Diskrétna matematika - Letný semester rok 2000

Def (Sčitovanie mohutnosti množín) |C| = |A| + |B| , ak existujú také A1, B1, že

1a) $A1 \cup B1 = C$

1b) $A1 \cap B1 = \emptyset$

1c) |A|=|A1|, |B|=|B1| .

Def (Umocňovanie mohutnosti množín) $|C|=|A|^{|B|}$, ak platí $|C|=|A^B|$, (A^B - všetky zobrazenia množiny B do množiny A) .

Def (Súčin mohutnosti množín) |C|=|A|*|B|, ak |C|=|AxB| .

Veta Nech $|A|\leq|X|$, $|B|\leq|Y|$, potom platí

2a) $|A| + |B| \leq |X| + |Y|$,

2b) $|A| * |B| \leq |X| * |Y|$,

2c) $|A|^{|B|} \leq |X|^{|Y|}$,

Veta (Aritmetické vlastnosti) Pre všetky množiny A, B, C platí

3a) |A| + |B| = |B| + |A| - komutatývnosť sčitovania

3b) (|A| + |B|) + |C| = |A| + (|B| + |C|) , - asociatývnosť sčitovania

3c) |A| * |B| = |B| * |A| - komutatývnosť násobenia

3d) (|A| * |B|) * |C| = |A| * (|B| * |C|) , - asociatývnosť násobenia

3e) |A| * (|B| + |C|) = (|A| * |B| + |A| * |C|)

Veta (Aritmetické vlastnosti) Pre všetky množiny A, B, C platí

4a) $|A|^{|B| + |C|} = |A|^{|B|} * |A|^{|C|}$,

4b) $(|A| * |B|)^{|C|} = |A|^{|C|} * |B|^{|C|}$,

4c) $(|A|^{|B|})^{|C|} = |A|^{|B| * |C|}$.

Lema Pre ľubovoľnú množinu X platí $| P(X) | = 2^{|X|}$.

Def |N| sa označuje **$\aleph_0$ - Alef nula** .

Veta $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.

Veta $\aleph_0 * \aleph_0 = \aleph_0$.

Veta (Cantorova veta) $|X| < | P(X) |= 2^{|X|}$.

Dôsledok 1. $|X| < 2^{|X|}$.

Dôsledok 2. Neexistuje množina všetkých množín.

Konečné množiny

Def Množina A sa nazýva **konečná** ak $|A| < \aleph_0$ - čiže ak |A| < |N| .

Def **Nn** = {0, 1, 2, 3, ..., n-1} , Nn+1 = Nn $\cup$ {n} .

Def Budeme hovoriť, že množina A má n prvkov a písať |A| = n kde $n \in N$, ak |A| = |Nn|.

Lema 1 $\forall n \in N$, |Nn| < |Nn+1| .

Veta 1 Ak množina má n prvkov ($n \in N$), tak je konečná .

Veta 2 Pre n, $m \in N$ je $|Nn| = |Nm| \Leftrightarrow n=m$.

Lema 2 Ak $A \subseteq Nn$ tak $\exists\, k \in N$ také, že |A| = k .

Lema 3 Ak množina $A \subseteq N$ je zhora neohraničená, tak potom |A| = |N| .

Veta 3 Ak množina A je konečná, tak $\exists$ také prirodzené číslo $n \in N$ že |A| = n.

Veta Nech množiny A, B sú konečné a nech |A| = n , |B| = m a zároveň $A \cap B = \emptyset$, potom platí

a) $|A| + |B| = |A \cup B| = n + m$,

b) |A| * |B| = |AxB| = n * m,

c) $|A|^{|B|} = | A^B | = n^m$.

Lema 4 Nech f je zobrazenie z NxN do N také, že $\forall$ n, $m \in N$, platí

(1) f(n,0) = n , g(n,m + 1) = g(n,m) + n , potom

(2) f(n,m + 1) = f(n,m) + 1 , potom platí

(3) f(n,m) = n + m .

(4) n + 0 = n ,

(5) n + 1 = n + m + 1.

Poznámka Vlastnosti (4) a (5) jednoznačne charakterizujú sčitovanie prirodzených čísel.

Lema 5 Nech g je zobrazenie z NxN do N také, že $\forall$ n, $m \in N$ platí

(9) g(n,0) = 0,

(10) g(n,m + 1) = g(n,m) + n , potom

(11) g(n,m) = n * m.

Lema 6 Nech h: $NxN \rightarrow N$, $\forall$ n, $m \in N$ platí

(12) h(n,0) = 1

(13) $h(n,m + 1) = h(n,m) * n$, potom
(14) $h(n,m) = n^m$.

Veta 4 Nech A, B sú konečné mnoižiny, $|A| = n$, $|B| = m$

a) Nech A, B sú disjunktné, teda $A \cap B = \emptyset$, potom $|A \cup B| = n + m$, <-- pravidlo súčtu
b) $|AxB| = n * m$,
c) $|A^m| = n^m$.

Dôsledok 2 Ak A, B sú konečné množiny, potom $A \cup B$, AxB, A^B, P(A) sú konečné množiny.

Veta 5 Nech Ak, $1 \leq k \leq n$ sú množiny také, že

a) $|Ak| = m$ pre $1 \leq k \leq m$
b) $Ak \cap Ak' = \emptyset$ pre $k \neq k'$, potom $|\cup k=1$ do n, $Ak| = m * n$.

Veta 6 Nach Ak, $1 \leq k \leq n$ sú množiny po dvoch disjunktné a $|Ak| \geq n$, potom $\forall\ k \in (1,n) \Rightarrow |\cup k=1$ do n, $Ak| \geq m * n$.

Def (Dedeklidova definícia konečnosti množín - časť je menšia jako celok) Hovoríme, že množina A je konečná ak pre každú jej podmnožinu $X \subset A$, takú, že $X \neq A$ platí $|X| < |A|$.

Veta 7