# ALOKAČNÉ ÚLOHY

## ALOKÁCIA VÝROBNÝCH PROCESOV

1. Alokácia výrobných procesov (AVP) -> do jedného miesta
   Metóda: - pomerovo-indexová metóda
   Kedy: - ak sú známe lokality a treba vybrať najvhodnejšiu
   - ak je ťažké vyčísliť presné náklady
   - ak nie sú presne známi dodávatelia ani odberatelia
   - ak existuje veľa faktorov, ktoré je ťažko ohodnotiť, ale je možné vyjadriť ich závažnosť voči ostatným faktorom a porovnať ich hodnoty pre jednotlivé lokality

   Postup:

   a) Pre vybrané lokality (L = 1 ... n) a daný výrobný proces vyberáme rozhodujúce faktory ($F_1$ ... $F_n$). Každému faktoru $F_i$ prisúdime váhu $w_i$ najlepšie tak, aby suma bola 1.

   $F_i$ (i = 1 ... m): $w_i$ => $\sum_{i=1}^{m} w_i = 1$

   b) Pre hodnotenie jednotlivých faktorov $F_i$ zvolíme interval hodnotenia (tzv. kardinálnu mieru) $HF_i$, ktorý bude mať hornú hranicu $KH_i$ a dolnú hranicu $KD_i$, t.j. $HF_i \in \langle KD_i, KH_i \rangle$.

   c) Experti stanovia hodnotenie $HF_i^L$ ($L$ = 1 ... n, $i$ = 1 ... m) pre všetky lokality $L$ a pre všetky a faktory $F_i$.

   d) Výsledné hodnotenie danej lokality $L$ je dané váženým súčtom:

   $$C^L = \sum_{i=1}^{m} w_i HF_i^L$$

   e) Ako najlepšia bude vybraná tá lokalita, pre ktorú je hodnota $C^L$ maximálna, t.j. $L = \max C^L$

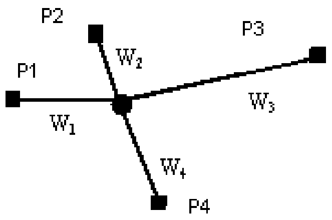
**Príklad:**
Úlohou je vybrať najvhodnejšiu lokalitu pre umiestnenie výroby drevených hračiek z troch vytipovaných lokalít (Spišská Nová Ves – SNV, Rožňava – RV, Svidník – Sk).

| cislo | Faktory | $W_i$ | SNV $[L_1]$ | $W_iHF_i^1$ | RV $[L_2]$ | $W_iHF_i^2$ | Sk $[L_3]$ | $W_iHF_i^3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Suroviny | 0.13 | 8 | 1.04 | 6 | 0.78 | 7 | 0.91 |
| 2 | Doprava | 0.09 | 8 | 0.72 | 4 | 0.36 | 6 | 0.54 |
| 3 | Energia | 0.09 | 4 | 0.36 | 4 | 0.36 | 2 | 0.18 |
| 4 | Voda | 0.06 | 8 | 0.48 | 5 | 0.30 | 9 | 0.54 |
| 5 | Financie | 0.18 | 7 | 1.26 | 2 | 0.36 | 6 | 1.08 |
| 6 | Odbyt | 0.20 | 5 | 1.00 | 2 | 0.40 | 4 | 0.80 |
| 7 | Spoje | 0.11 | 7 | 1.77 | 7 | 0.77 | 3 | 0.33 |
| 8 | Prac. sily | 0.13 | 5 | 0.65 | 5 | 0.65 | 5 | 0.65 |
| | | $\sum_{i=1}^{8} W_i = 1$ | | $c^1 = 7.05$ | | $c^2 = 3.98$ | | $c^3 = 4.03$ |

2. Alokácia výrobných procesov (AVP) -> do jedného miesta - Optimálne umiestenie distribučného centra

***Definícia úlohy:***

V rovine existuje m-objektov (odberateľov) ($P_1$ ... $P_m$) so súradnicami ($a_1$, $b_1$), … ($a_n$, $b_n$). Treba nájsť súradnice pre umiestnenie nového objektu (distribučného centra) $\bar{x}$ = (x, y) tak, aby celkové náklady na realizáciu väzieb medzi existujúcimi objektmi a novým objektom boli minimálne. Intenzitu väzby medzi objektmi $P_i$ a novým objektom $\bar{x}$ vyjadrujú koeficienty $w_i$ (i = 1 ... n).




Kriteriálna funkcia:

$$f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{m} w_i d(\bar{x}, P_i)$$

Kde vzdialenosť $d(\bar{x}, P_i)$ môže byť:

a) **Euklidovská** $\sqrt{(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2}$

b) **Kvadrát Euklidovskej** $(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2$

c) **Rektilineárna** $\min\limits_{x,y}\left[w_i\left(|x-a_i| + |y-b_i|\right)\right]$

d) **Minimalizácia najvzdialenejšieho bodu** $\min\left[\max\sqrt{(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2}\right]$

Pre každý typ vzdialenosti je iný postup výpočtu optimálneho umiestnenia nového objektu (distribučného centra).

a) **Euklidovská vzdialenosť** – používa sa numerické riešenie (tzv. hyperbolická aproximácia).

Hľadáme extrém funkcie dvoch premenných (súradnica $x$ a súradnica $y$ pre umiestnenie nového objektu – distribučného centra), preto derivujeme funkciu nákladov

$$f(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{m} w_i \sqrt{(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2}$$

parciálne a jednotlivé parciálne derivácie položíme rovné nule:

$$\frac{\partial f(\overline{x})}{\partial x} = \sum_{i=1}^{m} \frac{w_i(x-a_i)}{\sqrt{(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2}} \overset{!}{=} 0 \qquad \frac{\partial f(\overline{x})}{\partial y} = \sum_{i=1}^{m} \frac{w_i(y-b_i)}{\sqrt{(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2}} \overset{!}{=} 0$$

Po úprave a zavedení substitúcie $g_i(x,y)$ dostávame postupne:

pre $x$-ovú súradnicu:

$$x\sum_{i=1}^{m} \frac{w_i}{\sqrt{(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2}} = \sum_{i=1}^{m} \frac{w_i a_i}{\sqrt{(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2}}$$

$$g_i(x,y) = \frac{w_i}{\sqrt{(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2 + \xi}}$$

$$x\sum_{i=1}^{m} g_i = \sum_{i=1}^{m} a_i g_i$$

$$x^{(k)} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i g_i\left(x^{(k-1)}, y^{(k-1)}\right)}{g_i\left(x^{(k-1)}, y^{(k-1)}\right)}$$

$$x^{(0)} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i w_i}{w_i}$$

pre $y$-ovú súradnicu:

$$x\sum_{i=1}^{m} \frac{w_i}{\sqrt{(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2}} = \sum_{i=1}^{m} \frac{w_i b_i}{\sqrt{(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2}}$$

$$g_i(x,y) = \frac{w_i}{\sqrt{(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2 + \xi}}$$

$$y\sum_{i=1}^{m} g_i = \sum_{i=1}^{m} b_i g_i$$

$$y^{(k)} = \sum_{i=1}^{m} \frac{b_i g_i\left(x^{(k-1)}, y^{(k-1)}\right)}{g_i\left(x^{(k-1)}, y^{(k-1)}\right)}$$

$$y^{(0)} = \sum_{i=1}^{m} \frac{b_i w_i}{w_i}$$

Dostávame iteračné vzorce pre výpočet súradníc optimálneho umiestnenia distribučného centra $x^{(k)}$ a $y^{(k)}$. Na začiatku stanovíme hodnoty pre ťažisko ($x^{(0)}$ a $y^{(0)}$) a postupne v každej ďalšej iterácii konverguje riešenie k optimu. Po dosiahnutí požadovanej presnosti (napríklad že hodnota kriteriálnej funkcie na druhom ráde za desatinnou čiarkou sa už nemení) výpočet ukončíme a aktuálne hodnoty $x^{(k)}$ a $y^{(k)}$ určujú doporučené umiestnenie distribučného centra.

**Príklad:**
Je potrebné nájsť optimálne umiestnenie trafostanice pre 4 stanice s danými súradnicami: A[2,6], B[6,7], C[7,4], D[5,2], káblom s mernými ročnými nákladmi 3 PJ/km. Nová stanica bude napájaná káblom s ročnými nákladmi 5 PJ/km z existujúcej trafostanice E[1,1].

| i | Miesto | $a_i$ | $b_i$ | $w_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | A | 2 | 6 | 3 |
| 2 | B | 6 | 7 | 3 |
| 3 | C | 7 | 4 | 3 |
| 4 | D | 5 | 2 | 3 |
| 5 | E | 1 | 1 | 5 |

| i | $x^{(i)}$ | $y^{(i)}$ | $f(x^{(i)}, y^{(i)})$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 3.82 | 3.65 | 55.935 |
| 1 | 3.98 | 3.53 | 55.772 |
| 2 | 4.06 | 3.47 | 55.730 |
| 3 | 4.10 | 3.44 | 55.719 |
| 4 | 4.12 | 3.42 | 55.716 |

Vyjdeme z počiatočných hodnôt súradníc $x^{(0)}$ a $y^{(0)}$ pre ťažisko a vypočítame zodpovedajúcu hodnotu kriteriálnej funkcie $f(x^{(0)}, y^{(0)})$. Potom vypočítame substitučné koeficienty $g_i(x^{(0)}, y^{(0)})$ a dosadíme ich do iteračných vzorcov pre výpočet $x^{(1)}$ a $y^{(1)}$.

$$x^{(0)} = \frac{3.(2+6+7+5)+5.1}{3+3+3+3+5} = \frac{65}{17} \doteq 3{,}82$$

$$y^{(0)} = \frac{3.(6+7+4+2)+5.1}{3+3+3+3+5} = \frac{62}{17} \doteq 3{,}65$$

$$f\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right) = 3.\sqrt{(3{,}82-2)^2 + (3{,}65-6)^2} + \ldots + 5.\sqrt{(3{,}82-1)^2 + (3{,}65-1)^2} = 55{,}935$$

$$g_1\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right) = \frac{3}{.\sqrt{(3{,}82-2)^2 + (3{,}65-6)^2} + 0{,}001} \doteq 1{,}0092$$

...

$$g_1\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right) = \frac{5}{.\sqrt{(3{,}82-1)^2 + (3{,}65-1)^2} + \xi} \doteq$$

Opäť vypočítame hodnotu kriteriálnej funkcie pre nové umiestnenie distribučného centra $f(x^{(1)}, y^{(1)})$ a celý postup iteratívne opakujeme až do chvíle, kým zmena hodnoty kriteriálnej funkcie v dvoch po sebe nasledujúcich iteráciách klesne pod jednu stotinu PJ (viď. obrázok vyššie).

b) Ak sa vzdialenosť meria ako **kvadrát Euklidovskej vzdialenosti**, t.j. $(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2$, potom je optimálnym umiestnením distribučného centra jeho ťažisko (viď. vyššie).

c) V prípade **rektilineárnej vzdialenosti** sa používa na výpočet optimálneho umiestnenia distribučného centra tzv. mediánové umiestenie. Optimálneho hodnoty pre súradnicu *x* aj *y* totiž musia ležať v v x-ovej, resp. y-ovej súradnici niektorého zo vstupných objektov (pre každú súradnicu to samozrejme môže byť iný objekt).

V tomto prípade je potrebné najprv jednotlivé objekty usporiadať vzostupne podľa ich súradnice *x* (resp. *y*), a potom vypočítať jednotlivé čiastkové súčty váh $w_i$ príslušných týmto objektom, t.j.:

pre $x$-ovú súradnicu:

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_m$$
$$s_k = \sum_{i=1}^{k} w_i$$
$$s_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} w_i$$
$$s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq s_m$$
$$s_{k-1} \leq s_m \leq s_k$$

pre $y$-ovú súradnicu:

$$b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_m$$
$$s_k = \sum_{i=1}^{k} w_i$$
$$s_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} w_i$$
$$s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq s_m$$
$$s_{k-1} \leq s_m \leq s_k$$

**Príklad:**
Použijeme tie isté vstupné údaje ako v príklade pre prípad Euklidovskej vzdialenosti vyššie.

Pre $x$-ovú súradnicu:

$a_5 \leq a_1 \leq a_4 \leq a_2 \leq a_3$
$s_5 = 5$
$s_1 = 5 + 3 = 8$
$s_4 = 5 + 3 + 3 = 11$ -> optimálna súradnica
$s_2 = 5 + 3 + 3 + 3 = 14$
$s_3 = 5 + 3 + 3 + 3 + 3 = 17$ **5**
$s_m = ½ \ 17 = 8,5$

pre $y$-ovú súradnicu:

$b_5 \leq b_4 \leq b_3 \leq b_1 \leq b_2$
$s_5 = 5$
$s_4 = 5 + 3 = 8$
$s_3 = 5 + 3 + 3 = 11$ ->optimálna súradnica
$s_1 = 5 + 3 + 3 + 3 = 14$
$s_2 = 5 + 3 + 3 + 3 + 3 = 17$ **4**
$s_m = ½ \ 17 = 8,5$

$\bar{x} = (5, 4)$

d) V prípade **minimalizácie vzdialenosti najvzdialenejšieho objektu** je optimálnym umiestnením distribučného centra stred kružnice s minimálnym polomerom opísanej tak, že v nej ležia všetky vstupné objekty.