

CELOČÍSELNÉ PROGRAMOVANIE (CP)

Sú tri možnosti CP, podľa toho, akú doménu (definičný obor) majú premenné v danej úlohe:

n – počet všetkých premenných

n' – počet celočíselných premenných

1. Ak $n' < n$, potom ide o tzv. zmiešané úlohy („mixed integer programming“)
2. Ak $n' = n$, potom ide o čisté celočíselné programovanie,
3. Ak $n' = n \wedge x_i \in \{0, 1\}$ ($i = 1, \dots, n$), potom ide o tzv. bivalentné programovanie

METÓDY RIEŠENIA ÚLOH CP:

- A) **Úplné** (napr. metóda vetvenia a medzí alebo metóda sečných nadrovín) – zaručujú nájdenie optimálneho riešenia, ale v nepolynomiálnom čase v závislosti od veľkosti úlohy (tj. počtu premenných n).
- B) **Približné** (napr. simulované žíhanie, genetické algoritmy) – tieto metódy nikdy nezaručia nájdenie optimálneho riešenia, ale v rozumnom čase poskytnú celkom dobré („suboptimálne“) riešenie.

METÓDA VETVENIA A MEDZÍ

1. **Princíp vetvenia** – množinu prípustných riešení (MPR) rozkladá na radu spravidla disjunktívnych podmnožín.
2. **Princíp odhadu medzí** – ide o odhady hodnoty kritériálnej funkcie na MPR, resp. na niektorej jej podmnožine (tzv. horná medza a dolná medza).

POSTUP (pre prípad maximalizácie kritériálnej funkcie):

- 1) Uvažujeme celú MPR ako jediného kandidáta vetvenia a stanovíme dolnú (spodnú) medzu kritériálnej funkcie $f_S = -\infty$ (ide o najlepšie doteraz nájdené riešenie, platí globálne) a hornú medzu kritériálnej funkcie f_H (platí len pre danú (pod)množinu riešení) odhadneme v závislosti od charakteru úlohy (najväčšia teoreticky možná hodnota kritériálnej funkcie pre riešenie z MPR).
- 2) **Vetvenie** – podľa vybraného pravidla vetvenia (napr. najvyššia hodnota f_H), vyberieme z kandidátov vetvenia jednu množinu a rozložíme ju na jednu alebo viac podmnožín prípustných riešení.
 - Ak je súbor kandidátov prázdny, tak algoritmus končí. Pritom riešenie zodpovedajúce aktuálnej spodnej medzi f_S je optimálne. T.j. $f_S = f(\bar{x}) \Rightarrow \bar{x}$ je optimálne riešenie.
 - Ak $f_S = -\infty$, potom riešenie neexistuje (MPR je prázdna).
- 3) **Stanovenie hornej medze f_H** – pre každú novú podmnožinu stanovíme hornú medzu kritériálnej funkcie na tejto podmnožine (najlepšia teoreticky možná hodnota kritériálnej funkcie pre riešenia z danej podmnožiny).
- 4) **Orezávanie** – z ďalšieho skúmania vylúčime tie podmnožiny, pre ktoré $f_H < f_S$, alebo ktoré sú prázdne.
- 5) **Stanovenie spodnej medze f_S** – určíme najlepšie prípustné riešenie \bar{x} pre každú novú podmnožinu:
 - Ak $f(\bar{x}) \geq f_S \Rightarrow$ upravíme aktuálnu dolnú medzu $f_S = f(\bar{x})$, \bar{x} je najlepšie doteraz nájdené riešenie a opätovne sa vykoná orezávanie, pričom sa zistí či nemožno vylúčiť ďalšie podmnožiny na základe podmienky z kroku 4).
- 6) **Návrat do bodu 2)**

Príklad: Výber zákaziek

V skúmanom období môže podnik prevziať 6 rôznych zákaziek, ktoré sa líšia spotrebou času a materiálu. Kapacity výrobného zariadenia a zásob materiálu sú obmedzené. Úlohou je rozhodnúť, ktoré zákazky má podnik prevziať.

Zakazka	1	2	3	4	5	6	Kapacita
Zisk	11	63	9	5	4	8	-
Cas	1	7	1	1	1	5	15
Material	15	70	10	5	3	2	100

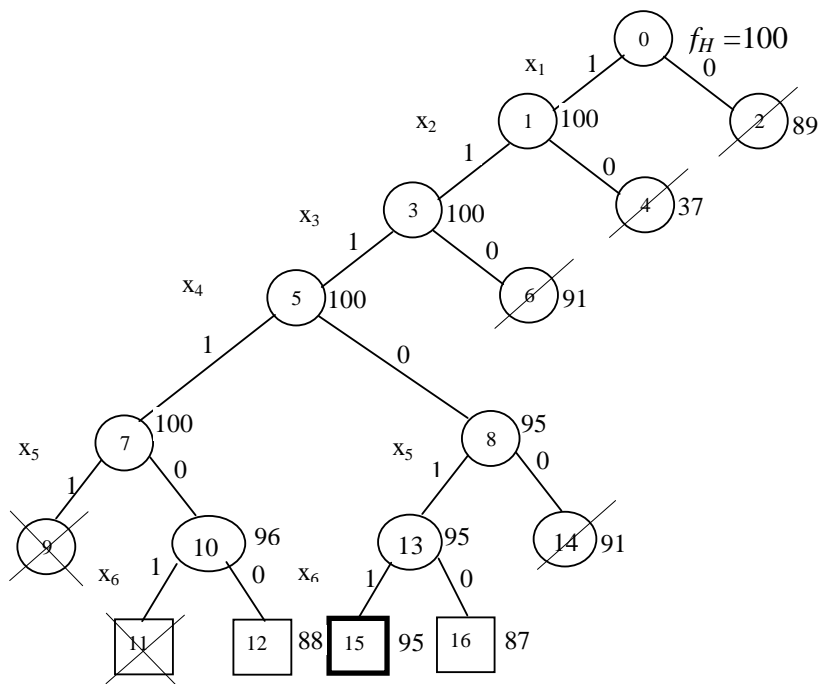
0

$$f(\bar{x}) = 11x_1 + 63x_2 + 9x_3 + 5x_4 + 4x_5 + 8x_6 = \text{MAX}$$

$$x_1 + 7x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 5x_6 \leq 15$$

$$15x_1 + 70x_2 + 10x_3 + 5x_4 + 3x_5 + 2x_6 \leq 100$$

OBRÁZOK:



VÝPOČET:

1. Vetvenie

1

$$11 + 63x_2 + 9x_3 + 5x_4 + 4x_5 + 8x_6 = \text{MAX}$$

$$7x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 5x_6 \leq 14$$

$$70x_2 + 10x_3 + 5x_4 + 3x_5 + 2x_6 \leq 100$$

$$f_H = 100$$

$$f_S = f(1, 0, 0, 0, 0, 0) = 0$$

2

$$63x_2 + 9x_3 + 5x_4 + 4x_5 + 8x_6 = \overset{!}{MAX}$$

$$7x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 5x_6 \leq 15$$

$$70x_2 + 10x_3 + 5x_4 + 3x_5 + 2x_6 \leq 100$$

$$f_H = 89$$

$$f_S = f(0,0,0,0,0,0) = 0$$

2. Vetvenie (Rozhodli sme sa pre 1) lebo dáva nádej na väčší zisk.)

- Vychádzajú z 1

3

$$74 + 9x_3 + 5x_4 + 4x_5 + 8x_6 = \overset{!}{MAX}$$

$$x_3 + x_4 + x_5 + 5x_6 \leq 7$$

$$10x_3 + 5x_4 + 3x_5 + 2x_6 \leq 15$$

$$f_H = 100$$

$$f_S = f(1,1,0,0,0,0) = 74$$

4

$$11 + 9x_3 + 5x_4 + 4x_5 + 8x_6 = \overset{!}{MAX}$$

$$x_3 + x_4 + x_5 + 5x_6 \leq 14$$

$$10x_3 + 5x_4 + 3x_5 + 2x_6 \leq 85$$

$$f_H = 37$$

$$f_S = f(1,0,0,0,0,0) = 11$$

3. Vetvenie

- Vychádzajú z 3

5

$$83 + 5x_4 + 4x_5 + 8x_6 = \overset{!}{MAX}$$

$$x_4 + x_5 + 5x_6 \leq 15$$

$$5x_4 + 3x_5 + 2x_6 \leq 100$$

$$f_H = 100$$

$$f_S = f(1,1,1,0,0,0) = 83$$

6

$$74 + 5x_4 + 4x_5 + 8x_6 = \overset{!}{MAX}$$

$$x_4 + x_5 + 5x_6 \leq 7$$

$$5x_4 + 3x_5 + 2x_6 \leq 15$$

$$f_H = 91$$

$$f_S = f(1,1,0,0,0,0) = 74$$

4. Vetvenie

- Vychádzajú z 5

7

$$88 + 4x_5 + 8x_6 = \overset{!}{MAX}$$

$$x_5 + 5x_6 \leq 5$$

$$3x_5 + 2x_6 \leq 0$$

$$f_H = 100$$

$$f_S = f(1,1,1,1,0,0) = 88$$

8

$$83 + 4x_5 + 8x_6 = \overset{!}{MAX}$$

$$x_5 + 5x_6 \leq 6$$

$$3x_5 + 2x_6 \leq 5$$

$$f_H = 95$$

$$f_S = f(1,1,1,0,0,0) = 83$$

5. Vetvenie

- Vychádzajú z (7)

$$\begin{aligned} \textcircled{9} \quad & 92 + 8x_6 = \overset{!}{MAX} \\ & 5x_6 \leq 4 \\ & 2x_6 \leq -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_H &= 100 \\ f_S &= f(1,1,1,1,0) = 92 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{10} \quad & 88 + 8x_6 = \overset{!}{MAX} \\ & 5x_6 \leq 5 \\ & 2x_6 \leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_H &= 96 \\ f_S &= f(1,1,1,1,0) = 88 \end{aligned}$$

6. Vetvenie

- Vychádzajú z (10)

$$\begin{aligned} \boxed{11} \quad & f(\bar{x}) = 96 \\ & 5 \leq 5 \\ & 2 \leq 0 \quad \Rightarrow \text{nesplňa} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{12} \quad & f(\bar{x}) = 88 \\ & 0 \leq 5 \\ & 0 \leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_H &= 88 \\ f_S &= f(1,1,1,1,0) = 88 \end{aligned}$$

7. Vetvenie

- Vychádzajú z (8)

$$\begin{aligned} \textcircled{13} \quad & 87 + 8x_6 = \overset{!}{MAX} \\ & 5x_6 \leq 5 \\ & 2x_6 \leq 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_H &= 95 \\ f_S &= f(1,1,1,0,1,0) = 87 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{14} \quad & 83 + 8x_6 = \overset{!}{MAX} \\ & 5x_6 \leq 6 \\ & 2x_6 \leq 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_H &= 91 \\ f_S &= f(1,1,1,0,0,0) = 83 \end{aligned}$$

8. Vetvenie

- Vychádzajú z (13)

$$\begin{aligned} \boxed{15} \quad & f(\bar{x}) = 95 \\ & 0 \leq 0 \\ & 0 \leq 0 \end{aligned}$$

$$f_S = f(1,1,1,0,1,1) = 95$$

$$\begin{aligned} \boxed{16} \quad & f(\bar{x}) = 87 \\ & 0 \leq 5 \\ & 0 \leq 2 \end{aligned}$$

$$f_S = f(1,1,1,0,1,0) = 87$$