História

Človek sa vždy snažil popísať veci čo najpresnejšie. Ak niečo nevieme úplne popísať, nastáva problém. Už starí antickí filozofi sa zaoberali problémom neurčitosti. Zeno popísal logický paradox: stojí na pláži a pred sebou má kopu piesku. Ak odoberie zrniečko, dve atď., je to ešte vždy kopa piesku. Po odobratí ďalších zrniečok je z nej kôpka piesku. Položil si otázku, kedy je hranica medzi kopou a kôpkou.

Jedným zo zberateľov paradoxov bol aj Brit Bertrand Russel. Poukázal na mnoho paradoxov, napr. aj na paradox holiča, ktorý si dal nad dvere vyvesiť štít s textom: „*Holím všetkých a zároveň iba tých mužov, ktorí sa neholia sami.*“ Prísne logicky vzaté, kto potom holí holiča?

Snaha dosiahnuť za každú cenu presnosť môže v skutočnosti viesť k nepresnosti. S problémom presnosti sa potýkali vedci aj v jadrovej fyzike, mnoho paradoxov sa nachádza aj v teórii relativity. Neurčitosť, nepresnosť, nejasnosť sú súčasťou života.

Fuzzy logika je jedným z mála prostriedkov, ktoré sa zaoberajú priestorom aj medzi extrémami (0 – 1, áno – nie).

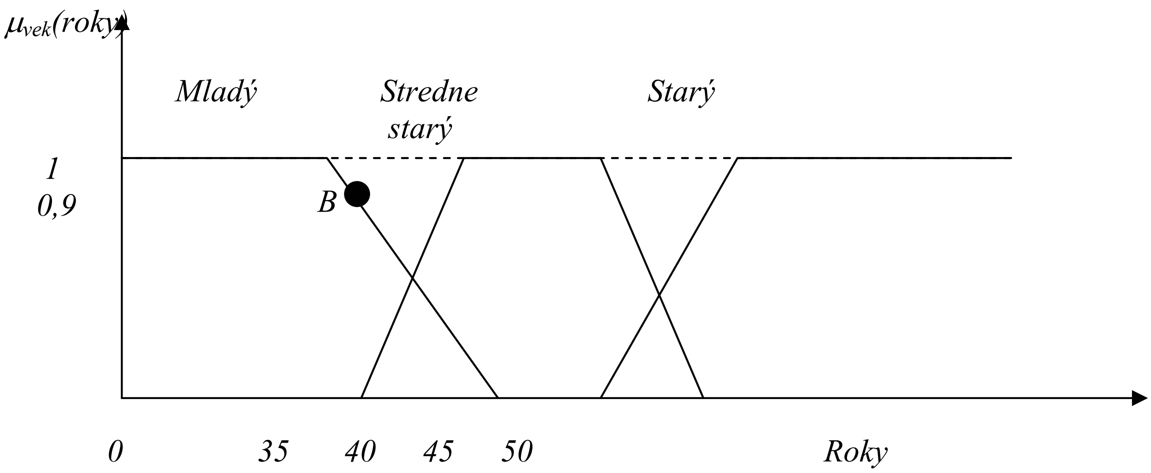
V r. 1938 Max Black (lingvista) ako prvý definoval neurčité (vágne) množiny.

V 50-tych rokoch sa vedci pokúšali prísť na to, ako využiť počítače pre potreby riadenia. Ak chceme niečo riadiť, musíme to vedieť popísať. Ak nevieme dostať presný fyzikálny popis, metódy sú nevyužiteľné.

V r. 1965 L. A. Zadeh z Baku publikoval článok „Fuzzy sets“. Do veľkej miery prebral Blackov aparát, no namiesto vágny zaviedol pojem fuzzy. Fuzzy – neurčitý, nejasný, hmlistý, nepresný, vágny.

V súčasnosti existuje niekoľko tisíc aplikácií využívajúcich fuzzy logiku, s ktorými bežní ľudia prichádzajú do styku (holiaci strojček, fotoaparát, inteligentné mikrovlnné rúry, inteligentné práčky, ...), na vyšších úrovniach riadenia, kde je nevyspytateľný ľudský faktor (jadrová elektráreň).

Základy teórie fuzzy množín



Obrázok 1. Príklad definície pojmu *vek človeka* s jej lingvistickými hodnotami *mladý, stredne starý, starý*

Používame do 7 slovíčok (mladý, stredne starý, starý,...). Jednotlivým slovíčkam sa snažíme priradiť obor hodnôt. Používame interval od 0 po 1 (0 – isto nepatrí, 1 – isto patrí) čo je zásadný rozdiel medzi fuzzy množinami a ostrými množinami (Cantor). B patrí so stupňom príslušnosti 0,9 do kategórie mladý.

Teória pravdepodobnosti nevie pracovať s protirečivou informáciou, pracuje s istou formou neurčitosti.

Definícia fuzzy množiny:

Nech X je súbor objektov (prvkov) označovaných symbolom x. Nech M je množina čísel, na ktorej je definovaný zväz.

Fuzzy množina A je množina usporiadaných dvojíc

$$A = \{(x, \mu_A(x)), x \in X\},$$

kde: X – univerzálna množina (univerzum)
μ_A: X → M - funkcia príslušnosti
μ_A (x) - stupeň príslušnosti objektu (prvku) x do A.

Ak M = {0,1} pre všetky x $\in$ X, tak sa jedná o klasické (ostré) množiny, t.j. špeciálny prípad fuzzy množín.

Všeobecná konvencia:

- M uzavretý interval reálnych čísel $\langle 0;1 \rangle$
- $\mu_A(x) = 0,$ resp. $\mu_A(x) = 1$ predstavuje najmenší resp. najväčší stupeň príslušnosti.

Zjednodušená reprezentácia fuzzy množín (z hľadiska algebraickej štruktúry) ako usporiadaná trojica:

$$A = (X, M, \mu_A),$$

kde X, M, μ_A – obyčajné množiny,
X – univerzum (definičný obor),
M – obor hodnôt vždy s významom stupňov príslušnosti,
μ_A – funkcia príslušnosti.

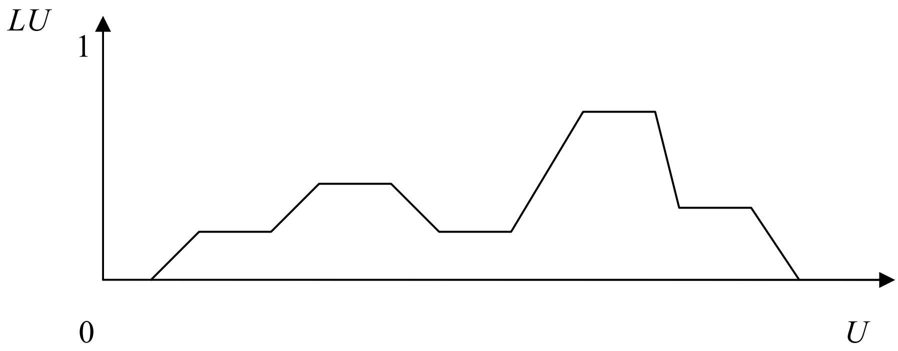
Charakteristiky popisujúce vlastnosti funkcie príslušnosti

1. Nosič A (support) - množina suppA:
$$\text{suppA} = \{x \in X, \eta_A(x) > 0\}$$
2. α-rez A (cut) - množina A_α:
$$A_\alpha = \{x \in X, \eta_A(x) \geq \alpha\}$$

α-rez je striktný, ak pre všetky $x \in A_\alpha$ je $\eta_A(x) > \alpha$.

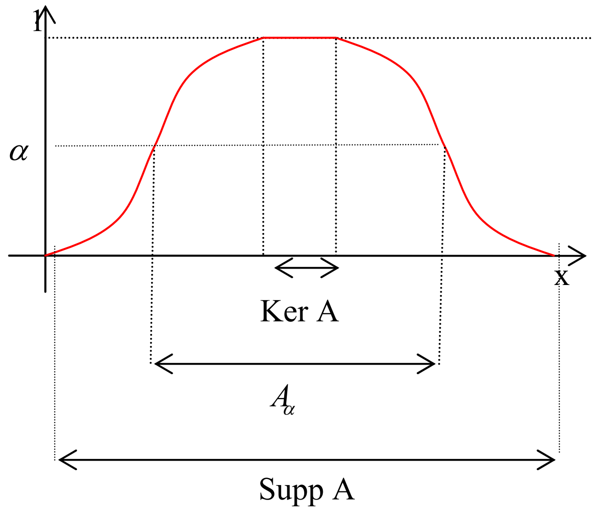
3. α-hladina A (level) - množina A^α:
$$A^\alpha = \{x \in X, \mu_A(x) = \alpha\}$$
4. Jadro A (nucleus) - množina KerA:
$$\text{KerA} = \{x \in X, \mu_A(x) = 1\}$$
5. Vrchol A (peak) - prvok P(A) jadra A v prípade, že jadro je jednoprvkovou množinou.
6. Konvexnosť - fuzzy množina A je konvexná práve vtedy, ak pre každé dva prvky x,y$\in$ X a každé číslo $\tau \in <0;1>$ platí:
$$\mu_A(\tau x + (1-\tau)y) \geq \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}$$

Nekonvexná funkcia príslušnosti:



- sú nežiadúce, snažíme sa zamedziť ich výskyt.

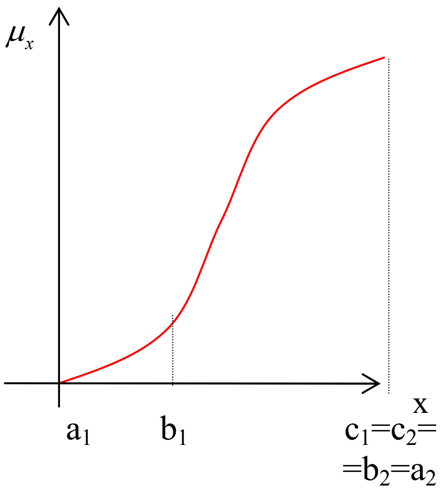
Geometrická interpretácia charakteristík funkcie príslušnosti:



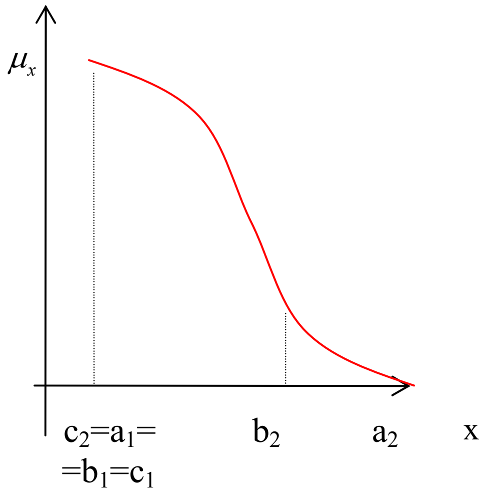
Spôsoby zápisu fuzzy množiny

1. Ak univerzum je v diskrétnom tvare, t.j. $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$:
   a) A = $\{(x_1, \mu_A(x_1)), (x_2, \mu_A(x_2)), ..., (x_n, \mu_A(x_n))\}$
   b) A = $\{\mu_A(x_1)/x_1, \mu_A(x_2)/x_2, ..., \mu_A(x_n)/x_n\}$
   c) A = $\{\mu_A(x_1)/x_1 + \mu_A(x_2)/x_2 + ... + \mu_A(x_n)/x_n\}$
   d) A = $\sum_{i=1}^{n} \mu_A(x_i)/x_i$
   e) Graficky, pomocou diskrétnej funkcie príslušnosti $\mu_A(x_i)$, pre všetky $x_i \in X$ $i = 1, ..., n$.
2. Ak univerzum je v spojitom tvare:
   a) A = $\int_x \mu_A(x)/x \, dx$
   b) Graficky, pomocou spojitej funkcie príslušnosti $\mu_A(x)$, pre všetky $x \in X$

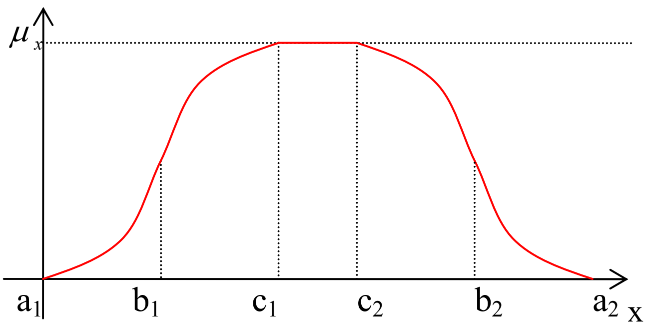
Základné typy a spôsoby konštruovania funkcií príslušnosti



S - plus



S - mínus

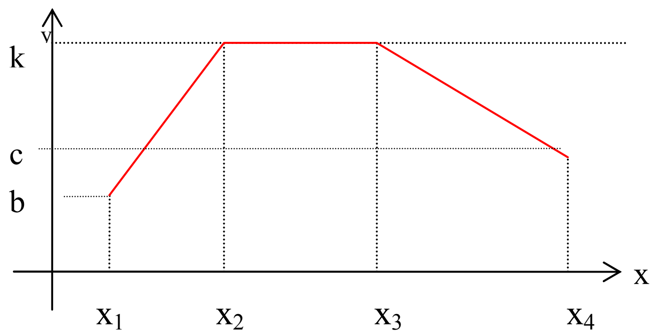


zvonovitá funkcia(bell-shaped) π

Funkcie: lineárne a nelineárne (zlinearizované)

$$\mathcal{F}(x,a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2)=\begin{cases} 0 & ak\ x<a_1\ alebo\ x>a_2 \\ 1 & ak\ c_1\leq x\leq c_2 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{x-a_1}{b_1-a_1}\right)^2 & ak\ a_1\leq x<b_1 \\ 1-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c_1}{c_1-b_1}\right)^2 & ak\ b_1\leq x<c_1 \\ 1-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c_2}{b_2-c_2}\right)^2 & ak\ c_2<x\leq b_2 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{x-a_2}{a_2-b_2}\right)^2 & ak\ b_2<x\leq a_2 \end{cases}$$

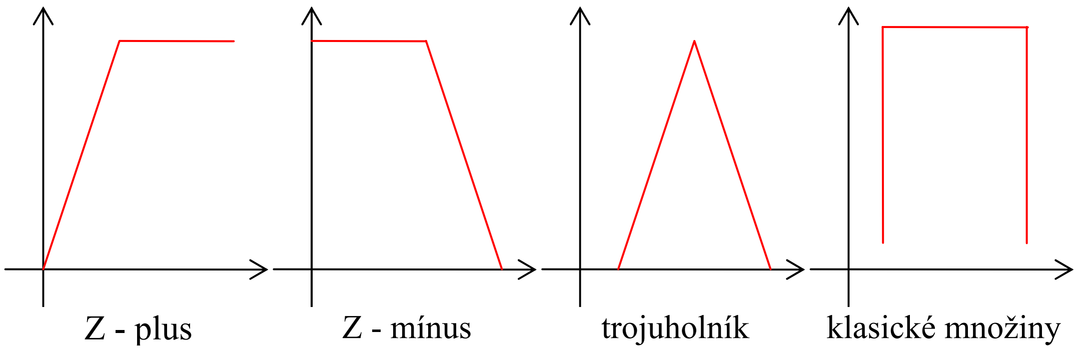
$x,a_1,b_1,c_1,c_2,b_2,a_2\in U.$

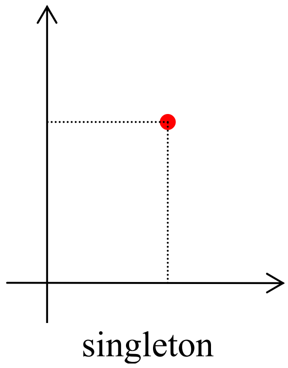


lichobežníková funkcia príslušnosti

$$\mathcal{F}(x,x_1,x_2,x_3,x_4,k,b,c)=\begin{cases} 0 & x\in<0,x_1) \\ \left(\frac{k-b}{x_2-x_1}\right)(x-x_1)+b & x\in<x_1,x_2) \\ k & x\in<x_2,x_3) \\ \left(\frac{k-c}{x_3-x_4}\right)(x-x_4)+c & x\in<x_3,x_4> \\ 0 & x\in(x_4,+\infty) \end{cases}$$

Linearizované tvary niektorých typických priebehov funkcie príslušnosti:





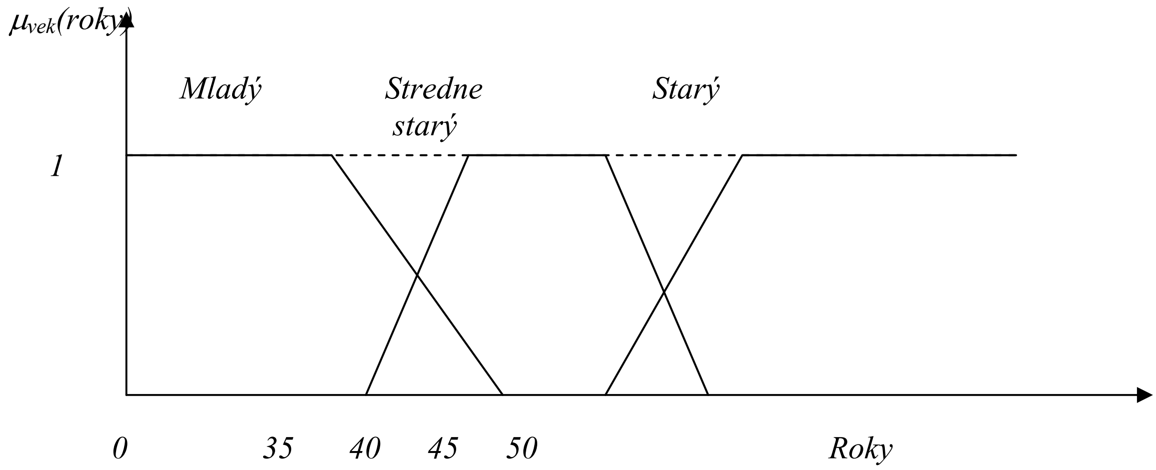
Spôsoby získavania funkcií príslušnosti

1. Subjektívne ohodnocovanie a odvodzovanie (riešenie typu ad-hoc)
2. Transformácia frekvenčných a štatistických údajov
3. Fyzikálne merania
4. Adaptácia, učenie a ladenie

Definícia lingvistickej premennej

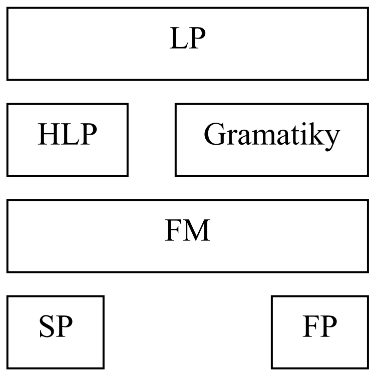
Fuzzy premenná je charakterizovaná usporiadanou trojicou (X, U, R(X, u)), kde
X - názov premennej
U - univerzálna množina (konečná alebo nekonečná)
R(X, u) - fuzzy podmnožina univerzálnej množiny U, pričom predstavuje fuzzy ohraničenie hodnôt premennej u, ktoré je dané premennou X (skrátene R(X)).

Lingvistická premenná je usporiadaná pätica (Γ, T(Γ), U, G, M), kde
Γ - názov premennej
T(Γ) (T) – term – množina, t.j. množina všetkých názvov lingvistických hodnôt premennej Γ, každá z týchto hodnôt je fuzzy premennou X, nadobúdajúca hodnoty z univerzálnej množiny U s bázovou premennou u
G - syntaktické pravidlo (zvyčajne vo forme bezkontextovej gramatiky), podľa ktorého je zostavený názov X hodnoty lingvistickej premennej Γ
M - sémantické pravidlo, ktoré priraďuje každej fuzzy premennej X jej význam M(X), t.j. fuzzy podmnožinu M(X) univerzálnej množiny U



Príklad definície pojmu *vek človeka* s jej lingvistickými hodnotami *mladý, stredne starý, starý*

Γ = {vek}
T = {mladý, stredne starý, starý}



SP – stupeň príslušnosti (Grade of Membership)
FP – funkcia príslušnosti (Membership Function)
FM – fuzzy množina (Fuzzy Set) ← algebraická štruktúra
HLP – hodnota lingvistickej premennej (Value of Lingvistic Variable)
LP – lingvistická premenná ← zložitejší typ algebraickej štruktúry(je v nej obsiahnutá aj FM)

Operácie s fuzzy množinami a ich vlastnosti

V klasickom množinovom počte poznáme tri druhy operácií:

- zjednotenie
- prienik
- doplnok

s nasledujúcimi vlastnosťami:

1 Komutatívnosť $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$

2 Asociatívnosť $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

		$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
3	Idempotentnosť	$A \cup A = A;\ \ A \cap A = A$
4	Distributívnosť	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
		$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
5	Identita	$A \cup 0 = A;\ \ A \cap X = A$
6	Absorbcia	$A \cup (A \cap B) = A$
		$A \cap (A \cup B) = A$
7	De Morganove pravidlá	$\neg(A \cap B) = \neg A \cup \neg B$
		$\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B$
8	Involúcia	$\neg\neg A = A$
9	Ekvivalencia	$(\neg A \cup B) \cap (A \cup \neg B) = (\neg A \cap \neg B) \cup (A \cap B)$
10	Symetrická diferencia	$(\neg A \cap B) \cup (A \cap \neg B) = (\neg A \cup \neg B) \cap (A \cup B)$

V rámci teórie FM sú triedy operácií (s ľubovoľným počtom):

- prieniku zodpovedajú tzv. T-normy (T ako angl. triangular – trojuholník)
- zjednoteniu zodpovedajú tzv. T-conormy resp. S-normy (S ako suma)
- doplnok (angl. Complement.)

Definícia operácií s fuzzy množinami

1.*T-norma:*

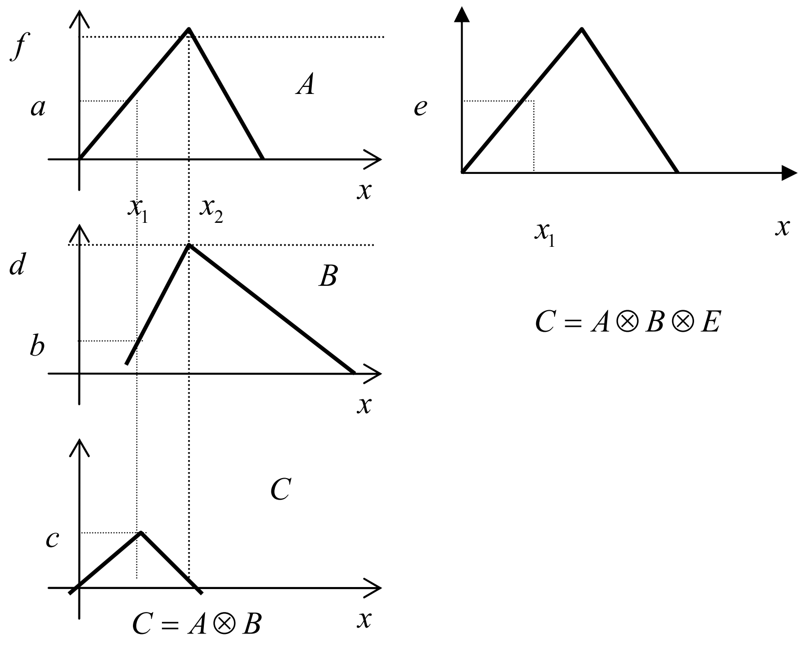
Nech sú tri FM A, B a C definované na spoločnom univerze X, kde $a = \mu_A(x_1)$, $b = \mu_B(x_1)$, $c = \mu_C(x_1)$, $d = \mu_B(x_2)$, $e = \mu_E(x_1)$, $f = \mu_A(x_2)$ a vo všeobecnosti $x_1 \neq x_2$, potom T-norma je binárnou reláciou (zobrazením), kde by mali platiť nasledovné podmienky:

$$T(a,b) = T(b,a)$$

$$T(T(a,b),c) = T(a,T(b,c))$$

$$\forall a \leq f \ \& \ \forall b \leq d \Rightarrow T(a,b) \leq T(f,d)$$

$$T(a,1) = a$$



2.*T-conorma:*
Nech sú tri FM A, B a C definované na spoločnom univerze X, kde $a = \mu_A(x_1)$, $b = \mu_B(x_1)$, $c = \mu_C(x_1)$, $d = \mu_B(x_2)$, $e = \mu_E(x_1)$, $f = \mu_A(x_2)$ a vo všeobecnosti $x_1 \neq x_2,$ potom T-conorma (S-norma) je binárnou reláciou (zobrazením), kde by mali platiť nasledovné podmienky:

$$S(a,b) = S(b,a)$$
$$S(S(a,b),e) = S(a,S(b,e))$$
$$\forall a \leq f \,\&\, \forall b \leq d \Rightarrow S(a,b) \leq S(f,d)$$
$$S(a,0) = 0$$

Špeciálny prípad tzv. *konjugovaných* T-noriem a T-conoriem:

$$T(a,b) = 1 - S((1-a),(1-b))$$

3.*Doplnok:*
Nech A je FM definovaná na univerze X, kde $a = \mu_A(x_1), b = \mu_A(x_2)$ a vo všeobecnosti $x_1 \neq x_2,$ potom doplnok je unárnou reláciou spĺňajúcou nasledovné podmienky:

$$C(0) = 1$$
$$\forall a < b \Rightarrow C(a) > C(b)$$
$$C(C(a)) = a$$

Základné typy T-noriem a T-conoriem

- *Konjugované T-normy a T-conormy*, ktoré vždy tvoria dvojice (jedna T-norma a jedna T-conorma):
  1 *Drastický súčin a drastický súčet*
  - súčin:

  $$T_w(\mu_A(x),\mu_B(x)) = \begin{cases} \min(\mu_A(x),\mu_B(x)), & \textit{Ak } \max(\mu_A(x),\mu_B(x)) = 1 \\ 0, & \textit{Ináč} \end{cases}$$

  - súčet:

  $$S_w(\mu_A(x),\mu_B(x)) = \begin{cases} \max(\mu_A(x),\mu_B(x)), & \textit{Ak } \min(\mu_A(x),\mu_B(x)) = 0 \\ 1, & \textit{Ináč} \end{cases}$$

  2 *Ohraničený rozdiel a ohraničený súčet*
  - rozdiel:

  $$T_1(\mu_A(x),\mu_B(x)) = \max(0,\mu_A(x) + \mu_B(x) - 1)$$

  - súčet:

  $$S_1(\mu_A(x),\mu_B(x)) = \min(1,\mu_A(x) + \mu_B(x))$$

  3 Einsteinov súčin a Einsteinov súčet
  - súčin:

  $$T_{1,5}(\mu_A(x),\mu_B(x)) = \frac{\mu_A(x).\mu_B(x)}{2 - (\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x).\mu_B(x)}$$

  - súčet:

  $$S_{1,5}(\mu_A(x),\mu_B(x)) = \frac{\mu_A(x) + \mu_B(x)}{1 + \mu_A(x).\mu_B(x)}$$

  4 Algebraický súčin a pravdepodobnostný súčet
  - súčin (Product):

  $$T_2(\mu_A(x),\mu_B(x)) = \mu_A(x).\mu_B(x)$$

- súčet:

$$S_2(\mu_A(x),\mu_B(x)) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x).\mu_B(x)$$

5 *Hamacherov súčin a Hamacherov súčet*

- súčin:

$$T_{2,5}(\mu_A(x),\mu_B(x)) = \frac{\mu_A(x).\mu_B(x)}{\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x).\mu_B(x)}$$

- súčet:

$$S_{2,5}(\mu_A(x),\mu_B(x)) = \frac{\mu_A(x) + \mu_B(x) - 2\mu_A(x).\mu_B(x)}{1 - \mu_A(x).\mu_B(x)}$$

6 *Minimum a maximum*

- minimum:

$$T_3(\mu_A(x),\mu_B(x)) = \min(\mu_A(x),\mu_B(x))$$

- maximum:

$$S_3(\mu_A(x),\mu_B(x)) = \max(\mu_A(x),\mu_B(x))$$

$T_w \le T_1 \le T_{1,5} \le T_2 \le T_{2,5} \le T_3$ - najmenej prísna T-norma

$S_3 \le S_{2,5} \le S_2 \le S_{1,5} \le S_1 \le S_w$ - najmenej prísna T-conorma

- *Parametrické T-normy a T-conormy* predstavujú isté rozšírenie predošlej triedy operátorov. Tieto však nemusia spĺňať všetky definičné podmienky.

1 *Hamachov prienik a Hamachove zjednotenie*

- prienik:

$$T_H(\mu_A(x),\mu_B(x)) = \frac{\mu_A(x).\mu_B(x)}{\gamma + (1-\gamma).(\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x).\mu_B(x))}, \quad \gamma \ge 0$$

Pre $\gamma = 1$ dostaneme algebraický súčin a pre $\gamma \to \infty$ dostaneme drastický súčin.

- zjednotenie:

$$S_H(\mu_A(x),\mu_B(x)) = \frac{(\gamma-1).\mu_A(x).\mu_B(x) + \mu_A(x) + \mu_B(x)}{1 + \gamma.\mu_A(x).\mu_B(x))}, \quad \gamma \ge -1$$

Pre $\gamma = 0$ dostaneme algebraický súčet a pre $\gamma \to \infty$ dostaneme drastický súčet.

2 Yagerov prienik a Yagerove zjednotenie

- prienik:

$$T_Y(\mu_A(x),\mu_B(x)) = 1 - \min(1, ((1-\mu_A(x))^\gamma + (1-\mu_B(x))^\gamma)^{1/\gamma}), \quad \gamma \ge -1$$

Pre $\gamma = 1$ dostaneme ohraničený rozdiel a pre $\gamma \to \infty$ dostaneme operátor minima.

- zjednotenie:

$$S_Y(\mu_A(x),\mu_B(x)) = \min(1, (\mu_A(x)^\gamma + \mu_B(x)^\gamma)^{1/\gamma}), \quad \gamma \ge 1$$

Pre $\gamma = 1$ dostaneme ohraničený súčet a pre $\gamma \to \infty$ dostaneme operátor maxima.

AK x_1 je A & x_2 je B & x_3 jeC
<u>POTOM y je D</u>
(T(A,B), C)
T(A, T(B,C))
T(A, T(C,B))
T(T(A,C), B)
- výsledok bude ten istý, ak bude splnená podmienka asociatívnosti.

3 Min-max kombinácia

$$OP_{\min-\max}(\mu_A(x),\mu_B(x)) = \gamma.\min(\mu_A(x),\mu_B(x)) + (1-\gamma).\max(\mu_A(x),\mu_B(x)), \quad \gamma \in \langle 0;1 \rangle$$

Pre $\gamma = 0$ dostaneme operátor maxima a pre $\gamma = 1$ dostaneme operátor minima.

- *Spriemerňovacie operátory* (angl. averaging operators) sú vlastne tiež parametrickými operátormi. Okrem operátorov minima a maxima kombinujú aj aritmetický priemer.

1 Fuzzy – AND

$$OP_{AND}(\mu_A(x),\mu_B(x)) = \gamma.\min(\mu_A(x),\mu_B(x)) + \frac{(1-\gamma).(\mu_A(x)+\mu_B(x))}{2}, \quad \gamma \in \langle 0;1 \rangle$$

Pre $\gamma = 1$ dostaneme operátor minima a pre $\gamma = 0$ dostaneme aritmetický priemer.

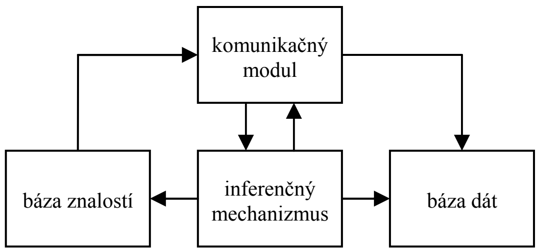
2 Fuzzy – OR

$$OP_{OR}(\mu_A(x),\mu_B(x)) = \gamma.\max(\mu_A(x),\mu_B(x)) + \frac{(1-\gamma).(\mu_A(x)+\mu_B(x))}{2}, \quad \gamma \in \langle 0;1 \rangle$$

Pre $\gamma = 1$ dostaneme operátor maxima a pre $\gamma = 0$ dostaneme aritmetický priemer.

Štruktúra expertného systému

AK <predpoklad> POTOM <dôsledok>
AK x je M A y je B POTOM z je O



Fuzzy inferenčný systém (FIS – historické delenie):

- fuzzy regulátor (1. regulátor r.1974 – prof. Mamdani)
- fuzzy expertné systémy – historicky novšie, zložitejšie

Prípady vhodného využitia FIS

- Ak riadená sústava je matematicky ťažko popísateľná alebo veľmi komplikovaná.
- Ak sústava je silne nelineárna.
- Ak sústava je citlivá na prudké zmeny akčného zásahu.
- Ak je potrebné meniť dynamiku regulátora, t.j. rýchlosť regulácie.
- Ak sa predpokladá, že počas životnosti regulátora sa doňho budú robiť časté zásahy.
- Ak sa vyžaduje veľká robustnosť riadiaceho systému.

Všeobecné značenie hodnôt lingvistickej premennej

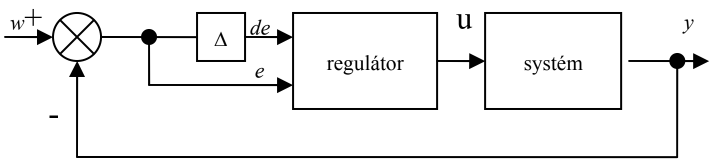
Anglická značka	Anglický význam	Slovenská značka	Slovenský význam
PB	Positive big	KV	Kladný veľký
PM	Positive medium	KS	Kladný stredný
PS	Positive small	KM	Kladne malý
Z	Zero	N	Nulový
NS	Negative small	ZM	Záporne malý
NM	Negative medium	ZS	Záporne stredný
NB	Negative big	ZV	Záporne veľký

smoothing – vyhladenie daných priebehov, zabezpečí vyššiu robustnosť riadenia

Zloženie fuzzy regulátora

AK x je M A y je B POTOM z je O
x, y, z – fuzzy premenné
M, B, O – hodnoty lingvistických premenných

Špeciálny prípad pre dva vstupy e, Δe a jeden výstup u:
AK e je M A Δe je B POTOM u je O

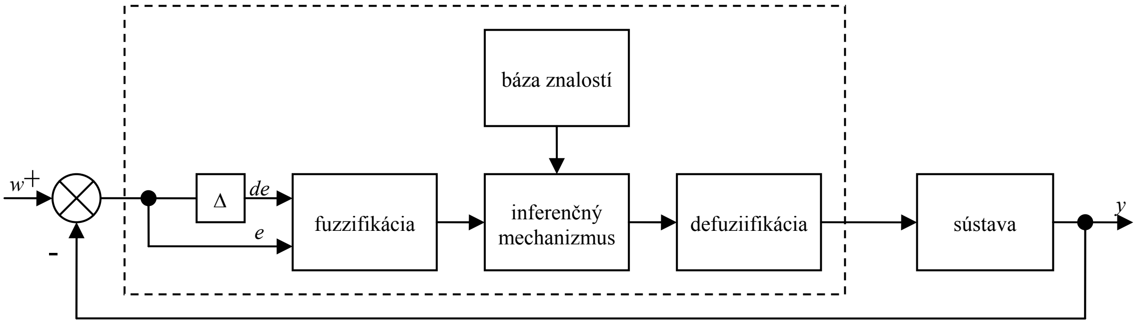


w (t) - požadovaná hodnota	Δe(t) – prvá derivácia reg. odchýlky
e (t) – regulačná odchýlka (chyba)	e(t)=w(t)-y(t)
y (t) – skutočný výstup zo sústavy	Δe(t)=e(t)

Základná bloková schéma spätnoväzobného reg. obvodu (regulátor s regulovaným systémom) pre dva vstupy a jeden výstup:
IF <antecedent> THEN <consequent>

Fuzzy regulátor – expertný systém s týmito vlastnosťami:
- schopný pracovať s neurčitosťou
- plne automatizovaný s vylúčením ľudského činiteľa
- schopný pracovať v skutočnom čase (real time)

Všeobecná teória fuzzy regulátorov



w - požadovaná hodnota
e - chyba
y - výstup

Základná bloková schéma fuzzy regulátora s regulovanou sústavou pre dva vstupy a jeden výstup.

Poradie fáz činnosti fuzzy regulátora:

- fuzzifikácia e^* - crisp (ostrá hodnota)
- inferencia
- akumulácia
- defuziifikácia

normalizácia(pred fuzzifikáciou) denormalizácia(po defuzzifikácii) > predspracovanie (pomocou nejakých koeficientov, bulharskej konštanty...)

Fuzzifikácia

Blok fuzzifikácie môže vykonávať dve základné operácie:

- normalizácia: $e_N = N_e.e$
  $\Delta e_N = N_{\Delta e}.\ \Delta e$

scaling factor – normalizačný koeficient
e, Δe – skutočné (nenormalizované) vstupy
N_e, $N_{\Delta e}$ – normalizačné koeficienty
e_N, Δe_N – normalizované hodnoty vstupov

$$u = N_u.u_N$$

u – skutočný (denormalizovaný) výstup
N_u – denormalizačný koeficient
u_N – normalizovaná hodnota výstupu

- vlastná fuzzifikácia:

ostrá hodnota $\Rightarrow$ fuzzy hodnota

$$E = \{(e^*, \mu_e(e^*))\}$$

$$\Delta E = \{(\Delta e^*, \mu_{\Delta e}(\Delta e^*))\}$$

Inferencia

Dva základné druhy inferencie:

1.) *Inferencia podľa jednotlivých pravidiel* (angl. individual rule based inference) – čiastkové predpoklady LX_i^k sa spoja do celkového predpokladu LA^k pre každé pravidlo zvlášť.

$$\text{AK } x_1 \text{ je } LX_i^k \text{ AND ... AND } x_n \text{ je } LX_n^k \text{ POTOM u je } LU^k$$

$$\text{AK } (x_1,...,x_n) \text{ je } LA^k \text{ POTOM u je } LU^k$$

$LX_1^k, LX_2^k, ..., LX_n^k$ a LU^k - FP charakterizujúce konkrétne hodnoty lingvistických premenných v pravidle k.

2.) *Kompozičná inferencia*(angl. composition based inference) – z relácií predstavujúcich jednotlivé pravidlá sa vytvorí jedna veľká relácia, ktorá popisuje celú bázu znalostí a tá sa naraz, ako jeden celok, vyhodnotí. Výsledkom je celkový akčný zásah za celú bázu pravidiel LU. Inferencia splýva s kompozíciou.

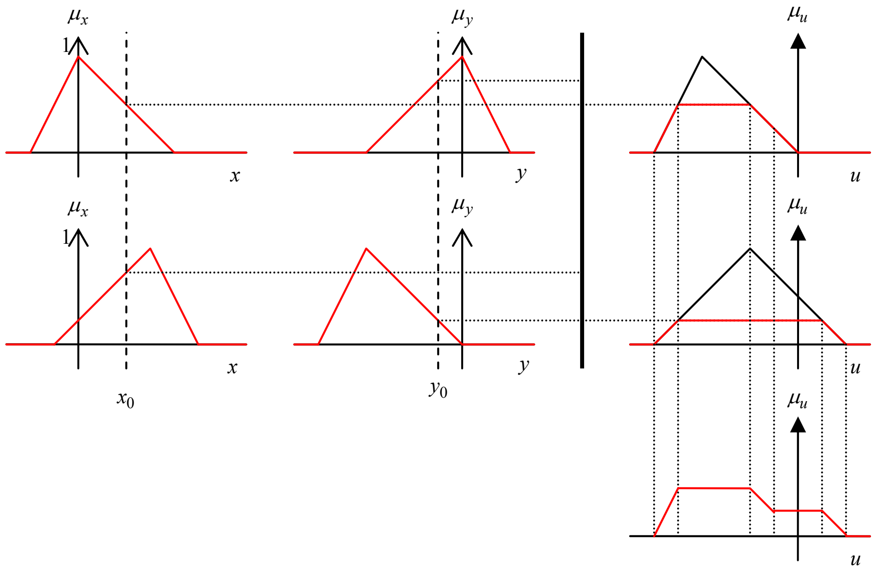
$$\text{AK } \underbrace{\underbrace{x_1 \text{ je } LX_1^k}_{I.etapa\ T_C} \ \& \ \text{AK } \underbrace{x_2 \text{ je } LX_2^k}_{I.etapa} \ \& \ldots \& \ \text{AK } \underbrace{x_n \text{ je } LX_n^k}_{I.etapa}}_{II.etapa} \ \text{POTOM u je } LU_k \ \xrightarrow{III.etapa}$$

vlastná inferencia

- porovnávam 2 fuzzy množiny, výsledok musí byť tiež fuzzy množina.
- porovnávanie – Compatibility T_C
- konjuktívny kanonický tvar (predpoklady sú pospájané pomocou & a pravidlá pomocou OR).
- implikátor je špeciálnym prípadom inferencie.
- každý operátor inferencie spĺňa aj podmienky T-normy, každý operátor inferencie je aj T-normou T_I
- I.+II.+III. – inferencia v širšom slova zmysle
- ak množina je neprázdna, pravidlo sa odpálilo (fired)
- ak pravidlo je vzdialené od predpokladov, neodpáli sa
- akumulácia – spájanie S_A
- I.+II.+III.+S_A – inferencia v najširšom slova zmysle

Predpokladajme, že použijem singletonovú fuzzifikáciu.
Predpokladajme, že T_C bude operátor minima.

Grafické znázornenie metódy MIN-MAX:



- singleton fuzzifikácia
- T_C = min
- <u>T_A = ľubovoľné</u>

- špeciálny prípad (len pri singletone, pri dvoch fuzzy množinách to neplatí)

α = <0,1> - sila pravidla

$T_I(LU_k, LX_k) = LU_{kc}$ - výsledok agregácie jednotlivých vstupov ($_c$ – clipped (orezané))

LU_k - výstup

$LX_k = T_A(LX_{1c}^k, ..., LX_{nc}^k)$

$LX_{ic}^k = T_C(X_i, LX_i^k)$

$LU_c = S_A(LU_{1c}, ..., LU_{nc})$ - výsledok

- v špeciálnom prípade je $LX_k = \alpha$

Akumulácia

Iba v prípade inferencie podľa jednotlivých pravidiel!!!

$AK\ OR \Rightarrow LU = S(S(...S(S(LU_c^1, LU_c^2), LU_c^3)...), LU_c^n)$

$AK\ AND \Rightarrow LU = T(T(...T(T(LU_c^1, LU_c^2), LU_c^3)...), LU_c^n)$

Metóda piatich najbližších susedov (Five Nearest Neighbors)

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ d_1^k & d_2^k & \cdots & d_n^k \\ \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ LX_1^k & LX_2^k & \cdots & LX_n^k \end{array} \Rightarrow d_k = f\left(d_1^k, d_2^k, \cdots, d_n^k\right)$$

$$\Downarrow$$

5 pravidiel s najmenším d_k $(k = 1,...,5)$, kde $d_i < d_j$ pre $i < j$ a $d_{\max} = d_5$

$$\Downarrow$$

$$w_{abs_k} = \frac{d_{\max} - d_k}{d_{\max}} \Rightarrow w_{abs_k} \in < 0;1 >$$

$$\Downarrow$$

$$w_{rel_k} = \frac{w_{abs_k}}{\sum_{k=1}^{5} w_{abs_k}} \Rightarrow \sum_{k=1}^{5} w_{rel_k} = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\mu_{out\_reg} = \sum_{k=1}^{5} w_{rel_k} . \mu_{out\_prav_k}$$

w_{abs_k} - absolútna váha pravidla k

w_{rel_k} - relatívna váha pravidla k

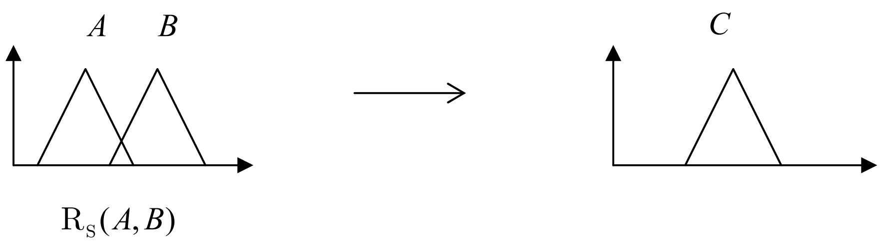
$w_{out\_prav_k}$ - výstupná FP za pravidlo k

w_{out_reg} - celková výstupná FP

d - distance

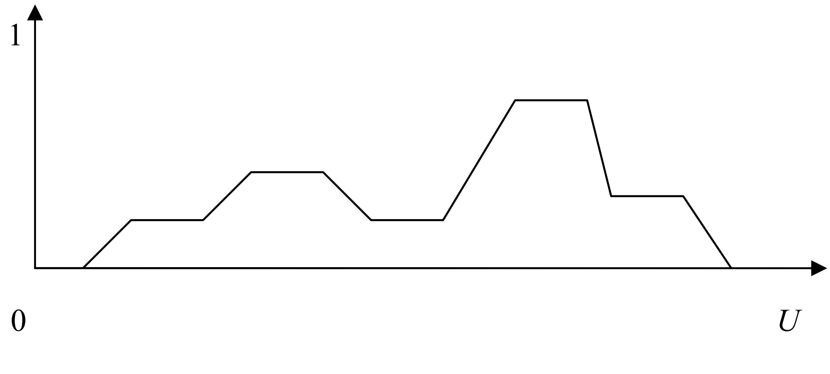
α - stupeň hodnovernosti pre danú reláciu

Relácia podobnosti (Similarity Relation):
$T(A, B) = C$



Defuzzifikácia

Príklad možného tvaru výslednej funkcie príslušnosti získanej akumuláciou funkcií príslušnosti čiastkových výstupov:



1) *Metóda ťažiska (centroidu)* (angl. Center-of-Gravity, resp. Center-of-Area) – výpočet ťažiska plochy FP.

$$u^* = \frac{\int_U u\mu_U(u)du}{\int_U \mu_U(u)du}$$

Pre diskrétny prípad, ak $\forall u_i \in < u_1; u_l >$:

$$u^* = \frac{\sum_{i=1}^{l} u_i \mu_U(u_i)}{\sum_{i=1}^{l} \mu_U(u_i)}$$

2) *Metóda priemerného súčtu* (angl. Center-of-Sums) – modifikovaná metóda ťažiska zohľadňuje prekrývanie sa FP čiastkových výstupov.

$$u^* = \frac{\int_U u \sum_{k=1}^{m} \mu_{U_C^k}(u)du}{\int_U \sum_{k=1}^{m} \mu_{U_C^k}(u)du}$$

Pre diskrétny prípad, ak $\forall u_i \in < u_1, u_l >$:

$$u^* = \frac{\sum_{i=1}^{l} u_i \sum_{k=1}^{m} \mu_{U_C^k}(u_i)}{\sum_{i=1}^{l} \sum_{k=1}^{m} \mu_{U_C^k}(u_i)}$$

3) *Metóda ťažiska najväčšieho priestoru* (angl. Center-of-Largest-Area) – využitie, ak FP celkového výstupu je nekonvexná.
4) *Metóda stupňov* (angl. Height, resp. Local-Mean-of-Maxima) – patrí do skupiny metód maxima. Akumulácia a defuzzifikácia splývajú v jeden výpočtový krok. Najprv sa vypočítajú hodnoty vrcholov jednotlivých čiastkových výsledkov LU_c^k, t.j. $p_k = P(LU_c^k)$.

$$u^* = \frac{\sum_{k=1}^{m} p_k \mu_{U_C^k}(p_k)}{\sum_{k=1}^{m} p_k}$$

5) *Metóda prvého maxim* (angl. First-of-Maxima) – výber prvej hodnoty u, ktorá nadobúda maximálny stupeň príslušnosti:

$$u^* = \left\{ u_i / i \neq j \; u_i < u_j \forall i, j \; \mu_U(u_i) = \mu_U(u_j) = \max(\mu_U(u)) \right\}$$

6) *Metóda posledného maxima* (angl. Last-of-Maxima) – protiklad k metóde prvého maxima:

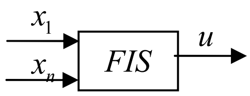
$$u^* = \left\{ u_i / i \neq j \; u_i > u_j \forall i, j \; \mu_U(u_i) = \mu_U(u_j) = \max(\mu_U(u)) \right\}$$

7) *Metóda stredného maxima* (angl. Middle-of-Maxima, resp. Global-Mean-of-Maxima) – kompromis metódy prvého a posledného maxima. Nech $u^*_{\min}$ je výsledkom metódy prvého maxima a $u^*_{\max}$ výsledkom metódy posledného maxima, potom:

$$u^* = u^*_{\min} + \frac{u^*_{\max} - u^*_{\min}}{2}.$$

Kritériá hodnotenia defuzzifikačných metód

1) *Spojitosť* (Continuity) – malá zmena vstupov do sústavy spôsobí malá zmenu výstupov zo sústavy



$$|x_1(k) - x_1(k+1)| \le \varepsilon \wedge \ldots \wedge |x_n(k) - x_n(k+1)| \le \varepsilon \to |u(k) - u(k-1)| \le \delta$$

Ak je podmienka splnená, defuzzifikačná metóda je spojitá za predpokladu spojitosti bázy znalostí.

2) *Prípustnosť* (Plausibility) – prijateľnosť. Výsledok je prípustný, keď leží niekde uprostred (ťažisko) a má pomerne vysoký stupeň príslušnosti.
3) *Výpočtová zložitosť* (Computational Complexity) – metódy maxima sú výpočtovo nenáročnejšie, metóda ťažiska je výpočtovo náročná.
4) *Uvažovanie prekrytí* (Weight Counting) – existujú metódy, ktoré prekrytie berú do úvahy a ktoré ho neberú do úvahy.
5) *Jednoznačnosť* (Disambiguity, Unambiguity) – napr. $S_1 = S_2$ je nejednoznačná

	ťažiska	priemerného súčtu	ťažiska najväčšieho priestoru	stupňov	prvého a posledného maxima	stredného maxima
spojitosť	áno	áno	nie	áno	nie	nie
prípustnosť	áno	áno	áno	áno	nie	nie
výpočtová zložitosť	áno	nie	áno	nie	nie	nie
uvažovanie prekrytí	nie	áno	nie	áno	nie	nie
jednoznačnosť	áno	áno	nie	áno	áno	áno

Typy regulátorov

Báza znalostí:

1 báza funkcie príslušnosti (FP)
2 báza pravidiel
3 báza parametrov inferenčného mechanizmu (IM):
   a) normalizačné a denormalizačné koeficienty
   b) metóda fuzzifikácie
   c) T_C – operátor kompatibility
   d) T_A – operátor agregácie
   e) T_I – vlastná inferencia
   f) S_A – operátor akumulácie
   g) metóda defuzzifikácie

h) váhovanie (weighting)

Váhovanie:

1) AK x_1 je LX_1^1 & ... & x_n je LX_n^1 POTOM u je LU_1; w_1 $w_i \in <0;1>$

.
.
.

n) AK x_1 je LX_1^n & ... & x_n je LX_n^n POTOM u je LU_n; w_n – hodnovernosť pravidla

$$\alpha_{w_i} = \alpha_i . w_i$$

α_{w_i} - skutočná sila pravidla, ide do ďalšieho procesu inferencie

AK $A \to B$ - operátor inferencie

$A \Rightarrow B$ - implikácia (ak platí A, potom platí B)

	A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1	1
2	1	0	0
3	0	1	1
4	0	0	1

min – nie je implikátor

Každý implikátor je špeciálnou formou T-normy, ale nie každá T-norma je implikátorom.

Implikátory

AK x je A $\Rightarrow$ y je B

$A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$ alebo $(A \wedge B) \vee \neg A$

Typy implikátorov

1) *Kleene – Dienesov* $\mu_{(A \Rightarrow B)_b}(x,y) = \max\left(1 - \mu_A(x), \mu_B(y)\right)$
2) *Lukasiewiczov* $\mu_{(A \Rightarrow B)_a}(x,y) = \min\left(1, 1 - \mu_A(x) + \mu_B(y)\right)$
3) *Zadehov* $\mu_{(A \Rightarrow B)_m}(x,y) = \max\left(\min\left(\mu_A(x), \mu_B(y)\right), 1 - \mu_A(x)\right)$
4) *Stochastický* $\mu_{(A \Rightarrow B)_*}(x,y) = \min\left(1, 1 - \mu_A(x)\right) + \mu_A(x) . \mu_B(y)$
5) *Goguenov* $\mu_{(A \Rightarrow B)_\Delta}(x,y) = \min\left(1, \dfrac{\mu_A(x)}{\mu_B(y)}\right)$
6) *Gödelov* $\mu_{(A \Rightarrow B)_g}(x,y) = \begin{cases} 1; & \mu_A(x) \le \mu_B(y) \\ \mu_B(y); & inak \end{cases}$
7) *Ostrý* $\mu_{(A \Rightarrow B)_s}(x,y) = \begin{cases} 1; & \mu_A(x) \le \mu_B(y) \\ 0; & inak \end{cases}$
8) *Všeobecný* $\mu_{(A \Rightarrow B)_{\alpha\beta}}(x,y) = \min\left(\left(\mu_A(x) \overset{a}{\Rightarrow} \mu_B(y)\right), \left(\left(1 - \mu_A(x)\right) \overset{b}{\Rightarrow} \left(1 - \mu_B(y)\right)\right)\right)$

$\overset{a}{\Rightarrow}, \overset{b}{\Rightarrow}$ - Gödelove alebo ostré implikátory

Typy fuzzy regulátorov

- *Konvenčné regulátory:*
- *Mamdaniho regulátor*
  - fuzzy P, PI, PD a PID regulátory
  - fuzzy regulátor pre kĺzavú reguláciu a iné
- *Takagi – Sugeno – Kangov regulátor* (TSK)
  - nelineárny TSK regulátor
  - lineárny TSK regulátor s premenlivými parametrami
- *Adaptívny fuzzy regulátor*
  - samoladiteľný, resp. samonastaviteľný regulátor
  - samoučiaci sa, resp. samoorganizačný regulátor
- *Špeciálne fuzzy regulátory* – nepatria ani do jednej z predchádzajúcich tried, napr. Mac Vicar – Whelanov regulátor

Mamdaniho regulátor

1 najstarsí typ fuzzy regulátora
2 inferencia v širšom slova zmysle:
   a) MIN (operátor minima):

$$T_M\left(\mu_A(x),\mu_B(x)\right)=\min\left(\mu_A(x),\mu_B(x)\right)$$

   b) PRODUCT:

$$T_P\left(\mu_A(x),\mu_B(x)\right)=\mu_A(x).\mu_B(x)$$

3 akumulácia:
   a) MAX (operátor maxima):

$$S_M\left(\mu_A(x),\mu_B(x)\right)=\max\left(\mu_A(x),\mu_B(x)\right)$$

   b) SUM:

$$S_S\left(\mu_A(x),\mu_B(x)\right)=\mu_A(x)+\mu_B(x)$$

4 spojenie inferencie a akumulácie $\Rightarrow$ MIN-MAX, resp. PRODUCT-SUM (inferencia v najširšom slova zmysle

Fuzzy P, PI, PD a PID Mamdaniho regulátory

(proporcionálny, integračný, derivačný)

1) *P regulátor* – Prenos $F_p(s)$ klasického P regulátora, kde e je vstup regulátora a u výstup z regulátora:

$$F_P(s)=\frac{u(s)}{e(s)}=K_1$$

$$u(s)=K_1e(s)$$

Po prechode do časovej oblasti: $u(t)=K_1e(t)$

Po prepise do formy pravidla typu IF-THEN:

AK e je M POTOM u je O SISO

2) *PI regulátor* – Prenos klasického PI regulátora:

$$F_{PI}(s)=\frac{u(s)}{e(s)}=K_1+\frac{K_2}{s}$$

$$u(s)=K_1e(s)+\frac{K_2}{s}e(s)/.s$$
$$u(s)s=K_1e(s)s+K_2e(s)$$
Po prechode do časovej oblasti: $\Delta u(t)=K_1\Delta e(t)+K_2e(t)$

Prepis do tvaru pravidla IF-THEN:

AK e je M A Δe je B POTOM Δu je O

3) *PD regulátor* – Prenos klasického PD regulátora:
$$F_{PD}(s)=\frac{u(s)}{e(s)}=K_1+K_3s$$
$$u(s)=K_1e(s)+K_3e(s)s$$
Po prechode do časovej oblasti: $u(t)=K_1e(t)+K_3\Delta e(t)$

Prepis do tvaru pravidla IF-THEN:

AK e je M A Δe je B POTOM u je O

4) *PID regulátor* – Prenos klasického PID regulátora:
$$F_{PID}(s)=\frac{u(s)}{e(s)}=K_1+\frac{K_2}{s}+K_3s$$
$$u(s)=K_1e(s)+\frac{K_2}{s}.e(s)+K_3e(s).s$$
Po prechode do časovej oblasti: $u(t)=K_1e(t)+K_2\int_0^t e(\tau)d\tau+K_3\Delta e(t)$

$\int_0^t e(\tau)d\tau$ - chybový integrál $\delta_e(t)$ (angl. error integral)

Prepis do tvaru pravidla IF-THEN:

AK e je M A Δe je B A $\delta_e(t)$ je P POTOM u je O

Takagi – Sugeno – Kanov regulátor (TSK)

1) Odpadá potreba deffuzifikácie (na rozdiel od Mamdaniho regulátora, f_i = const)
2) báza znalostí v tvare

AK x_1 je LX_1^1 A ... A x_n je LX_n^1 POTOM $u_1^*=f_1(x_1,...,x_n)$

AK x_1 je LX_1^2 A ... A x_n je LX_n^2 POTOM $u_2^*=f_2(x_1,...,x_n)$

.
.
.

AK x_1 je LX_1^n A ... A x_n je LX_n^n POTOM $u_m^*=f_m(x_1,...,x_n)$

3) inferencia:

a) MIN (operátor minima):
$$T_M(\mu_A(x),\mu_B(x))=\min(\mu_A(x),\mu_B(x))$$
b) PRODUCT:
$$T_P(\mu_A(x),\mu_B(x))=\mu_A(x).\mu_B(x)$$

4) akumulácia:

$$u^* = \frac{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i^*}{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i}$$

Špeciálny prípad, ak f_i je lineárna funkcia, t.j. $u_i^* = c_{1i}.x_1 + c_{2i}.x_2 + ... + c_{ni}.x_n$

$$u^* = \frac{\sum_{i=1}^{m} \left(c_{1i}x_1 + c_{2i}x_2 + \cdots + c_{ni}x_n\right)\alpha_i}{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i}$$

$$u^* = \frac{\sum_{i=1}^{m} c_{1i}\alpha_i}{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i} x_1 + \frac{\sum_{i=1}^{m} c_{2i}\alpha_i}{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i} x_2 + \cdots + \frac{\sum_{i=1}^{m} c_{ni}\alpha_i}{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i} x_n$$

Substitúcia p_1 až p_n:

$$u_i^* = p_1.x_1 + p_2.x_2 + ... + p_n.x_n$$

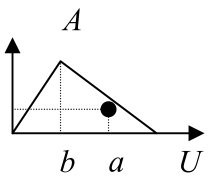
Ak x_i sú jednotlivé derivácie vstupu $x(x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(n-1)})$

$$\Downarrow$$

lineárny filter s premenlivými parametrami

Mamdani		TSK
1) fuzzifikácia	=	fuzzif. = singleton
2) T_C	=	T_C – ľubovoľné
3) T_A	=	T_A – ľubovnoľné
4) T_I = prod		——
5) S_A= sum		——
6) defuzz = ťažisko		——
7) $U_i = \left\{\left(u_i^*, 1\right)\right\}$		$u_i^* = const_i$

Mamdani $\rightarrow$ TSK



$$\rightarrow u_i^* = \frac{a+b}{2}$$

Podmienky lineárnosti všeobecného fuzzy regulátora

1) Použité funkcie príslušnosti (FP) sú trojuholníkové a normálne (vrchol musí mať $\mu = 1$)
2) Vytvárajú fuzzy partície

$$\forall x \in X \sum_{i=1}^{m} \mu_{LX_i}(x) = 1$$

3) T_A – product
4) S_A – ohraničený súčet
5) $u = f(x_1,...,x_n)$ – lineárna funkcia
6) báza pravidiel je úplná
7) T_I – T-norma
8) Defuzzifikácia musí byť fuzzy mean – skupina defuzzif. metód, ktoré sú charakteristické tým, že sa vypočítajú

$$\frac{\sum_{j=1}^{r} \alpha_j . b_j}{\sum_{j=1}^{r} \alpha_j}$$

b_j - nejaká číselná charakteristika výstupnej funkcie príslušnosti, napr. metóda výšok, metóda priemerného súčtu atď.

Tieto podmienky sú postačujúce, ale nie nutné (ak sú splnené všetky, tak je to lineárny FR, ale ak nie je niektorá splnená, neznamená to, že regulátor nemôže byť lineárny)

Poznámka:

$$f(x) \xrightarrow{aprox} \hat{f}(x)$$

$|f(x) - \hat{f}(x)| \leq \varepsilon$ $\qquad$ $x \in X$

$\overline{x} = \{x_1,...,x_n\}$

$|f(\overline{x}) - \hat{f}(\overline{x})| \leq \varepsilon$ $\qquad$ $\overline{x} \in \overline{X}$ $\qquad$ - podmienka aproximácie

FR je aproximátor ľubovoľnej funkcie
ε si volíme (presnosť) – čím väčšia presnosť, tým viac pravidiel.
Vzájomne neprotirečivé pravidlá:
$x_1,...,x_n$

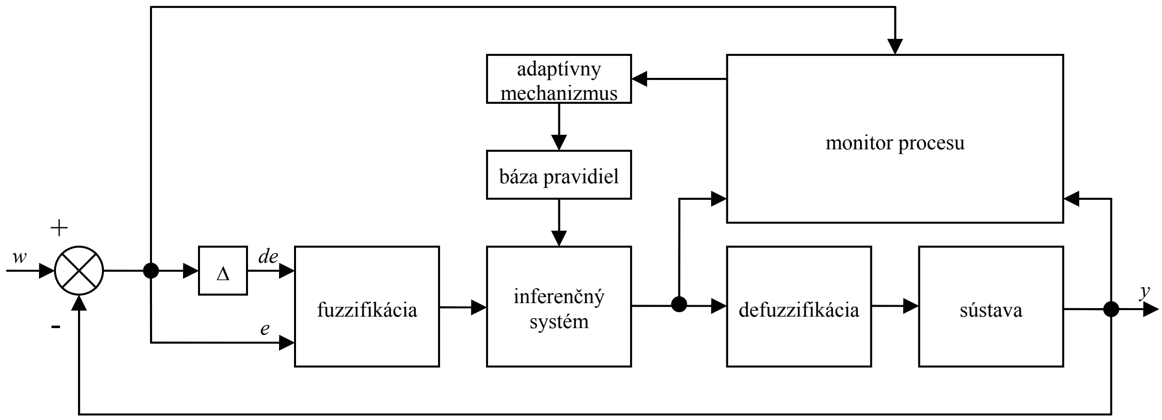
$N_r = \prod_{i=1} NLX_i$ $\qquad$ - počet vzájomne neprotirečivých pravidiel (ak mám viac pravidiel, budú tam aj protirečivé)

Normalizačné koeficienty:
$x_n = N.x$

Adaptívny fuzzy regulátor

!!!adaptívny fuzzy regulátor $\neq$ adaptívny klasický regulátor!!!

Vlastnosti adaptívneho fuzzy regulátora:
1) Samoladenie regulátora
2) Prispôsobenie sa meniacim podmienkam procesu modifikáciou modelu procesu
3) Možnosť spustenia učiaceho sa procesu aj pri absencii modelu riadenej sústavy



Základná bloková schéma adaptívneho fuzzy regulátora.

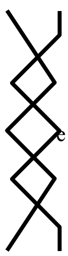
Typy monitorov procesu:
1) Meranie výkonnosti regulátora ⇒ výkonnostne adaptívne regulátory (angl. performance-adaptive)
2) Estimácia parametrov aktualizovaním modelu riadenej sústavy ⇒ parametricky adaptívne regulátory (angl. parameter-adaptive)

Typy adaptívnych fuzzy regulátorov podľa druhu modifikovaných parametrov bázy znalostí:
1) Samoladiace adaptívne fuzzy regulátory (angl. self-tuning) – modifikujú normalizačné koeficienty a hodnoty parametrov funkcií príslušnosti
2) Samoorganizačné adaptívne fuzzy regulátory (angl. seld-organizing) – modifikujú bázu pravidiel

Kritériá hodnotenia bázy pravidiel

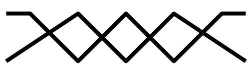
1) Úplnosť (completness) – pre všetky $(e,\dot{e})$ viem vygenerovať neprázdnu FM
Výška FM hgt(LU_c)

Pre všetky $(e,\dot{e})$ hgt(LU_c) > 0



PB				PS	NS
PS			Z	PB	Z
Z		NS	Z	NS	
NS	PB	PS	NS	NB	
NB	PB	PB	NB	NB	
	NB	NS	Z	PS	PB

e



!Ak pre nejaký vstup $(e,\dot{e})$ hgt(LU_c) = 0 potom zoberieme hodnotu z predchádzajúceho kroku.
2) Spojitosť (continuity) – zistíme susedov pre každý štvorček; báza pravidiel je vtedy spojitá, ak prienik FP vyšetrovaného políčka a jeho suseda je nenulový.

3)Konzistentnosť <Neprotirečivosť> (consistency)

$x_1, \ldots, x_n$ $\qquad \prod_{i=1}^{n} P_i$ $\qquad$ P_i – počet lingv. hodnôt pre danú lingv. premennú α_i

$LX_1^{P1}, \ldots, LX_n^{Pn}$

Definície protirečivosti:

Prísna – ak sa v BP nachádzajú aspoň 2 také pravidlá, ktoré majú rovnakú predpokladovú časť a rôznu výstupnú časť $\Rightarrow$ BP je protirečivá.

Menej prísna – BP je až vtedy protirečivá, ak sa nájdu 2 také pravidlá s rovnakou predpokladovou časťou, ktorých výstupy (prienik výstupov) je prázdna množina.

Príklad:

$PI \rightarrow \Delta u$

e \ $\dot{e}$	NB	NM	NS	Z	PS	PM	PB
NB	NB	NB	NB	NB	NM	NS	Z
NM	NB	NB	NB	NM	NS	Z	PS
NS	NB	NB	NM	NS	Z	PS	PM
Z	NB	NM	NS	Z	PS	PM	PB
PS	NM	NS	Z	PS	PM	PB	PB
PM	NS	Z	PS	PM	PB	PB	PB
PB	Z	PS	PM	PB	PB	PB	PB

$1.) e, \dot{e} \approx 0$

$2.) e, \dot{e} < 0$

$3.) e \gg 0, \dot{e} < 0$

$4.) e, \dot{e} > 0$

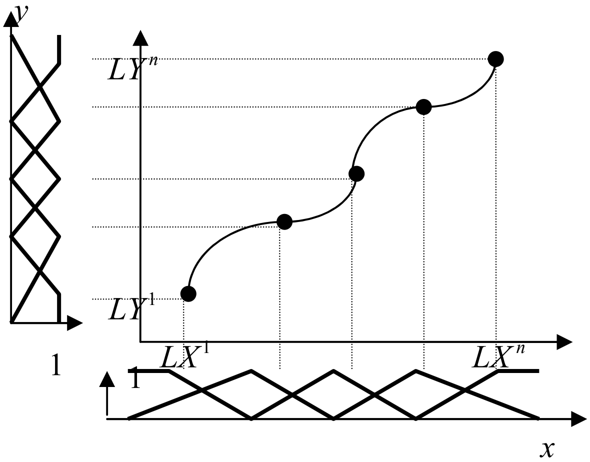
$5.) e \ll 0, \dot{e} > 0$

4) Interakcia (interaction)

$LU_{c_I} = LU_{c_c}$ - nemusia sa rovnať; interakcia je zlá vlastnosť; chceli by sme, aby sa rovnali.

LU_{c_I} - výsledok inferencie podľa jednotlivých pravidiel

- báza pravidiel obsahuje pravidlá, ktoré sa navzájom rušia $\Rightarrow$ inferencia podľa jednotlivých pravidiel nie je matematicky správna



$y = f(x)$

Ak $x \rightarrow y$

- označíme si význačné body (napr. body zlomu)

(1): AK x je LX^1 $\rightarrow$ y je LY^1

.
.
.

(n): ... $\qquad LX^n \qquad LY^n$

Typy reprezentácie znalostí FIS

1.) Fuzzy produkčné pravidlá (IF-THEN) – inferencia podľa jednotlivých pravidiel (individual rule based inference)
2.) Fuzzy relácie – kompozičná inferencia (compositional inference)
3.) Fuzzy asociatívne pamäte (Fuzzy Associative Memory – FAM) – v súvislosti s neurónovými sieťami

Fuzzy relácie

$R: X \to Y$

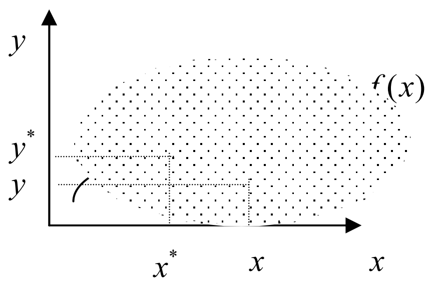
R – fuzzy relácia

$X \times Y$

$y = f(x)$

$$\mathrm{R} = \int_{X\times Y} \mu_{\mathrm{R}}(x,y)/(x,y)$$

$$\mathrm{R} = \sum_{X\times Y} \mu_{\mathrm{R}}(x,y)/(x,y)$$



Typický príklad FR – operácia.
Unárna relácia – vykonávam operáciu nad tou istou množinou:
2 jablká + 3 hrušky $\Rightarrow$ 5 jablk - operácia
2 jablká + 3 hrušky $\Rightarrow$ 5 ks ovocia - relácia
Charakteristická funkcia: $(x,y) \in \mathrm{R} \to 1$
$(x,y) \notin \mathrm{R} \to 0$

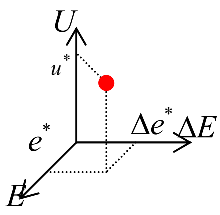
$$\mathrm{R} = \int \mu_{\mathrm{R}}(x_1, x_2, \cdots, x_n)/(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

Fuzzy množina je špeciálny prípad fuzzy relácie, je to unárny prípad.

AK e je LE & e je LE $\to$ u je LU

$LE \subset E; \Delta LE \subset \Delta E; LU \subset U$

$E \times \Delta E \times U$



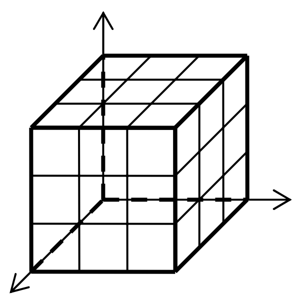
$\mu_{\mathrm{R}}(e^*, \Delta e^*, u^*)$

$$\mathrm{R} = \int \mu_{\mathrm{R}}(e^*, \Delta e^*, u^*)/(e^*, \Delta e^*, u^*)$$

$E \times \Delta E \times U$

$$\mathrm{R} = \bigcup_{i=1}^{N_r} \mathrm{R}_i$$

N_r - number of rules



Operácie s fuzzy reláciami

Fuzzy relácie – na základe úsudku
– na základe BP a FP s využitím fuzzy operátorov

$\mathrm{R} \subseteq X \times Y$ „Asi rovný“

X \ Y	1	2	3	4
1	1,0	0,5	0,2	0,0
2	0,5	1,0	0,5	0,2
3	0,2	0,5	1,0	0,5
4	0,0	0,2	0,5	1,0

$\mu_{\mathrm{R}}(x, y)$

- definujeme si, ako sú si rovné

$\mathfrak{B} \subseteq X \times Y$

X \ Y	1	2	3	4
1	0,5	1,0	0,7	0,2
2	0,0	0,8	1,0	0,2
3	0,4	0,0	1,0	1,0
4	0,9	0,6	0,0	0,2

$\mathrm{R} \bigcap_{\min} \mathfrak{B}$

X \ Y	1	2	3	4
1	0,5	0,5	0,2	0,0
2	0,0	0,8	0,5	0,2
3	0,2	0,0	1,0	0,5
4	0,0	0,2	0,0	0,2

Operácie:

- Projekcia (uberanie rozmeru $\rightarrow$ ternárna na binárnu na unárnu...)
- Cylindrické rozšírenie (Cylindrical extension)
- Kompozícia

Projekcia

$$\mathrm{proj\,R\ na\ X} = \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}$$ - maximum z každého riadku

$$\mathrm{proj\,R\ na\ } Y = 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1$$ - maximum z každého stĺpca

Pre binárny prípad $(\mathrm{R} : \mathrm{X} \times \mathrm{Y})$:

$$\mathrm{proj\,R\ na\ } Y = \int_Y \sup_x \mu_{\mathrm{R}}(x, y) / y$$

Všeobecne:

$$U = \prod_{i=1}^{n} U_i ; V = \prod_{m=1}^{k} U_{im} \qquad (i_1, ..., j_1, ..., j_l, ..., i_k)$$

$\mathrm{R} \subseteq U \quad V \subseteq U$ $\qquad \mathrm{proj\,R\;na}\; V = \int_V \sup_{u_{j1},...,u_{jk}} \mu_{\mathrm{R}}\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) / \left(x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{ik}\right)$

$k < n$ $\qquad x_i \in U_i$

$$\begin{matrix} i = 1, 2, ..., k \\ j = 1, 2, ..., l \end{matrix} \gg l + k = n$$

Cylindrické rozšírenie

Pre binárny prípad $(\mathcal{F} : \mathrm{X} \times \mathrm{Y})$:

$$\mathrm{ce}(\mathcal{F}) = \int_{X \times Y} \mu_{\mathcal{F}}(y) / (x, y)$$

Všeobecne:

$$ce(\mathcal{S}) = \int_V \mu_{\mathcal{S}}\left(x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{ik}\right) / \left(x_1, x_2, \cdots, x_m\right)$$

$proj\; ce(\mathcal{S}) na V = \mathcal{S}$
$ce(proj \mathrm{R} na V) \neq \mathrm{R}$

MISO – multiple input single output
MIMO – multiple input multiple output
MIMO $\to$ MISO $\qquad$ FAM – fuzzy associative memmory
MISO
...
MISO

k: AK x_1 je LX_1^k & ... & x_n je LX_n^k POTOM u je LU_k
k – zaberá priestor v stavovom priestore

$$\mathrm{R}_k = \int_{X_1 \times ... \times X_n \times U} T_I(T_A(\mu_{LX_1^k}(x_1^*), ..., \mu_{LX_n^k}(x_n^*)), LU_k) / (x_1^*, ..., x_n^*, u^*)$$

$\mu_{LX_1^k}(x_1^*) \leftarrow$ len v prípade ak fuzzifikačná metóda je singleton, ak nie, tak každý taký výraz musím nahradiť
$T_C(\mu_{LX_1^k}(x_1), fuzz(x_1^*))$

Výsledná báza pravidiel: $\mathrm{R} = \bigcup_{k=1}^{N_r} \mathrm{R}_k$

Príklad:
AK x je A POTOM u je B
A – známe $(A \subseteq X)$
$\mathrm{R} \subseteq X \times U$ – známa

Aké je B? $\qquad (B \subseteq U)$

$B = A \circ \mathrm{R} = proj(ce(A) \cap \mathrm{R}) naU = projT_I(ce(A), \mathrm{R}) naU$

$LU_c = projT_I(T_A(ce(fuzz(x_1^*))...ce(fuzz(x_n^*))), \mathrm{R}) naU$

Inferencia podľa jednotlivých pravidiel

(Individual Rule-Based Inference)

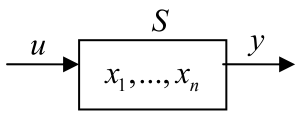
- fuzzy produkčné pravidlá
- user-friendly reprezentácia znalostí
- nižšia výpočtová náročnosť
- distribuovanosť BZ na pravidlá a funkcie príslušnosti $\rightarrow$ inferenčný alg. je zložitejší
- viužíva sa omnoho častejšie ako kompozičná inferencia

Kompozičná inferencia

(Compositional Inference)

- fuzzy relácie
- číselná reprezentácia znalostí
- vysoká výpočtová náročnosť
- znalosť je kompaktná $\rightarrow$ inferenčný alg. je jednoduchší

Typy neurčitosti v technických systémoch



1. stavová rovnica:

matica dynamiky

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ \ldots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} \cong \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \ldots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & \ldots & \\ & & a_{nn} \end{bmatrix}}_{\overline{A}} . \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \ldots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix} u(k)$$

- ako budú vyzerať stavy v nasledujúcom kroku

2. stavová rovnica:

$$y(k) = \left[c_1, \ldots, c_n\right] . \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \ldots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + d.u(k)$$

- ako bude vyzerať výstup (y v čase k)

Typy neurčitosti:

$$1.)\ \left.\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix}\right\} \text{znalosť o systéme}$$

- ak je v nich nepresnosť, ide o neurčitosť o znalosti systému

2.) nepresnosť snímačov, vedení – chyba merania → nepresnosť spôsobená meraním

Nepresnosť – špeciálny prípad neurčitosti vzťahujúci sa na nejaké technické prostriedky; súvisí s chybou
Neurčitosť – môže zahŕňať chyby, stochastičnosť (náhodnosť) systému

Technická podpora pre fuzzy riadenie

kapitola 5.2 v skriptách