ktoru plati: ak $f : X \xrightarrow{1-1} X$, tak f je zobrazenie na mnozinu X. Potom X je konecna podla Dedekinda. Dokazte!

Spocitatelne mnoziny.

1. Priamo podla definicie ukazte, ze $|\mathbb{N}| + |\mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$.

2. Ukazte, ze $|Z \times \langle 0,1)| = |\mathbb{R}|$. Odtial odvodte $|\mathbb{R}| \cdot |\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$.

3. Ak $|\mathbb{N}| \leq |A|$, potom $|A| + |\{a\}| = |A|$. Dokazte!

4. Ak $|A| + |\{a\}| = |A|,\ a \notin A$, potom $|A| \geq |\mathbb{N}|$. Dokazte!
(Navod: $a \notin A$ a $f : A \cup \{a\} \stackrel{1-1}{\longrightarrow} A;\ h(0) = f(a),\ h(n+1) = f(h(n))$, potom $h : \mathbb{N} \stackrel{1-1}{\longrightarrow} A$)

5. Ak $|A| \geq |\{0,1\}|, |A| \cdot |A| = |A|$, potom $|A| \geq |N|$. Dokazte!

6. Ak $|A| \cdot |A| = |A|$, potom $|A^n| = |A^m|$ pre lubovolne $n, m \in \mathbb{N}, \qquad n, m > 0$. Dokazte!

7. Ak $|\mathbb{N}| \leq |A|$, potom $|A| + |\mathbb{N}| = |A|$. Dokazte!

8. Ak A, B su disjunktne mnoziny, potom $|\mathcal{P}(A)| \cdot |\mathcal{P}(B)| = |\mathcal{P}(A \cup B)|$. Dokazte!

9. Najdite "vzorec", ktory definuje proste zobrazenie z $\mathbb{N}^3$ na $\mathbb{N}$.

10. Vypocitajte

$$
\begin{array}{ll}
a) & (2^{\aleph_0} + \aleph_0^{\aleph_0}).\aleph_0 \\
b) & (2^{2^{\aleph_0}}.{\aleph_0}^{{\aleph_0}^{\aleph_0}})^{2^{\aleph_0}} \\
c) & (2^{\aleph_0} + \aleph_0^{\aleph_0})^n
\end{array}
$$

11. Mnozina vsetkych otvorenych intervalov s racionalnymi koncami je spocitatelna. Dokazte!

12. Najdite mnozinu $X \subseteq \mathbb{R}^n$ taku, ze

a) X je spocitatelna

b) $\forall \varepsilon > 0$ a $\forall a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n\ \exists x \in X,\ x = (x_1, \ldots, x_n)$ take, ze

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - a_i| < \varepsilon$$

13. Ak X je mnozina navzajom disjunktnych otvorenych intervalov, tak X je spocitatelna. Dokazte!

14. Nech f je neklesajuca funkcia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dokazte, ze plati:

a) $\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ a $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$;

b) mnozina bodov nespojitosti funkcie f je nespocitatelna.

15. Nech f je funkcia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pripomenme, ze f ma totalne minimum v cisle a, ak existuje $\varepsilon > 0$ take, ze pre $\forall x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon),\ x \neq a$ je $f(x) > f(a)$. Podobne totalne maximum. Dokazte, ze mnozina vsetkych bodov, v ktorych funkcia ma totalne minimum alebo totalne maximum, je spocitatelna.

16. Nech $Tk(X)$ je mnozina vsetkych postupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ prvkov mnozniny X takych, ze existuje $m \in \mathbb{N}$ take, ze pre $\forall n \geq m$ je $a_n = a_m$. Aka je mohutnost mnozin $Tk(\{0\}), Tk(\{0,1\}), Tk(\{\mathbb{N}\}), Tk(\{\mathbb{Q}\}), Tk(\{\mathbb{R}\})$?

17. Nech P je podmnozina $\{0,1\}^N$. Dvaja hraci I a II hraju takuto nekonecnu hru. Hrac I vyberie $a_0 \in \{0,1\}$, hrac II vyberie $a_1 \in \{0,1\}$ atd., hrac I vybera $a_{2n} \in \{0,1\}$, hrac II vybera $a_{2n+1} \in \{0,1\}$. Hrac I vyhra, ak postupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je prvok mnoziny P. V opacnom pripade vyhra hrac II. Ak P je spocitatelna mnozina, tak mozno dat hracovi II taky navod na hru, aby vzdy vyhral. Najdite taky sposob hry hraca II.

18. Z vysledku ulohy 17 odvodte, ze mnozina $\{0,1\}^N$ nie je spocitatelna.

19. Aka je mohutnost mnoziny vsetkych podgrup aditivnej grupy $(\mathbb{Z}, +, 0)$?

Zapojenie - vypojenie.

1. Na univerzitnej katedre pracuje 30 pracovnikov, pricom kazdy z nich ovlada aspon jeden cudzi jazyk. 10 pracovnikov vie po anglicky, 7 nemecky, 6 francuzsky, 5 anglicky a nemecky, 4 anglicky a francuzsky, 3 nemecky a francuzsky.

a) Kolko pracovnikov ovlada vsetky tri jazyky?

b) Kolko pracovnikov ovlada prave dva jazyky?

c) Kolko pracovnikov ovlada len anglicky jazyk?

2.

a) Ukazte, ze pocet prirodzenych cisel, ktore su delitelne x a neprevysuju n je rovny $\left[\frac{n}{x}\right]$.

b) Najdite pocet prirodzenych cisel, neprevysujucich 1000, ktore nie su delitelne ziadnym z cisel $3, 5$ a 7.

c) Najdite pocet prirodzenych cisel, neprevysujucich 1000 a nesudelitelnych s cislami $6, 10$ a 15.

3. Ukazte, ze ak $n = 30m$, potom pocet prirodzenych cisel, neprevysujucich n a nedelitelnych ziadnym z cisel $6, 10, 15$ je rovny $22m$.

4. Nech $p_1, p_2, \ldots, p_r$ su vsetky prvocisla, neprevysujuce $\sqrt{n}$. Ukazte, ze pocet prvocisel p, takych, ze $\sqrt{n} < p \leq n$ je rovny $n - 1 - \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k+1} S_k$, kde $S_k = \sum \left[\frac{n}{p_{i_1} \cdots p_{i_n}}\right]$, kde sucet ide cez vsetky podmnoziny $\{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \ldots, r\}$.

5. Najdite pocet prvocisel neprevysujucich **a**) 25, **b**) 250, **c**) n.

6. Uloha o nepriatelskych dvojiciach. Kolkymi sposobmi mozeme za okruhly stol posadit n nepriatelskych dvojic tak, ze ziadni nepriatelia nesedia vedla seba? Stolicky su ocislovane.

7. Uloha o manzelskych dvojiciach. Kolkymi sposobmi mozeme posadit za okruhly stol n manzelskych dvojic tak, aby sa striedali muzi so zenami a ziadna manzelska dvojica nesedela vedla seba? Stolicky su ocislovane.

Priklady roznych typov.

1. Kolko je permutacii $n > 1$ prvkov $a_1, a_2, \ldots, a_n$, v ktorych pre ziadne $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ nie je prvok a_{i+1} bezprostredne za prvkom a_i?

2. Kolko existuje $k-$prvkovych variacii s opakovanim z n prvkov takych, ze kazda obsahuje vsetkych n prvkov?

3. Mame $2k + 1$ listkov ocislovanych prirodzenymi cislami $1, 2, \ldots, 2k + 1$. Aky najvacsi pocet listkov mozno vybrat tak, aby sa ziadne vybrate cislo nerovnalo suctu dvoch vybratych cisel?

4. Nech $A = (a_{ij})$ je matica typu $n \times n$, $a_{ij} = \{-1, 0, 1\}$. Kolko mozno vytvorit matic tak, aby sucty prvkov v riadkoch, stlpcoch, na diagonalach boli **navzajom** rozne? (Teda napr. sucet v riadku musi byt rozny od inych suctov v riadku, od vsetkych suctov v stlpci a na diagonalach)

5. Ak je v miestnosti pritomnych n osob, potom aspon dvaja z pritomnych maju rovnaky pocet znamych spomedzi pritomnych. Dokazte. (Vztah "*a je znamy b*" pokladame za vzajomny, t.j. ak a je znamy b, potom b je znamy a.)

6. Nech A_n je pocet Spernerovych systemov pre mnoziny z n prvkov. Dokazte, ze

$$2^{T_n} < A_n < C_{2^{T_n}}^{T_n}, \quad T_n = C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$$

7. Je danych n dvojic, z ktorych kazda sa sklada z dvoch rovnakych pismen, pricom dve rozne dvojice obsahuju vzdy rozne pismena. Vsetkych $2n$ pismen usporiadavame tak, ze ziadne dve rovnake pismena nenasleduju za sebou. Kolko je takych usporiadani?

8. Mame r roznych veci, ktore rozdelujeme medzi $n+p$ ludi a to tak, aby kazdy z n **vopred danych** ludi dostal aspon jednu vec. Dokazte, ze toto rozdelenie mozeme previest S_r sposobmi, kde

$$S_r = (n+p)^r - n(n+p-1)^r + \binom{n}{2}(n+p-2)^r - \cdots + (-1)^n p^r$$

9. Dokazte, ze plati

$$\frac{(n+r-1)!}{r!} - \frac{n}{1}\frac{(n+r-3)!}{(r-2)!} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{(n+r-5)!}{(r-4)!} - \cdots = \frac{n!(n-1)!}{r!(n-r)!}$$

10. Skupina skladajuca sa zo 41 studentov uspesne zlozila semestralne skusky z 3 predmetov. Mozne znamky boli $1, 2, 3$. Dokazte, ze aspon pat studentov zlozilo semestralne skusky s rovnakymi znamkami!

11. Komisia zasadala $40-$krat. Kazdy raz sa na zasadanuti zucastnilo 10 osob, pricom ziadny dvaja clenovia sa na zasadanuti nezucastnili spolu viac ako jedenkrat. Dokazte, ze pocet clenov komisie je viac ako 60.

12. V niektorej institucii pracuje 25 pracovnikov. Dokazte, ze z nich nie je mozne vytvorit viac ako 30 komisii po 5 osob v kazdej tak, aby ziadne dve komisie nemali spolocneho viac ako jedneho clena

13. Kolkymi sposobmi mozeme posadit v kine n manzelskych dvojic do posledneho radu, kde je $2n$ miest tak, aby ziadny manzelsky par nesedel vedla seba?

14. Kolko je vsetkych permutacii $2n$ prvkov $m_1, m_2, \ldots, m_{2n}$, v ktorych pre ziadne neparne $i \in \{1, 2, \ldots, 2n\}$ nie je prvok m_i na $i-$tom mieste?

15. Kolko je vsetkych permutacii k prvkov $m_1, m_2, \ldots, m_k$, v ktorych pre ziadne $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ nie je prvok m_i na $i-$tom miest, a pritom prvky m_1 a m_2 su vedla seba?

16. Uloha o hareme.
Nech $M = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ je system konecnych neprazdnych mnozin. Pozadujeme, aby kazda mnozina mala viacej ako jedneho reprezentanta, nadalej vsak pozadujeme, aby reprezentanti boli rozni. Najdite nutnu a postacujucu podmienku riesenia tejto ulohy.

17. Zistite, ci mozu hodiny: matematiky, fyziky, zemepisu a biologie bezat subezne, ak mame k dispozicii: matematika, fyzika, M+Z, B+Z, B+Z. Vyuku mame zabezpecit 4 vyucujucimi.

18. Ukazte, ze ak kazda mnozina ma r prvkov $r \geq 1$ a kazdy prvok sa vyskytuje v r mnozinach, tak potom existuje system roznych reprezentantov pre mnoziny $\{S_1, ..., S_m\}$.

Fibonacciho cisla.

Postupnost *Fibonacciho cisel* je postupnost definovana rekurentnym predpisom:

$$\begin{aligned} F_0 &= 0 \\ F_1 &= 1 \\ F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n, \qquad n \geq 0 \end{aligned}$$

1. Dokazte, ze

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

2. Dokazte, ze

$$\sum_{k=0}^{\lceil n/2 \rceil} \binom{n-k+1}{k} = F_{n+2}$$

3. Dokazte, ze

$$\sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} = F_{2n+2}$$

4. Dokazte, ze

$$\sum_{k=0}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1$$

5. Dokazte, ze

(a) $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}, \quad n \geq 1,\ m \geq 0$

(b) ak m deli n, tak F_m deli F_n

(c) $\mathrm{NSD}(F_n,\ F_{n+1}) = 1$

(d) $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$

(e) $F_{n+1}^3 + F_n^3 - F_{n-1}^3 = F_{3n}$

(f) $(F_nF_{n+3})^2 + (2F_{n+1}F_{n+2})^2 = (F_{2n+3})^2$

6. Kolko je retazcov zo symbolov 0 a 1 dlzky n takych, ze v nich nenasleduju dve jednotky za sebou?

7. Kazde prirodzene cislo $r > 1$ mozno jednoznacne zapisat v tvare takeho suctu Fibonacciho cisel, ze kazde Fibonacciho cislo sa v nom vyskytuje najviac raz a ziadne dve susedne Fibonacciho cisla sa v nom nevyskytuju sucasne. Dokazte.

8. Nech

$$\begin{aligned} G_0 &= 1 \\ G_1 &= 2 \\ G_{n+2} &= G_{n+1} + G_n - 1, \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

Najdite vyjadrenie postupnosti G_n pomocou Fibonacciho cisel.

9.* Nech

$$\begin{aligned} G_0 &= 0 \\ G_1 &= 2 \\ G_{n+2} &= G_{n+1} + G_n + 1 - n, \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

Najdite vyjadrenie postupnosti G_n pomocou Fibonacciho cisel.

Dirichletov princip.

1. Dokazte, ze z lubovolnych 52 cisel mozno vybrat dve tak, ze ich sucet alebo rozdiel je delitelny $100-$mi.

2. V stvorci je danych 9 bodov, z ktorych ziadne tri nelezia na jednej priamke. Dokazte, ze tri z tychto bodov su vrcholmi trojuholnika, ktoreho obsah neprevysuje 1/8 obsahu stvorca.

3. Dokazte, ze v lubovolnom konvexnom $11-$uholniku sa najdu dve uhlopriecky s vlastnostou, ze uhol priamok, na ktorych lezia je mensi ako 5 stupnov.

4. V miestnosti je lubovolne rozmiestnenych 30 stoliciek. 30 ludi, sediacich na tychto stolickach, hra nasledovnu hru: na povel vsetci vstanu a snazia sa dostat na najblizsiu susednu stolicku. Dokazte, ze o ziadnu stolicku nie je viac ako 6 zaujemcov.

5. V rovine je dana mnozina M 90−tich bodov, z ktorych ziadne tri nelezia na jednej priamke. Kazdy z nich je spojeny useckou s aspon 10−timi dalsimi z nich. Dokazte, ze ku kazdemu bodu mnoziny M mozno vybrat tri dalsie body mnoziny M tak, ze vo vzniknutej stvorici je kazdy bod spojeny aspon s dvomi dalsimi.

Dirichletov princip.

1. Hadzeme dvoma kockami. Kolko krat treba hodit, aby sme mali zarucene, ze dvakrat padol rovnaky sucet bodov na kockach?

2. Kolkokrat treba hodit troma kockami, aby bolo zaistene, ze aspon styrikrat padol rovnaky sucet bodov na kockach?

3. Kolkokrat treba hodit dvoma kockami, aby trikrat padla ta ista dvojica cisel? (Ulohu rieste pre rozlisene aj pre nerozlisene kocky).

4. Dokazte zovseobecnenia Dirichletovho principu:

(a) Ak je danych n realnych cisel, ktorych sucet je vacsi alebo sa rovna cislu b , tak aspon jedno z nich je vacsie alebo sa rovna $\frac{b}{n}$.

(b) Ak je danych n realnych cisel, ktorych sucet je vacsi nez cislo b , tak aspon jedno z nich je vacsie ako $\frac{b}{n}$.

(c) Ak je danych n realnych cisel, ktorych sucet je mensi alebo sa rovna cislu b , tak aspon jedno z nich je mensie alebo sa rovna $\frac{b}{n}$.

(d) Ak je danych n realnych cisel, ktorych sucet je mensi nez b , tak aspon jedno z nich je mensie nez $\frac{b}{n}$.

5. Dany je konvexny 14−sten s 9 vrcholmi. Dokazte, ze na nom existuje vrchol, z ktoreho vychadza aspon 5 hran. [1]

6. Dany je konvexny 7−sten so 6 vrcholmi. Dokazte, ze prave 1 stena tohto 7−stena je 4−uholnik.

7. V zahrade o rozmeroch 80 m × 90 m rastie 365 stromov. Da sa najst cast zahrady tvaru obdlznika o rozmeroch 5 m × 8 m na ktorej rastu aspon 3 stromy?

8. Na obslzniku rozmerov 27 m × 36 m je umiestnenych 1945 bodov. Dokazte, ze aspon 7 z nich mozno naraz pokryt trojuholnikom plosneho obsahu 3 m^2.

9. Poldavia ma rozlohu 268138 km^2. Je v nej rozmiestnenych 13 televiznych vysielacov. Nejake miesto splna normu kvality prijmu, ak nie je vzdialene od najblizsieho vysielaca viac ako 80 km. Dokazte, ze v Poldavii existuje miesto s nekvalitnym televiznym prijmom.

10. V sade tvaru obdlznika o rozmeroch 100 m × 300 m musi byt menej nez 2576 stromov, ak vzdialenost lubovolnych dvoch ma byt vacsia ako 4 m. Dokazte.

11. Dokazte, ze v obdlzniku o rozmeroch 197 × 94 sa neda umiestnit 24000 bodov tak, aby kazde dva mali vzdialenost nie mensiu nez 1.

12. Dokazte, ze v obdlzniku o rozmeroch a, b sa neda umiestnit viac nez $\frac{4(a+\varepsilon)(b+\varepsilon)}{\pi\varepsilon^2}$ bodov tak, aby vzdialensot lubovolnych dvoch bola vacsia nez ε.

[1] *Eulerova veta* : Ak s je pocet stien, v pocet vrcholov a h pocet hran konvexneho mnohostena, tak $s + v = h + 2$

13. Ak je v stvorci o strane 1 umiestnenych lubovolne 51 bodov, tak niektore tri spomedzi nich mozno pokryt kruhom o polomere $\frac{1}{7}$.

14. Je danych 82 prirodzenych cisel. Dokazte, ze sa medzi nimi daju najst take dve, ze ich rozdiel je delitelny cislom 81.

15. Ku kazdemu prirodzenemu cislu n existuje cislo zapisane v desiatkovej sustave v tvare 11...100...0, ktore je delitelne cislom n. Dokazte.

16. Ku kazdemu prvocislu cislu $p \neq 2,\ 5$ existuje cislo zapisane v desiatkovej sustave v tvare 111...1, ktore je delitelne cislom p. Dokazte.

17. Spomedzi n cisel mozno vybrat niekolko tak, ze ich sucet je delitelny cislom n. Dokazte.

18. Ignac sa pripravuje na prijimacie skusky. Po dobu troch mesiacov riesi aspon jednu ulohu denne. Pritom za kalendarny tyzden neriesi viac ako 13 uloh. Dokazte, ze sa da najst niekolko po sebe iducich dni v uvedenom obdobi, za ktore vyriesi prave 33 uloh.

19. Dokazte, ze dekadicky zapis niektorej mocniny cisla 37 konci skupinou cifier 00001.

20. Nech p je cislo nesudelitelne s cislom 10. Dokazte, ze pre kazde cilso n existuje take $k \neq 0$, ze p^k ma desiatkovy zapis konciaci skupinou n nul a cifrou 1.

21. Konferencie sa zucastnilo 70 delegatov, ktori hovoria 11 roznymi jazykmi (kazdy prave jednym). Jednym jazykom hovori najviac 15 delegatov. Organizacny vybor rozhodol, ze za oficialny bude povazovat taky jazyk, ktorym hovori najmenej 5 delegatov. Dokazte, ze na konferencii boli aspon 3 oficialne jazyky.

22. Dane su dve cifry. Kolko sa da najst trojcifernych cisel zostavenych iba z tychto cifier takych, aby sa lisili aspon na dvoch miestach?

23. Dokazte, ze nemozno najst viac ako 2^{n-1} $n-$cifernych cisel zostavenych z dvoch cifier tak, aby sa lubovolne dve z nich lisili aspon na dvoch miestach. Dajte navod na zostrojenie 2^{n-1} $n-$cifernych cisel s touto vlastnostou.

24. Dokazte, ze nemozno najst viac nez $\left\lfloor \frac{2^n}{n+1} \right\rfloor$ $n-$cifernych cisel zostavenych z dvoch cifier tak, aby sa kazde dve z nich lisili aspon na 3 miestach.

25. Dokazte, ze nemozno najst viac nez 2^{n-4} $n-$cifernych cisel zostavenych z dvoch cifier tak, aby sa kazde dve z nich lisili aspon na 4 miestach.

26. Dokazte, ze nemozno najst viac ako k^{n-1} $n-$cifernych cisel zostavenych z dvoch cifier tak , aby sa lubovolne dve z nich lisili aspon na dvoch miestach. Dajte navod na zostrojenie k^{n-1} $n-$cifernych cisel s touto vlastnostou.

27. Dokazte, ze pomocou k cifier nemozno zostrojit viac nez $\left\lfloor \frac{k^n}{(nk+1-n)} \right\rfloor$ $n-$cifernych cisel, z ktorych kazde dve sa lisia aspon na 3 miestach.

28. Dokazte, ze pomocou k cifier nemozno zostrojit viac nez $\left\lfloor \frac{k^n}{\sum_{j=0}^{m} \binom{n}{j}(k-1)^j} \right\rfloor$ $n-$cifernych cisel, z ktorych kazde dve sa lisia aspon na $2m+1$ miestach.

V nasledujucich ulohach rozumieme pod $k-$farebnym $n-$grafom uplny graf s n vrcholmi, ktoreho kazda hrana je zafarbena jednou z k farieb.

29. V kazdom (a) dvojfarebnom 6$-$grafe (b) trojfarebnom 17$-$grafe (c) stvorfarebnom 66$-$grafe (d) patfarebnom 327$-$grafe existuje jednofarebny trojuholnik. Dokazte.

30. Dokazte, ze v dvojfarebnom 6$-$grafe existuju aspon 2 jednofarebne trojuholniky. Zostrojte dvojfarebny 6$-$graf, v ktorom neexistuju 3 jednofarebne trojuholniky.

31. Dokazte, ze v dvojfarebnom (a) $7-$grafe (b) $8-$grafe (c) $9-$grafe (d) $10-$grafe (e) $11-$grafe existuje apson (a) 4 (b) 7 (c) 11 (d) 16 (e) 22 jednofarebnych trojuholnikov.

32. Dokazte, ze pre $n \geq 10$ existuje v dvojfarebnom $n-$grafe aspon $\frac{1}{2}n^2 - \frac{19}{2}n + 61$ jednofarebnych trojuholnikov.

33. Dokazte, ze v kazdom dvojfarebnom $24-$grafe existuju aspon dva jednofarebne $4-$grafy.

34. Dokazte, ze v kazdom dvojfarebnom $192-$grafe existuje aspon jeden jednofarebny $5-$graf.

35. Kazda postupnost $n^2 + 1$ roznych prirodzenych cisel obsahuje alebo rastucu alebo klesajucu podpostupnost $n + 1$ prvkov.

Teoria mnozin.

To, ze medzi mnozinami A, B existuje bijektivne zobrazenie, budeme symbolicky oznacovat $A \sim B$ alebo $A \equiv B$. Vtedy hovorime, ze mnoziny A, B su *ekvivalentne*. Hovorime tiez, ze take mnoziny A, B maju *rovnaku mohutnost*.

Oznacme n mohutnost mnoziny $N_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, kde $n \in \mathbb{N}$. Kazdu mnozinu, pre ktoru plati, ze $A \sim N_n$ nazyvame *konecnou*, pricom n nazyvame *poctom* jej prvkov. Mnozina, ktora nie je konecna, sa nazyva *nekonecna*. Kazdu mnozinu A, ekvivalentnu s mnozinou $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$, nazyvame *spocitatelnou* a jej mohutnost oznacujeme $\aleph_0$.

Kazdu mnozinu A, ekvivalentnu s mnozinou vsetkych realnych cisel $\mathbb{R}$, nazyvame *kontinualnou* a jej mohutnost oznacujeme c.

Mohutnosti lubovolnych mnozin sa nazyvaju *kardinalnymi cislami*. Kardinalne cisla konecnych mnozin sa nazyvaju konecne a kardinalne cisla nekonecnych mnozin nekonecne. Kardinalne cislo c sa nazyva *mohutnost kontinua*.

Budeme hovorit, ze $|A| \leq |B|$, ak A je ekvivalentna niektorej podmnozine mnoziny B. Budeme hovorit, ze $|A| < |B|$, ak $|A| \leq |B|$, ale A a B nie su ekvivalentne.

1. Dokazte, ze

(a) $A \sim A$ (reflexivnost)

(b) ak $A \sim B$, tak $B \sim A$ (symetrickost)

(c) ak $A \sim B$ a $B \sim C$, tak $A \sim C$ (tranzitivnost)

2. Dokazte, ze

(a) $A \sim B \iff |A| = |B|$

(b) ak $|A_1| = |A_2|$, $|B_1| = |B_2|$ a $|A_1| \leq |B_1|$, tak $|A_2| \leq |B_2|$

(c) ak existuje surjektivne zobrazenie z $A \to B$, tak $|B| \leq |A|$

3.* Nech $A \supseteq A_1 \supseteq A_2$ a $A \sim A_2$. Dokazte, ze $A \sim A_1$.

4. Dokazte, ze ak $|A| \leq |B|$ a $|B| \leq |A|$, tak $|A| = |B|$ (Cantor-Bersteinova veta).

5. Dokazte, ze

(a) kazda podmnozina konecnej mnoziny je konecna;

(b) zjednotenie konecneho poctu konecnych mnozin je konecna mnozina;

(c) karteziansky sucin konecneho poctu konecnych mnozin je konecna mnozina.

6. Dokazte, ze

(a) konecna mnozina nie je ekvivalentna ziadnej svojej vlastnej podmnozine a ziadnej svojej nadmnozine.

(b) dve konecne mnoziny su ekvivalentne prave vtedy, ked obsahuju rovnaky pocet prvkov.

(c) kardinalnych cisel je nekonecne vela.

7. Dokazte, ze z kazdej nekonecnej mnoziny mozeme vydelit spocitatelnu podmnozinu.

8. Dokazte, ze mnozina je nekonecna vtedy a len vtedy, ked je ekvivalentna niektorej svojej podmnozine.

9. Dokazte, ze kazda podmnozina spocitatelnej mnoziny je spocitatelna alebo konecna.

10.

(a) Nech obor definicie funkcie je spocitatelna mnozina. Dokazte, ze obor hodnot tejto funkcie je konecna alebo spocitatelna mnozina.

(b) Dokazte, ze neprazdna mnozina A je spocitatelna alebo konecna prave vtedy, ked je mnozinou hodnot niektorej funkcie z $N \to A$.

11. Dokazte, ze ak zo spocitatelnej mnoziny vynechame konecnu podmnozinu, tak zostavajuca mnozina je nekonecna.

12. Dokazte, ze

(a) ak A a B su spocitatelne mnoziny, tak $A \cup B$ je tiez spocitatelna;

(b) ak vsetky A_i su konecne, neprazdne a po dvoch disjunktne mnoziny, tak

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$$

je spocitatelna mnozina.

13. Dokazte, ze

(a) ak A je nekonecna mnozina a B je konecna alebo spocitatelna mnozina, tak $A \cup B \sim A$;

(b) ak A je nekonecna a nespocitatelna mnozina a B je konecna alebo spocitatelna mnozina, tak $A \setminus B \sim A$.

14. Dokazte, ze ak $A_1, \ldots, A_n$ $(n \geq 1)$ su spocitatelne mnoziny, tak aj $A_1 \times \cdots \times A_n$ je spocitatelna mnoznina.

15. Dokazte, ze

(a) mnozina celych cisel je spocitatelna;

(b) mnozina racionalnych cisel je spocitatelna;

(c) mnozina racionalnych cisel intervalu $\langle a, b \rangle$ je spocitatelna pre $a < b$;

(d) mnozina dvojic (x, y), kde x a y su racionalne cisla, je spocitatelna.

16. Dokazte, ze mnozina vsetkych konecnych postupnosti, vytvorenych z prvkov niektorej spocitatelnej mnoziny je spocitatelna.

17. Dokazte, ze mnozina vsetkych konecnych podmnozin spocitatelnej mnoziny je spocitatelna.

18. Dokazte, ze mnozina mnohoclenov jednej premennej s celociselnymi koeficientami je spocitatelna.

19. Dokazte, ze mnozina *algebraickych cisel*, t.j. cisel, ktore su korenmi mnohoclenov jednej premennej s celociselnymi koeficientami, je spocitatelna.

20. Dokazte, ze lubovolna mnozina po dvoch disjunktnych otvorenych intervalov na realnej priamke nie je vacsia nez spocitatelna.

21.* Dokazte, ze mohutnost lubovolnej mnoziny po dvoch disjunktnych pismen T v rovine nie je vacsia ako spocitatelna.

22. Dokazte, ze ak $A \subseteq \mathbb{R}$ a existuje $\delta > 0$ take, ze pre vsetky rozne prvky $x, y \in A$ take, ze plati $|x - y| \geq \delta$, tak A je konecna alebo spocitatelna.

23. Dokazte, ze mnozina bodov nespojitosti rydzomonotonnej funkcie na realnej osi nie je viac ako spocitatelna.

24. Dokazte, ze

(a) $(0, 1) \sim \langle 0, 1\rangle \sim \langle 0, 1) \sim (0, 1\rangle$;

(b) $\langle a, b\rangle \sim \langle c, d\rangle$, kde $a < b$ a $c < d$;

(c) $\langle a, b\rangle \sim \mathbb{R}$

25. Dokazte, ze mnoziny bodov stvorca a usecky su ekvivalentne.

26. Dokazte, ze mnoziny bodov dvoch kruznic su ekvivalentne.

27. Dokazte, za $\mathbb{R}^n \sim \mathbb{R}^m$ $(n, m \geq 1)$.

28. Zostrojte bijektivne zobrazenie medzi bodmi stvorca a roviny.

29.* Dokazte, ze mnozina bodov intervalu $\langle 0, 1\rangle$ nie je spocitatelna.

30. Aka je mohutnost mnoziny vsetkych iracionalnych cisel?

31. Dokazte existenciu *transcendentnych* (t.j. nealgebraickych) cisel.

32. Dokazte, ze zjednotenie konecneho alebo spocitatelneho poctu mnozin mohutnosti c ma mohutnost c.

33.* Dokazte, ze mnozina vsetkych spocitatelnych postupnosti prirodzenych cisel ma mohutnost c.

34. Dokazte, ze

(a) mnozina vsetkych spocitatelnych postupnosti zlozenych z 0 a 1 ma mohutnost c;

(b) $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = c$.

35. Dokazte, ze

(a) ak vsetky A_i su kontinualne, tak $|A_1 \times \cdots \times A_n| = c$;

(b) ak pre vsetky i plati $|A_i| = i$ a $|I| = \aleph_0$, tak

$$\left|\prod_{i\in I} A_i\right| = c$$

36. Aka je mohutnost mnoziny

(a) vsetkych spocitatelnych postupnosti realnych cisel;

(b) vsetkych spojitych funkcii na realnej priamke;

(c) rydzomonotonnych funkcii na realnej priamke?

37. Nech A je spocitatelna mnozina bodov na realnej priamke. Mozno potom vybrat a tak, aby $\{x + a | x \in A\} \cap A = \emptyset$?

38.* Dokazte, ze mnozina realnych funkcii definovanych na intervale $\langle 0, 1\rangle$ ma mohutnost vacsiu ako c.

39. Dokazte, ze mohutnost mnoziny vsetkych funkcii definovanych na intervale $\langle a, b \rangle$ pre $a < b$ a nespojitych aspon v jednom bode je vacsia ako c.

40.* Dokazte, ze mnozina vsetkych podmnozin $\mathcal{P}(A)$ mnoziny A ma mohutnost vacsiu ako A.

41. Nech $\mathcal{S}$ je system mnozin taky, ze pre kazdu mnozinu A z $\mathcal{S}$ existuje mnozina B z $\mathcal{S}$ taka, ze nie je ekvivalentna ziadnej podmnozine mnoziny A. Dokazte, ze zjednotenie vsetkych mnozin z $\mathcal{S}$ nie je ekvivalentne ziadnej podmnozine mnoziny z $\mathcal{S}$.

42. Dokazte, ze neexistuje mnozina, ktora obsahuje vsetky mnoziny.

43. Budeme hovorit, ze postupnost kladnych celych cisel $b_1, b_2, \ldots$ *rastie rychlejsie* ako postupnost $a_1, a_2, \ldots$, ak

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

Dokazte, ze pre kazdu postupnost kladnych celych cisel existuje postupnost, rastuca rychlejsie.