Mechanika: náuka o rovnováhe a pohybe telies → mech. tuhého telesa

statika kinemat. dynamika

→ mechanika tekutín

statika kinematika dynamika

statika tekutín — hydrostatika — aerostatika

kinematika tekutín

dynamika tekutín — hydrodynamika — aerodynamika

nestlačiteľných tekutín (kvapaliny)

stlačiteľné tekutiny (plyny)

termodynamika – náuka o prúdení

termodynamika – náuka o energii [energetické procesy]

termomechanika – náuka o teple

Tekutiny

- voda [illegible]
- prúdiaca (tečúca voda)
- plyn v uzavretej nádobe

Tekutiny – kvapaliny
– plyny

Tuhé látky – kryštalické
– amorfné

Hydromechanika

- náuka o pohybe kvapalín
a) hydrostatika
b) hydrodynamika

Kvapaliny

vlastnosti:

1) hustota $\rho = \frac{m}{V}$ — stredná ~~hustota~~ hustota

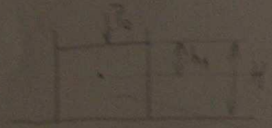
m hmotnosť V objem

$\rho = \frac{dm}{dV}$ $\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}$ $[kg \cdot m^{-3}]$

hustota v určitom bode stredná ~~hustota~~ hustota

$\rho = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}$

Príklad:

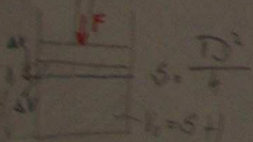


p_0 - atmosférický tlak

$\rho = \frac{dm}{dV} = f(h)$

Stlačiteľnosť kvapalín

$\Delta V = V_0 \cdot \beta_p \cdot \Delta p$



$S = \frac{\pi D^2}{4}$ $V_0 = S \cdot h$

$p = \frac{F}{S}$

kvapalina je stlačiteľná

$\Delta V = V_0 \beta_p \Delta p$ Δp - zmena tlaku

počiatočný tlak $p = \frac{F}{S} = 0$ $(F=0)$ konečný tlak $p_1 = \frac{F}{S}$

β_p - koeficient stlačiteľnosti $\beta_p = [Pa^{-1}]$

$\beta_p = \beta_p(t, p)$ $[K] = Pa$

$K = \frac{1}{\beta_p}$ modul objemovej pružnosti

$\Delta V = V - V_0$ V - konečný objem $\Rightarrow \boxed{V = V_0 (1 - \beta_p \Delta p)}$

Kde sa prejavuje vplyv stlačiteľnosti?

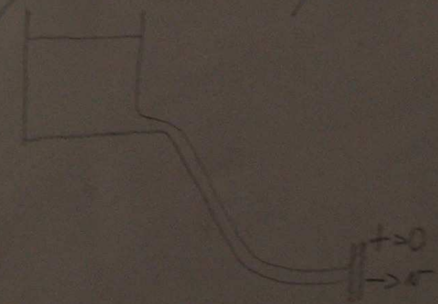
1) $w = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$ voda: $\sqrt{\frac{2,3 \cdot 10^9}{10^3}} = 1516,6\ m s^{-1}$

šírenie zvuku železná tyč: $\sqrt{\frac{2,2 \cdot 10^{11}}{7,8 \cdot 10^3}} = 5310\ m s^{-1}$

vzduch: $w \doteq 331,3\ m s^{-1}$

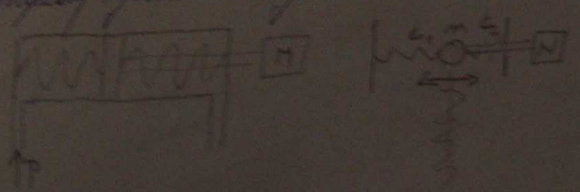
2) hydraulický ráz v potrubí:

- vplyv šírenia tlakových vĺn pri hydraulickom ráze



$t \to 0$
$\to v$

3) stlačiteľnosť (K) určuje vlastnú frekvenciu kmitania stĺpca kvapaliny hydraulického systému



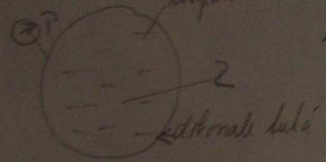
$\sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}} \Rightarrow$ vlastná frekvencia

Teplotná roztažnosť

$\Delta V = V_0 \beta_p \Delta T$

- ΔT → rozdiel teplôt
- β_p → koef. tepl. roztažnosti
- V_0 → pôvodný objem

Príklad:



poznáme $\beta_p =$

$\beta_T =$

$V_0 =$

úloha: pôvodný stav

$p = p_0$

$V = V_0$

$T = T_0$

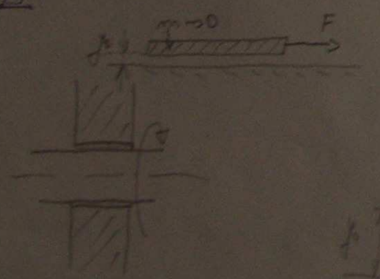
sa zmení

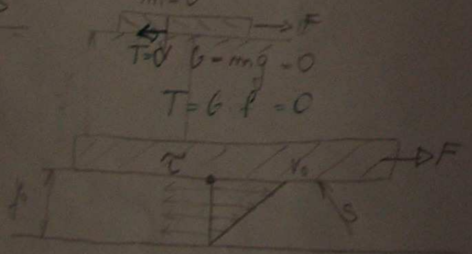
$T = T_1 > T_0$

hľadáme: $p_1 = ?$

Viskozita

Pokus:





$G - mg = 0$

$T = G \cdot f = 0$

$F = \tau \cdot S$

S – dotyková plocha kvapaliny a dosky

$\tau = \mu \frac{dv}{dy}$ $\qquad \tau = \mu \frac{\Delta v}{\Delta y}$ $\qquad$ Newtonov vzorec

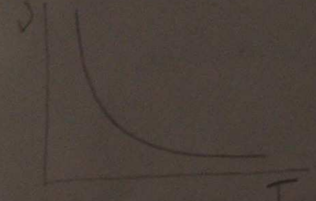
- $\frac{dv}{dy}$ → gradient rýchlosti
- μ → dynamická viskozita

$\frac{dv}{dy} = \frac{v_0}{y_0}$ $\qquad \tau = \mu \frac{v_0}{y_0}$ $\qquad \boxed{F = \mu \frac{v_0}{y_0} \cdot S}$

Kinematická viskozita

$\nu = \frac{\mu}{\rho}$ $[m^2 s^{-1}]$ $\qquad \mu = [Pa \cdot s]$

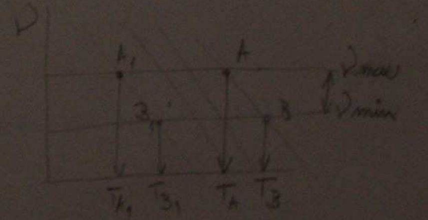
Viskozita sa mení s teplotou a tlakom



$\nu = \nu_0 e^{-kT}$

Zmena viskozity s tlakom

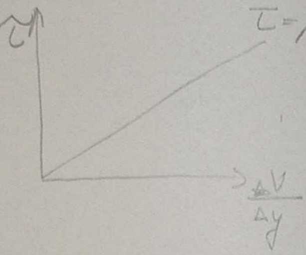
$\mu = \mu_0 e^{\alpha(p - p_0)}$



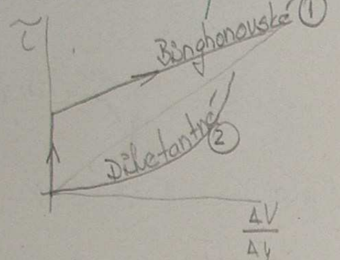
Newtonská a nenewtonovská kvapalina

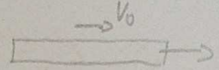
Newtonovské kvapaliny

$$\tau = \mu \cdot \frac{\Delta v}{\Delta y}$$



Nenewtonovská kvapalina





$F = \tau \cdot S$

① krémy, pasty, bahy, olej ~~ako~~ pod bodom tuhnutia

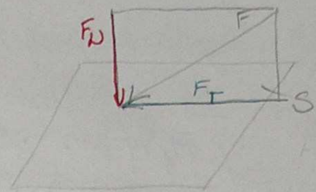
② zmesi kvapalín s tuhými časticami

Nenewtonovská s nestacionárnym reogramom

Tlak a jeho vlastnosti

- definícia tlaku
- vznik a šírenie tlaku v kvapalinách
- udávanie tlaku
- aplikácie
- podiel sily a plochy $p = \frac{dF}{dS}$

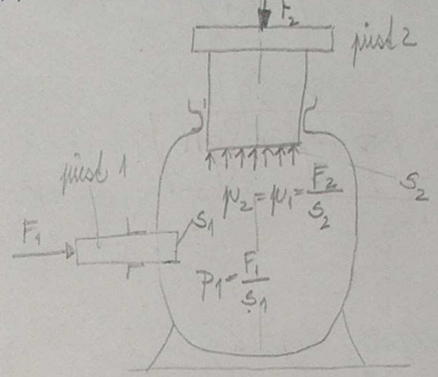
sila F je kolmá na plochu S



$$p = \frac{F_T}{S}$$

$F_T = \tau S$ tangenc. zložka od sily

Zákon Pascalov



Práca sily F_1

$A_1 = F_1 \cdot \Delta s_1$ (dráha)

$A_2 = F_2 \, \Delta s_2$

$A_1 = A_2$

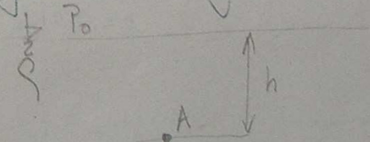
$F_1 = p_1 S_1$

$F_2 = p_2 S_2$

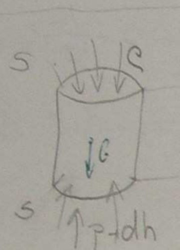
$$p_1 \underbrace{S_1 \Delta s_1}_{V_1} = p_2 \underbrace{S_2 \Delta s_2}_{V_2}$$

$$p_1 = p_2$$

Vplyv vlastnej tiaže kvapaliny



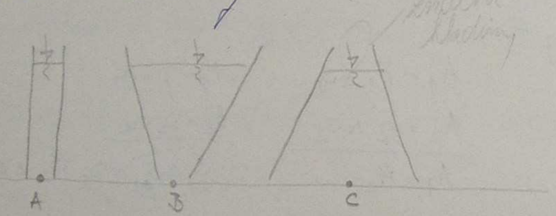
$$p_A = p_0 + \rho g h$$



$$p \cdot S + G - (p+dp)\cdot S = 0$$
$$G = \rho g S dh$$
$$p \cdot S + \rho g S dh - pS - dp S = 0$$
$$dp\, S = \rho g S dh$$
$$dp = \rho g dh$$
$$p = \rho g \int_0^h dh$$
$$p = \rho g h$$
$$\boxed{p = p_0 + \rho g h}$$

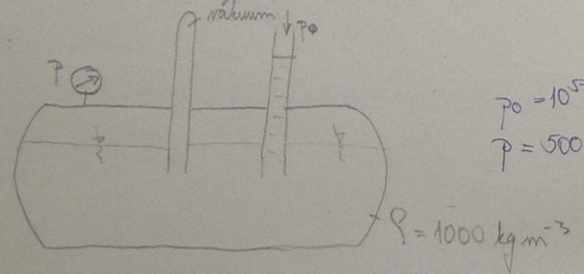
Hydrostatický tlak

Tlak vyvolaný tiažou stĺpca kvapaliny
- závisí len od hĺbky "h"



$p_A = p_B = p_C$

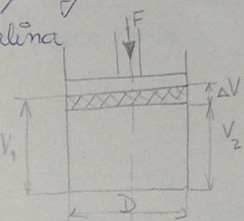
Príklad:



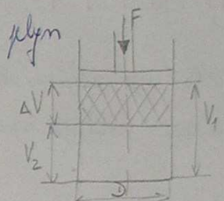
$p_0 = 10^5\ Pa$
$p = 500\ kPa$ (abs.)
$\rho = 1000\ kg\, m^{-3}$

Porovnajte vlastnosti kvapalín a plynov na príklade stlačiteľnosti a teplotnej rozťažnosti

kvapalina



plyn



V_1 - objem na začiatku
$p_1 = p_0$ (konšt.)
m piestu $= 0$

$\Delta V = V_1 \beta_p \Delta p$ $\quad \Delta V = V_2 - V_1$

$\Delta V = V_2 - V_1$ $\quad$ 3 možnosti: 1, stavová rovnica

$\Delta p = p_2 - p_1 \quad p_2 = \frac{F}{S}$ $\quad pV = m r T$ (r – plyn. konštanta)

$\beta_p = \frac{1}{K} \Rightarrow K = \frac{1}{\beta_p}$

$$p_1 V_1 = m r T_1$$
$$p_2 V_2 = m r T_2$$

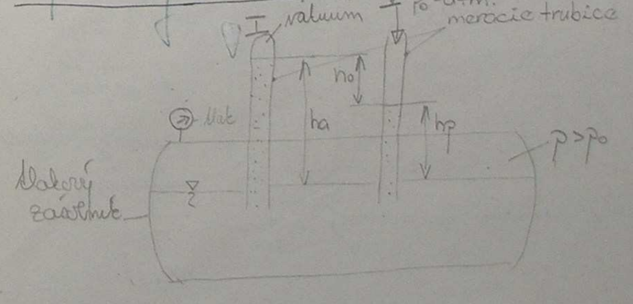
ideálny plyn - jeho molekuly nie sú pod vplyvom potenc. energií, nedochádza ku stratám

$$V_2 = \frac{p_1}{p_2} V_1 \left(\frac{T_2}{T_1}\right) \text{ - zmena objemu}$$

u plynov závisí od spôsobu ako dej prebieha

$K = \frac{1}{\beta_p}$ izotermický / adiabatický

Spôsoby udávania tlaku v technickej praxi



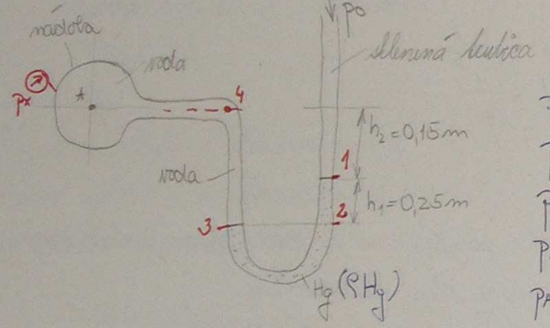
trubica 1: $p_a - \rho g h_a$ absolútny tlak

trubica 2: $p_p - \rho g h_p = p - p_0$ pretlak (rozdiel medzi absolútnym a atmosferickým)

Pretlak resp. podtlak je relatívny tlak

Tlakomery - väčšinou udávajú pretlak

Trubicové tlakomery, princíp funkcie, konštrukčné typy, použitie



$p_1 = p_0$

$p_2 = p_0 + \rho_{Hg} \cdot g \cdot h_1$

$p_3 = p_2$

$p_4 = p_3 - \rho_{H_2O}\, g (h_1 + h_2)$

$p_A = p_3 - \rho_{H_2O}\, g (h_1 + h_2)$

$p_A = p_2 - \rho_{H_2O}\, g (h_1 + h_2)$

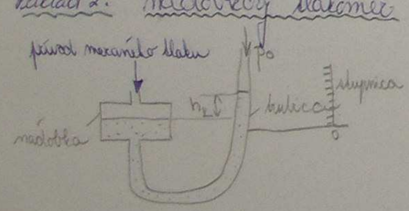
$p_A = p_0 + \rho_{Hg}\, g h_1 - \rho_{H_2O}\, g (h_1 + h_2) \rightarrow$

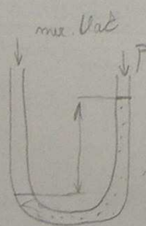
$\rightarrow$ údaj p_x

Príklad: Máme určiť tlak v bode A

ak dáme ⊘

Príklad 2: nádobkový tlakomer

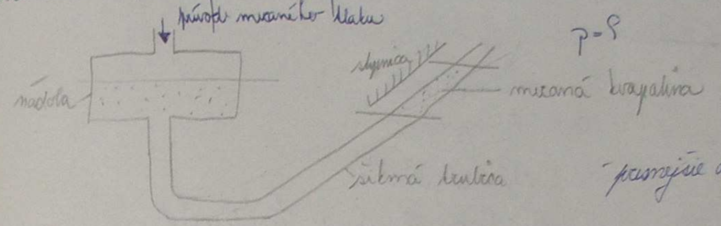




- pri zmene meraného tlaku sa pohybujú obidve hladiny

- hladina v nádobke je prakticky na rovnaký úrovni

Príklad 3: šikmý nádobkový tlakomer

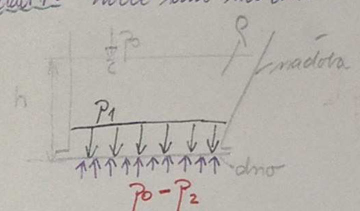


$p = \rho$

- presnejšie odpočítavanie

Určenie sily od tlaku kvapaliny na vodorovné rovinné steny nádob

Príklad 1: Určiť silu na dno



$p_0 - p_2$

tlaky na dno:

$p_1 = p_0 + \rho g h$

$p_2 = p_0$

výsledný tlak:

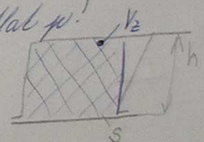
$p = p_1 - p_2 = p_0 + \rho g h - p_0$

$p = \rho g h$

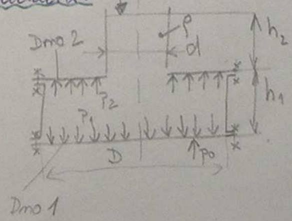
sila na dno od výsledného tlaku

$F = p \cdot S$ — plocha na ktorú pôsobí tlak p!

$F = \rho g \underbrace{h S}_{V_z} = \rho g V_z$



Príklad 2:



DNO 1:

výsledný tlak

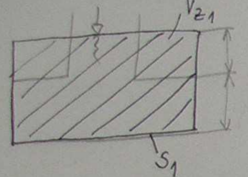
$p_1 = \rho g (h_1 + h_2)$

sila na dno 1:

$F_1 = p_1 S_1 = g \rho (h_1 + h_2) \cdot S_1$ $\left(S_1 = \frac{\pi D^2}{4}\right)$

$F_1 = \rho g \left[\underbrace{(h_1 + h_2) \cdot S_1}_{V_z}\right]$ $V_{z1} = S_1 (h_1 + h_2)$

DNO2:



výsledný tlak na dno 2

$p_2 = \rho g h_2$

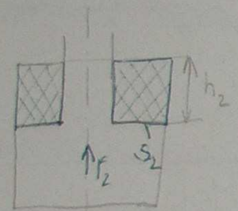
výsledná sila

$F_2 = p_2 S_2$

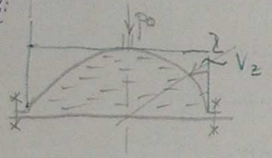
$S_2 = \frac{\pi}{4}(D^2-d^2)$

$F_2 = \rho g h_2 \cdot S_2 - \rho g h_2 \frac{\pi}{4}(D^2-d^2)$

$F_2 = \rho g [h_2 \cdot S_2]$



Príklad 3:

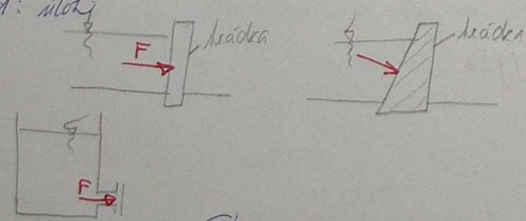


$F = \rho g V_z$

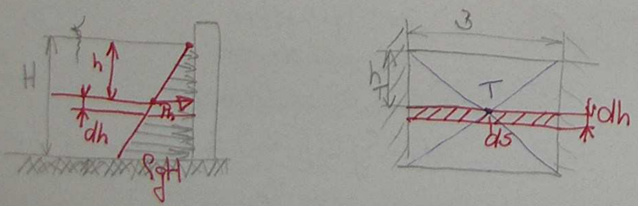
Určenie sily od tlaku na zvislú resp. šikmú rovinnú plochu

Určenie tlakového centra

Príklad: silo



a) určenie sily veľkosti



$F = p S$

$p_h = \rho g h$

na plochu dS pôsobí tlak:

$p = \rho g h$ a sila $dF = p\, dS$

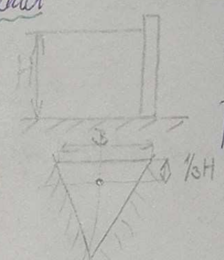
$dS = B\, dh$

$dF = \rho g h B\, dh$

$F = \rho g B \int_0^H h\, dh$

$F = \rho g B \left[\frac{h^2}{2}\right]_0^H = \boxed{\rho g B \frac{H^2}{2}}$

Príklad:



$F = p_T \cdot S$

$p_T = \rho g h_T = \rho g \frac{1}{3} H$

$F = \underbrace{\left(\rho g \frac{H}{2}\right)}_{p_T} (BH)$ ↳ $S = B \cdot H$

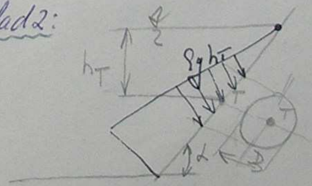
$p_T = \rho g h_T$ hĺbka ťažiska plochy

$\boxed{F = p_T \cdot S}$

veľkosť plochy

tlak v ťažisku plochy

Príklad 2:

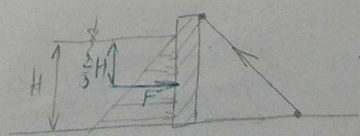


$F = p_T \cdot S$

$p = \rho g h_T$

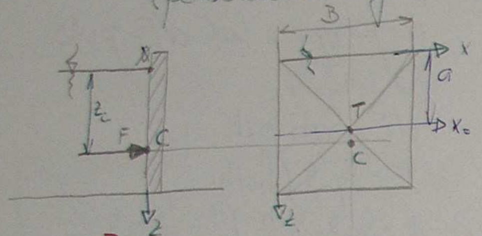
$S = \frac{\pi D^2}{4}$

$F = \rho g h_T \frac{\pi D^2}{4}$



sila F nepôsobí v ťažisku plochy!

Určenie polohy tlakového centra
(pôsobiska výslednej sily)



$z_c = \frac{I_x}{S_x}$

I_x - moment zotrvačnosti plochy k osi "x"

S_x - statický moment plochy k osi "x"

$I_x = I_0 + S a^2$

a - vzdialenosť osí "x_0" a "x"

S - veľkosť plochy

I_0 - plošný moment zotrvačnosti plochy k osi "x_0"

$\boxed{I_0 = \frac{BH^3}{12} \quad S = BH \quad a = \frac{H}{2}}$

$$I_x = \frac{BH^3}{12} + BH \cdot \left(\frac{H}{2}\right)^2$$

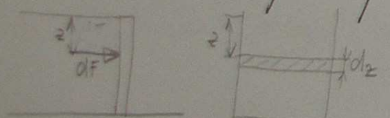
$$\boxed{I_x = \frac{BH^3}{12} + \frac{BH^3}{4}}$$

$$S_x = S a$$

$$\boxed{S_x = BH \cdot \frac{H}{2}}$$

$$z_c = \frac{\frac{BH^3}{12} + \frac{BH^3}{4}}{\frac{BH^2}{2}} = \frac{2}{3} H$$

Odvodenie vzorca → postup



$$\int dF_z = F_V \cdot z_c$$

$$M - \int z\, dF = F_V \cdot z_c$$

$$z_c = \frac{\int z \cdot \rho g z\, dz\, B}{S z_T}$$

$$M = \int dF \cdot z$$

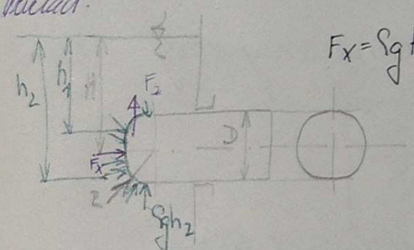
$$M = F \cdot z_c$$

$$\int dF_z = F \cdot z_c$$

$$z_c = \frac{\int dF_z}{F} = \frac{\int \rho g z B\, dz\, z}{\rho g h_T S z_c} = \frac{I_x}{S_x}$$

7 Určenie vodorovnej a zvislej zložky sily od tlaku na krivú plochu

Príklad:



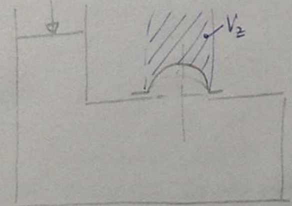
$$F_x = \rho g H \cancel{S} \left(\frac{\pi D^2}{4}\right) = \rho g H s_x$$

s_x - priemet krivej plochy do roviny zvislej

H - hĺbka ťažiska plochy s_x

$$F_x = p_{T_x} \cdot s_x$$

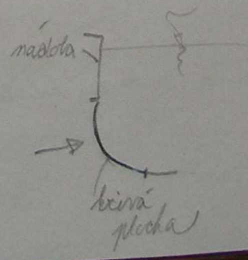
p_{T_x} - tlak v ťažisku priemetu plochy (s_x)

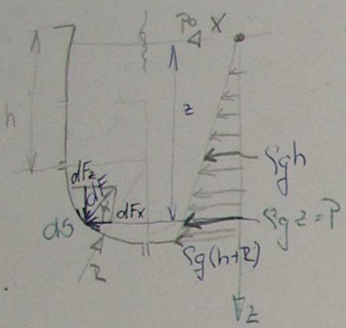


zistiť F_z:

$$F_z = \rho g V_z$$

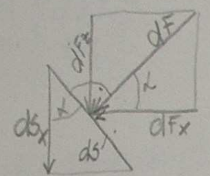
Úloha: Zistiť akou silou pôsobí kvapalina na polguľovú plochu pôsoda





Tlak pôsobí vždy kolmo na plochu

$dF = p\,dS = \rho g z\,dS$



$dF_x = dF\cos\alpha$

$dF_x = \rho g z \underbrace{dS\cos\alpha}$

dS_x – priemet plochy dS do roviny zvislej

$dF_x = \rho g z\,dS_x$

$F_x = \int_h^{h+R} \rho g z\,dS_x = \rho g\, z_{Tx} \cdot S_x$

z_{Tx} – vzdialenosť ťažiska plochy S_x od hladiny

S_x – priemet plochy celej roviny zvislej

$F_x = \underbrace{\rho g\, z_{Tx}}_{p_{Tx}} \cdot S_x = p_{Tx} \cdot S_x$

Zvislá zložka F_z

$dF_z = \rho g z\, dS \sin\alpha$

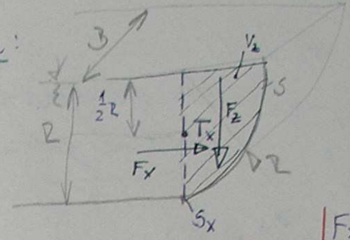
dS_z – priemet plochy dS do roviny vodorovnej

$dF_z = \rho g \cdot \underbrace{z\,dS_z}_{V_z}$

$dF_z = \rho g V_z$

V_z – objem medzi krivou plochou a rovinou hladiny

Príklad:



$F_x = ?$

$\boxed{F_x = p_{Tx} \cdot S_x}$

$\boxed{S_x = R \cdot B}$

$p_{Tx} = \rho g \left(\frac{1}{2}R\right)$

$\boxed{F_x = \rho g \frac{1}{2}R \cdot R \cdot B = \rho g \frac{R^2 \cdot B}{2}}$

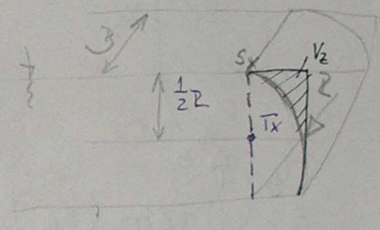
$F_z = ?$

$\boxed{F_z = \rho g V_z}$

$V_z = \frac{1}{4}\pi R^2 \cdot B$

$\boxed{F_z = \rho g \frac{1}{4}\pi R^2 \cdot B}$

Príklad:



$F_x = p_{Tx} \cdot S_x$

$S_x = B \cdot R$

$p_{Tx} = \rho \cdot g \cdot \frac{1}{2}R$

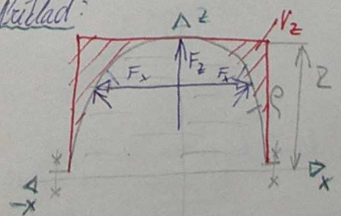
$F_x = \rho g \frac{1}{2} R \cdot R \cdot B$

$F_z = \rho g V_z$

$V_z = R \cdot R \cdot B - \frac{1}{4}\pi R^2 \cdot B$

$\boxed{F_z = \rho g \left[R^2 B - \frac{\pi R^2 B}{4}\right]}$

Príklad:



$F_x = p_{Tx} \cdot S_x$

$F_x = 0$

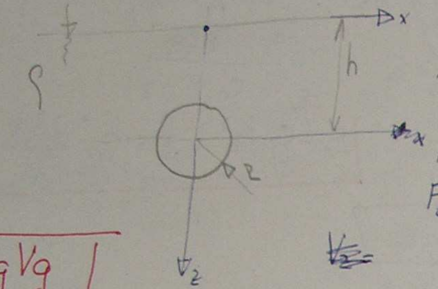
$F_z = \rho g V_z$

$V_z = \pi R^2 \cdot R - \frac{1}{2}\pi R^3$

~~F_z~~

8 Archimedov zákon

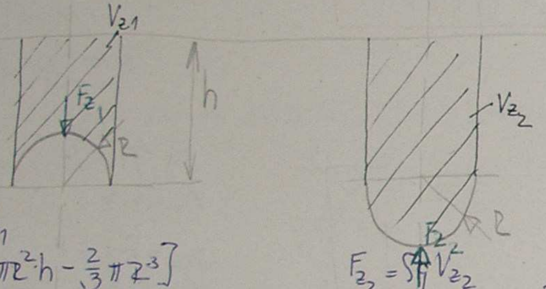
Aká sila výsledná bude pôsobiť na guľovú plochu?



$F_x = 0$

$F_z = \rho g V_z$

$\boxed{F = \rho g V_g}$



$F_{z_1} = \rho g V_{z_1}$

$F_{z_1} = \rho g [\pi r^2 h - \frac{2}{3}\pi r^3]$

$F_{z_2} = \rho g V_{z_2}$

$F_{z_2} = \rho g [\pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3]$

$F_z = F_{z_1} - F_{z_2}$

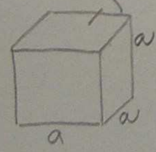
$F_z = \rho g [\pi r^2 h - \frac{2}{3}\pi r^3] - \rho g [\pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3]$

$F_z = -\rho g \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$ – objem gule

Plávanie telies

Príklad: kocka o stranách a x a x a

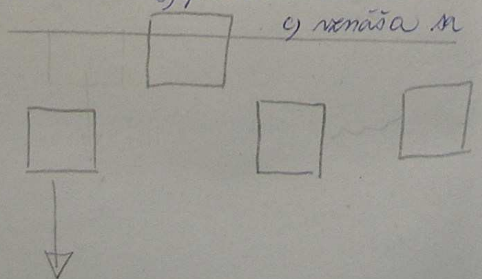
ρ: hustota

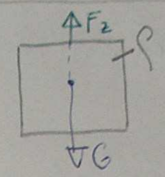


a) klesá ku dnu

b) pláva na hladine

c) vznáša sa





$G = \rho g a^3$ tiaž kocky

$F_z = \rho g V_z$

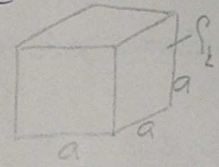
V_z - objem ponorenej časti telesa

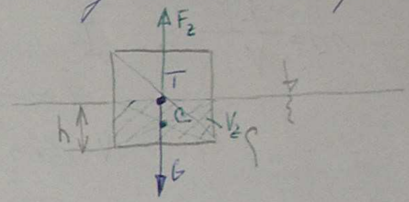
a) $G > F_z$ klesá

b) $G < F_z$ pláva na hladine

c) $G = F_z$ vznáša sa

Úloha: Máme určiť aká časť objemu telesa bude ponorená





ρ - hustota kvapaliny

$G = F_z$

ρ_t: $G = \rho g a^3$

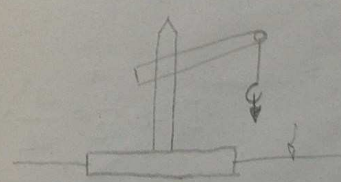
$F_z = \rho g V_z$ $V_z = a^2 \cdot h$

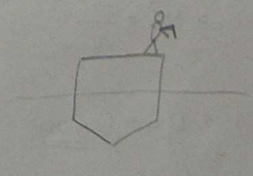
$F_z = \rho g a^2 h$

$\rho_t g a^3 = \rho g a^2 h$

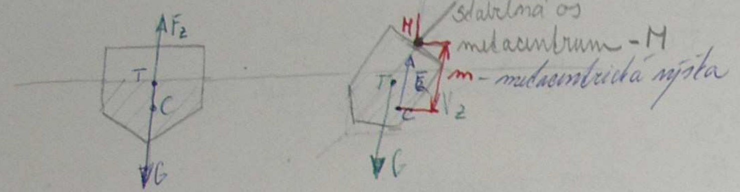
$\boxed{h = \frac{\rho_t}{\rho} a}$

9 Statická stabilita plávania





Určenie stability plávania



Stabilita:

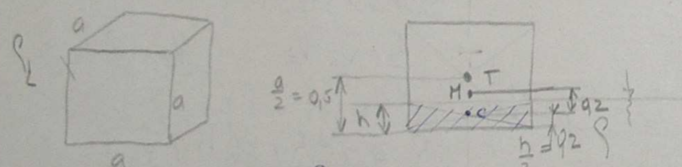
Určiť vzájomnú polohu bodov M, T, C

$$m = \frac{I}{V}$$

I - moment zotrvačnosti plavebnej plochy k plavebnej osi

V - objem ponorenej časti

Príklad: Určiť či kocka bude ~~dávať stať~~ plávať stabilne alebo labilne



$$h = a\,\frac{\rho_k}{\rho}$$

povráti sa lebo M je nad vodou

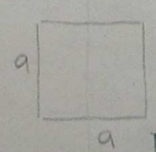
$a = 1\,m$

$\rho = 1000\ kg\,m^{-3}$

$\rho_k = 400\ kg\,m^{-3}$

$$h = 1\,\frac{400}{1000} = \underline{0{,}4\,m}$$

× Pohľad zhora



$$I_x = a\,\frac{a^3}{12} = \frac{a^4}{12}$$

$$m = \overline{MC} = \frac{I}{V}$$

$$I = \frac{a^4}{12}$$

$$V = a\cdot a\cdot h = 1\cdot 1\cdot 0{,}4 = \underline{0{,}4\,m^3}$$

$$m = \frac{\frac{a^4}{12}}{0{,}4} = \frac{1}{0{,}4\cdot 12} = \frac{1}{4{,}8} = \underline{0{,}2\ m}$$

10

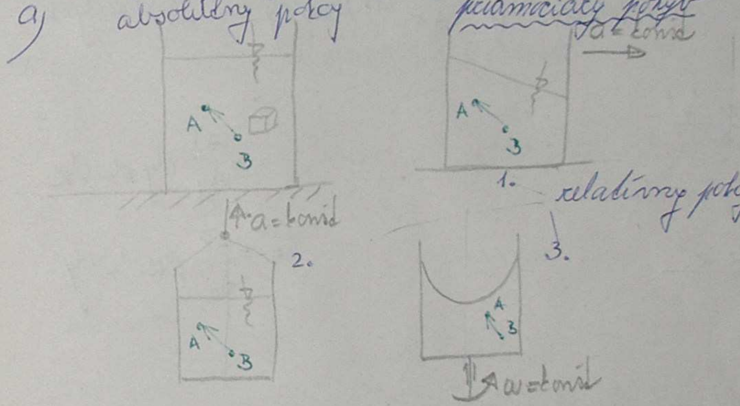
① Pojmy "absolútny" a "relatívny" pokoj

② Sily pôsobiace na element kvapaliny nachádzajúcej sa v absolútnom alebo relatívnom pokoji

Eulerova rovnica hydrostatiky

1. Príklady „pokoja"

a) absolútny pokoj — priamočiary pohyb



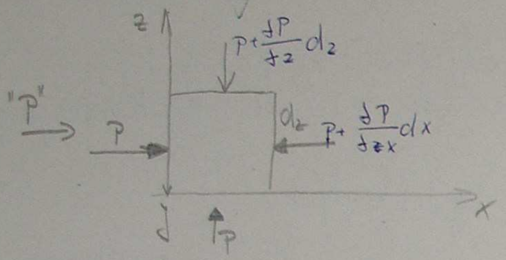
pokoj: spoločné: vzdialenosť bodov zostala

absolútny: celok ani body sa nepohybujú

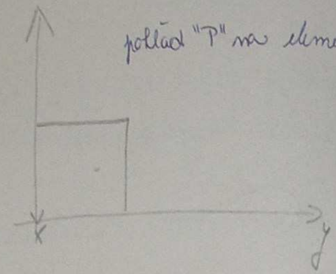
relatívny: celok sa pohybuje

2. a) Povrchové sily od tlaku
   b) Sily objemové (hmotnostné) → Sily od silového poľa

Povrchové sily na element



pohľad "P" na element



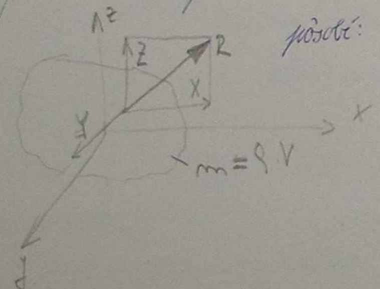
výsledná sila od tlaku v smere osi "x"

$$p \cdot (dz\,dy) - \left(p + \frac{\partial P}{\partial x} dx\right) dz\,dy = -\frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz$$

v smere osi "y" $\quad$ – " – $\quad = -\frac{\partial P}{\partial y}\,dy\,dx\,dz$

v smere osi "z" $\quad$ – " – $\quad = -\frac{\partial P}{\partial z}\,dz\,dx\,dy$

Sily od silového poľa



pôsobí: odstredivá sila →

$\boxed{F = m \cdot r \cdot \omega^2}$

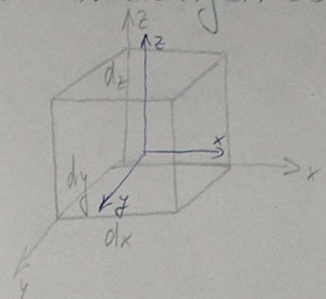
sila tiaže $\boxed{G = m \cdot g}$

sila zotrvačná $\boxed{F = m\,a}$

$\vec{R}$ - výsledný vektor od síl silového poľa

$$\vec{R} = \vec{X} + \vec{Y} + \vec{Z}$$

Zložky síl od silového poľa v smere súradných osí



v smere osi "x"

$$X \cdot dm = \rho X \cdot \underbrace{dx\,dy\,dz}_{dV}$$

$[X] = m \cdot s^{-2}$ alebo - sila pripadajúca na 1 kg kvapaliny

v smere osi "y"

$$Y dm = \rho Y\,dx\,dy\,dz$$

$$\underbrace{\rho\,dx\,dy\,dz}_{dm} \cdot Y$$

v smere osi "z"

$$Z dm = \rho Z\,dx\,dy\,dz$$

$$\rho X \cancel{dx\,dy\,dz} - \frac{\partial P}{\partial x} \cancel{dx\,dy\,dz} = 0 \Rightarrow \rho X dx = \frac{\partial P}{\partial x} dx$$

$$\rho Y \cancel{dx\,dy\,dz} - \frac{\partial P}{\partial y} \cancel{dy\,dx\,dz} = 0 \Rightarrow \rho Y dy = \frac{\partial P}{\partial y} dy$$

$$\rho Z \cancel{dx\,dy\,dz} - \frac{\partial P}{\partial z} \cancel{dx\,dy\,dz} = 0 \Rightarrow \rho Z dz = \frac{\partial P}{\partial z} dz$$

$$\rho X dx + \rho Y dy + \rho Z dz = \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz$$

$$\boxed{\rho(Xdx + Ydy + Zdz) = dp}$$ Eulerova rovnica hydrostatiky

- rovnica rovnováhy medzi silami povrchovými (od tlaku) a silami od silového poľa

X, Y, Z - zložky ~~zrýchlenia~~ silového poľa od smeru súradnicových osí

ρ - hustota

dp - prírastok tlaku

Dve základné úlohy

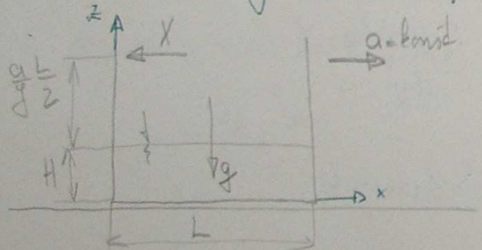
a) Rozloženie tlaku pri pôsobení síl silového poľa

b) Určenie rovnotlakých hladín

$p = \text{konšt} \Rightarrow dp = 0$

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

11 Priamočiary posuvný pohyb nádoby



určenie rovnotlakých hladín:

$X = -a$ $\quad$ $p = \text{konšt} \rightarrow dp = 0$

$Z = -g$

$Y = 0$

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

$$-adx + 0 - gdz = 0$$

$$-adx - gdz = 0$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{a}{g}$$

$$\underline{\underline{z = -\frac{a}{g}x + c}}$$

$x = \frac{L}{2}$

$z = H$

$$H = -\frac{a}{g}\cdot\frac{L}{2} + c$$

$$c = +\frac{a}{g}\frac{L}{2} + H$$

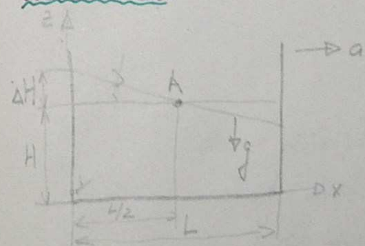
$$z = -\frac{a}{g}x + \frac{a}{g}\frac{L}{2} + H$$

$$z = \frac{a}{g}\left(\frac{L}{2} - x\right) + H$$

$x = 0$

$$z = \frac{a}{g}\frac{L}{2} + H$$

Príklad:



a) určiť rovnicu rovnotlakých hladín

b) určiť rozloženie tlaku v nádobe pri jej pohybe

- zadanie s konštantným zrýchlením „a" nádoby

Postup: 1.) zvolím súradnicový systém

2.) určíme X, Y, Z

$X = -a$ $\quad$ $dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz)$

$Y = 0$ $\quad$ $dp = \rho(-adx + 0dy - gdz)$

$Z = -g$

- rovnotlaká hladina je plocha, na ktorej je tlak $p = \text{konšt.}$

3) dosadím do Euler. rovnic

- najprv nás zaujíma povrchová hladina:

$p = konšt \Rightarrow dp = 0 \qquad 0 = \rho(-adx - gdz)$

$-adx - gdz = 0$

$-\frac{dz}{dx} = \frac{a}{g}$

$z = -\frac{a}{g} \cdot x + c$

$x_A = L/2 \qquad H = -\frac{a}{g} \cdot \frac{L}{2} + c$

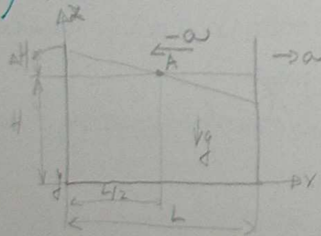
$z_A = H \qquad c = H + \frac{a}{g} \cdot \frac{L}{2}$

$\boxed{z = -\frac{a}{g}x + H + \frac{aL}{g2}}$ $\qquad x = 0$

$z = H + \frac{a}{g}\frac{L}{2} \Rightarrow \Delta H = \frac{a}{g}\frac{L}{2}$

$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz)$

b) určiť rozloženie tlaku



$dp = \rho(-adx - gdz)$

$dp = -\rho adx - \rho gdz$

$p = -\rho ax - \rho gz$

$x = \frac{L}{2}$

$z = H$

$p = p_0$ (atmosf. tlak)

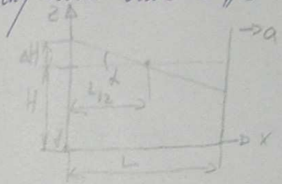
$p_0 = -\rho a\frac{L}{2} - \rho gH + c \Rightarrow c = p_0 + \rho a\frac{L}{2} + \rho gH$

$p = -\rho ax - \rho gz + p_0 + \rho a\frac{L}{2} + \rho gH$

$p = p_0 + \rho g(H - z) + \rho a(\frac{L}{2} - x)$

Jednoduchý spôsob určenia hladinovej plochy

Aký bude tlak v „B"?



$x_B = 0$

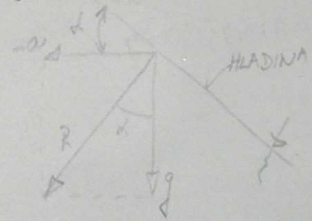
$z_B = 0$

$p = p_0 + \rho a\frac{L}{2} + \rho gH$

$p_0 = p - \rho(H + \Delta H)$

~~Hladinová plo~~

Hladinová plocha je vždy kolmá k výslednému vektoru síl od silového poľa



R - výsledný vektor od silového poľa

$tg\,\alpha = \frac{a}{g} = \frac{\Delta H}{\frac{L}{2}}$

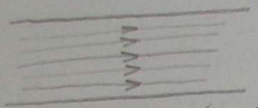
$\Delta H = \frac{L}{2}\,tg\,\alpha$

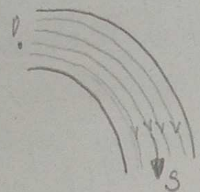
12 Aplikácia rovnice kontinuity

- zákon zachovania hmoty pre prúdiace kvapaliny
- pre nestlačiteľnú kvapalinu
- ustálené prúdenie

prúdenie - pohyb kvapaliny z miesta s väčšou potenciálnou energiou na miesto s nižšou potenciálnou energiou

Druhy prúdenia:





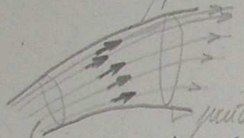
$v = v(s)$

$x = x(s)$

$v = v(s)$

Jednorozmerné prúdenie
(dá sa popísať jednou súradnicou)

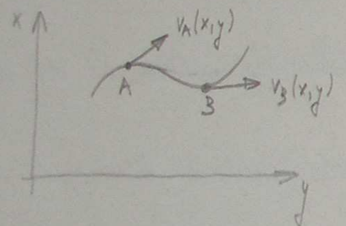
plášť



prúdiaca trubica

prúdové čiary (prúdnice), v má smer dotyčnice

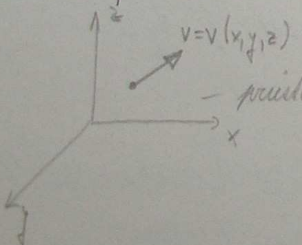
2-rozmerné prúdenie



$v = v(x,y) = \left< \begin{matrix} v_x \\ v_y \end{matrix} \right.$

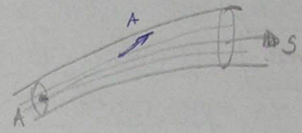
$a = a(x,y) = \left< \begin{matrix} a_x \\ a_y \end{matrix} \right.$

3-rozmerné prúdenie



– priestor pohybu tekutiny

Prúdenie ustálené (stacionárne) a neustálené (nestacionárne)

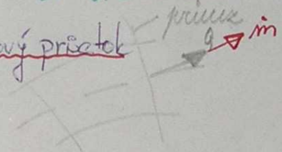


pre ustálené prúdenie: v_A = konšt. - nezávisí na čase

pre neustálené prúdenie: $v_A = v_A(t)$

Rovnica kontinuity pre nestlačiteľnú kvapal. a ustálené jednorozmerné prúdenie

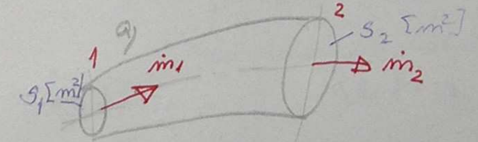
a) objemový prietok



Q – množstvo tekutiny, kt. pretečie prierezom za určitý čas $Q\,[m^3/s]$

b) hmotnostný prietok

$\dot{m}\,[kg/s]$ vzťah medzi nimi $\dot{m} = Q \cdot \rho$



$\dot{m}_1 = 5\,kg\,s^{-1}$

$\dot{m}_2 = 5\,kg\,s^{-1}$

a) nestlačiteľná, neustálené prúdenie — $\dot{m}_1 = \dot{m}_2$

b) stlačiteľná, neustálené — $\dot{m}_1 \neq \dot{m}_2$

c) nestlačiteľná, ustálené — $\dot{m}_1 = \dot{m}_2$

d) stlačiteľná, ustálené — $\dot{m}_1 = \dot{m}_2$

$\dot{m}_1 = \dot{m}_2$

$\dot{m}_1 = Q_1 \rho_1 = S_1 v_1 \rho_1$

$\dot{m}_2 = Q_2 \rho_2 = S_2 v_2 \rho_2$

$\dot m_1 = \dot m_2$

$S_1 v_1 \rho_1 = S_2 v_2 \rho_2$ – pokiaľ je nestlačiteľná $\rho_1 = \rho_2$

$\boxed{S_1 v_1 = S_2 v_2 = konšt}$ Rovnica kontinuity pre nestlač. prúdenie

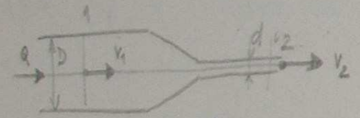
- rovnica kontinuity pre nestlačiteľnú tekutinu a ustálené prúdenie

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 = konšt.$$

- rovnica kontinuity pre stlačiteľnú tekutinu a ustálené prúdenie

$$S_1 v_1 \rho_1 = S_2 v_2 \rho_2 = S v \rho = konšt.$$
$$\rho_1 \neq \rho_2$$

Príklad:



dané: D, d, Q, nestlač.

? v_1, v_2

$Q_1 = v_1 S_1 = v_1 \frac{\pi D^2}{4}$

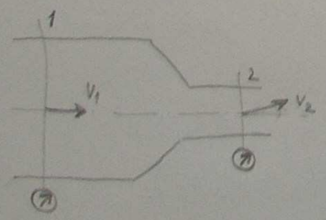
$Q_2 = v_2 S_2 = v_2 \frac{\pi D^2}{4} = Q_1$ $\quad Q_1 = Q_2$

$v_1 \frac{\pi D^2}{4} = Q \Rightarrow v_1 = Q \frac{4}{\pi D^2}$ $\quad v_2 = Q \frac{4}{\pi D^2}$

(13) Bernoulliho rovnica

Zákon o zachovaní energie

- nestlačiteľná tekutina
- ustálené prúdenie



$p_1 = 1000 kPa$

$p_2 < p_1$

Energie prúdiacej kvapaliny

a) polohová energia

$$E_p = mgh$$
$$\frac{E_p}{m} = e_p = g \cdot h \quad [J/kg]$$ – špecifická polohová energia

b) kinetická energia

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$
$$\frac{E_k}{m} = e_k = \frac{1}{2} v^2 \quad [J/kg]$$ – špecif. kinet. energia

c) tlaková energia

$$E_t = p \cdot V$$
$$\frac{E_t}{m} = \frac{p \cdot V}{m} = \frac{p}{\frac{m}{V}} = \frac{p}{\rho}$$ – špecif. tlak. energia

d) tepelná energia

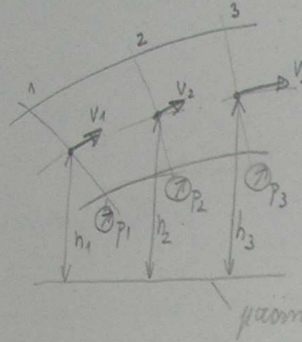
$$E_z = mcT$$
$$e_z = cT$$ – špecif. vnútorná tepelná energia

↓ pojímajú sa ako dôsledok strát energie vplyvom viskozity

Celková špecifická energia

$$e = e_p + e_k + e_t$$
$$e = gh + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho}$$

- celk. špecif. nestlač. a ~~ne~~ neustálený prúdiacej kvapaliny v prúdovej trubici je v každom priereze rovnaká



$$gh_1 + \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = gh_2 + \frac{v_2^2}{2} = gh_3 + \frac{v_3^2}{2} + \frac{p_3}{\rho}$$

$$gh + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = konšt.$$

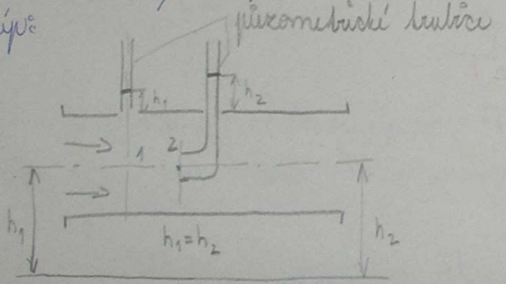
- súčet špecif. energií polohovej, kinetickej a tlakovej je v každom priereze prúdovej trubice rovnaký

(14) Venturiho vodomer
Pitotova trubica

Pitotova trubica

- na meranie rýchlosti prúdenia

princíp:



Bernoulliho rovnica pre prierezy 1 a 2

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gh_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gh_2$$

$$h_1 = h_2 \quad v_2 = 0$$

$$\frac{v_1^2}{2} = \frac{p_2 - p_1}{\rho}$$

hydrostatický tlak – tlak spôsobený stĺpcom kvapaliny $p = \rho g h$

v bode 1: $p_1 = \rho g \left(h_{11} + \frac{d}{2}\right)$

$$(p_2 - p_1) = \rho g (h_{22} - h_{11})$$

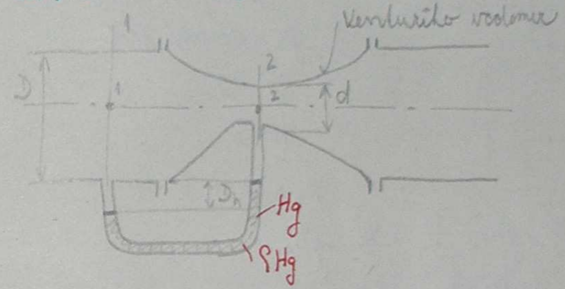
v bode 2: $\rho g \left(h_{22} + \frac{d}{2}\right)$

$$\frac{v_1^2}{2} = \frac{\rho g (h_{22} - h_{11})}{\rho}$$

$$h_{22} - h_{11} = \Delta h$$

$$v_1 = \sqrt{2g\Delta h}$$

Venturiho vodomer



- meranie objemového prietoku:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gh_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gh_2$$

- vodomer je umiestnený vodorovne $h_1 = h_2$
- rovnica kontinuity $S_1 v_1 = S_2 v_2 \Rightarrow v_2 = v_1 \frac{S_1}{S_2}$

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2}$$

$$\boxed{\frac{p_1 - p_2}{\rho} = \frac{1}{2} v_1^2 \left[\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1\right]}$$

trubicový tlakomer: $(p_1 - p_2) = \rho_{Hg} \cdot g \cdot \Delta h$

$$\frac{\rho_{Hg} \cdot g \cdot \Delta h}{\rho} = \frac{1}{2} v_1^2 \left[\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1\right]$$

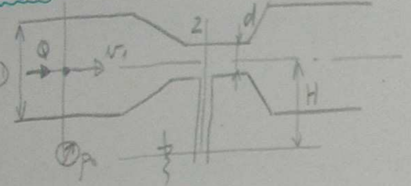
$$v_1 = \sqrt{\frac{2\rho_{Hg}\, g \Delta h}{\rho\left[\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1\right]}}$$

$$Q = v_1 S_1 \Rightarrow \boxed{v_1 = \frac{Q}{S_1} = \frac{Q4}{\pi D^2}}$$

$$Q = \underbrace{S_1 \sqrt{\frac{2\rho_{Hg} \cdot g}{\rho\left[\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1\right]}}}_{k} \cdot \sqrt{\Delta h}$$

$Q = k \cdot \sqrt{\Delta h}$ - odčítam z diferenciálneho tlakomeru

Príklad:



p_0 = atmosf. tlak

$\frac{D}{d} = 5$ $\quad p_2 = ?$

$H = ?$

$p_2 = \rho g H \Rightarrow H$

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gh_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gh_2$$

$$h_1 = h_2$$

$$p_1 = p_0$$

$$\frac{p_2}{\rho} = \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} - \frac{v_2^2}{2}$$

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 \Rightarrow v_1 = v_2 \frac{S_2}{S_1}$$

$$\frac{p_2}{\rho} = \frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2} v_2^2 \left[\left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2 - 1\right]$$

$$\frac{p_2}{\rho} = \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_2^2}{2}\left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2 - \frac{v_2^2}{2}$$

$$v_2 = \frac{Q}{S_2}$$

$$\frac{p_2}{\rho} = \frac{p_0}{\rho} - \frac{Q^2}{S_2^2}\left[1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2\right]$$

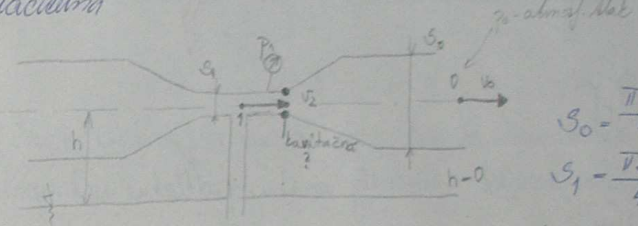
$$\boxed{p_2 = \rho g H}$$

15 Vznik podtlaku a jeho využitie v praxi, príčiny, priebeh a dôsledky gravitácie v hydraulických zariadeniach

Ideálna kvapalina

a) neviskózna

b) nestlačiteľná



$$S_0 = \frac{\pi D_0^2}{4}$$

$$S_1 = \frac{\pi D_1^2}{4}$$

Bernoulliho rovnica pre prúdnicu: pre 1 a 0

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gh_1 = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gh_0$$

$\left.\begin{array}{l} gh_1 = gh \\ gh_0 = gh \end{array}\right\}$ vodorovná poloha trubice

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v_0^2}{2}$$

$$\frac{p_0 - p_1}{\rho} = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2}$$

p_0 - atmosférický tlak

p_1 - absolútny tlak v priereze ①

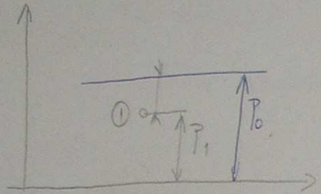
rovnica kontinuity: $Sv = konšt.$

$$S_1 v_1 = S_0 v_0$$

$$v_1 = \frac{S_0}{S_1} v_0$$

$$\frac{p_0 - p_1}{\rho} = \frac{1}{2}\left[v_0^2\left(\frac{S_0}{S_1}\right)^2 - v_0^2\right] = \frac{1}{2} v_0^2\left[\left(\frac{S_0}{S_1}\right)^2 - 1\right]$$

$$p_0 - p_1 = \frac{1}{2}\rho v_0^2\left[\left(\frac{S_0}{S_1}\right)^2 - 1\right]$$



Ukážka h:

$$p_0 - p_1 = \rho g h$$

$$h = \frac{p_0 - p_1}{\rho g}$$

Závery:

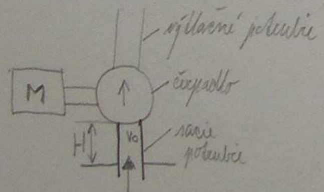
1, ak potrubie ústie do atmosféry, v zúženom priereze pred vyústením vznikne podtlak. Dôsledky vzniku podtlaku v kvapalinovom stĺpci:

a) poklesom tlaku pod úroveň atmosf. tlaku klesá bod varu kvapalín, dochádza k viac alebo menej intenzívnemu odparovaniu

b) vzniknuté bubliny zanikajú v priestore s vyšším tlakom

kavitácia - jav, kt. vzniká vplyvom podtlaku nasýtených pár

Možnosti vzniku kavitácie

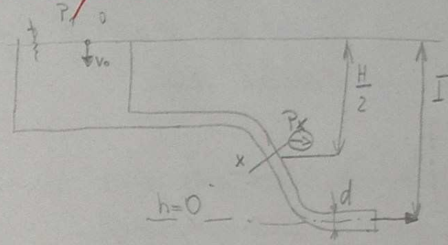


$$p_0 - p = \rho g h + \frac{v_0^2}{2}$$

podtlak

16 Výtok ideálnej kvapaliny potrubím z nádrže, určenie tlakových a prietokových pomerov

a) gravitačné potrubie



D: rozľahlá nádrž
priemer potrubia ∅
výška H
?: v_1, Q

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{v_0^2}{2} + g h_0 = \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + g h_1$$

$v_0 = 0$ $\quad v_0 \ll v_1 \quad p_1 = p_0$

$h_0 = H \quad h_1 = 0$

$$gH = \frac{v_1^2}{2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gH}$$

$$Q = S_1 v_1$$

$$S_1 = \frac{\pi d^2}{4} \qquad Q = \frac{\pi d^2}{4} \cdot v_1$$

$$\frac{p_x}{\rho} + \frac{v_x^2}{2} + g h_x = \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + g h_1 \quad (g h_1 = 0)$$

$v_x = v_1 \quad p_1 = p_0$

$$\frac{p_x}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + g\frac{H}{2} = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} \quad \left(\frac{v_1^2}{2} = 0\right)$$

$$\frac{p_x}{\rho} = \frac{p_0}{\rho} + g\frac{H}{2} - \frac{v_1^2}{2}$$

22

Všeobecná energetická rovnica

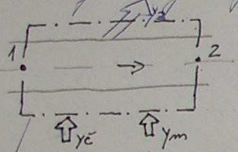
1.) platnosť Bernulliho rovnice pre ideálnu kvapalinu

a) nestlačiteľná, ustálená

b) medzi 2 prierezmi nesmie byť žiadne mech. zariadenie dodávajúce alebo odoberajúce energiu (čerpadlo, turbína - hydromotor)

c) nesmie dochádzať žiadny prechod tepla z alebo do kvapaliny

d) nevznikajú straty energie v dôsledku trenia



1.- vstup energie (vnútorná energia)

2- výstup energie (-||-

prívod v tl. bilancuji energia

$y_č$ - špecif. energia čerpadla

y_m - -||- hydrauli. motora

y_z - špecif. stratová energia

energia kvapaliny na vstupe:

$$e_1 = \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gh_1$$

energia na výstupe

$$e_2 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gh_2$$

y_z straty z dôvodu viskozity kvapaliny

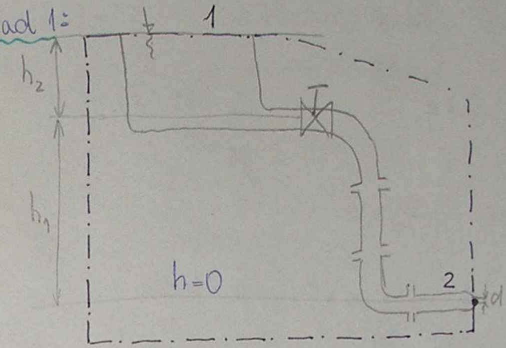
Rovnica energetickej bilancie:

vstupy (+) výstupy (−)

$$e_1 + y_č - y_m - y_z - e_2 = 0$$

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gh_1 + y_č + y_m - y_z - \left(\frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gh_2\right) = 0$$

Príklad 1:



D: $Q = 0{,}044\ m^3 s^{-1}$

$h_1 - 3{,}9\ m$

$h_2 - 3{,}6\ m$

Voda prúdi z rezervoáru veľkého. Vyp. stratovú energiu systému spôsobenú miestnymi odpormi. (ventil, koleno, potrubia ...)

$$e_1 - y_z - e_2 = 0$$

$$y_z = \left(\frac{p_0}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gh_1\right) - \left(\frac{p_2}{\rho} + \frac{v_0^2}{2} + gh_2\right)$$

$p_1 = p_0$

$v_1 = 0$

$p_2 = p_0$

$$h_3 + h_4 = h$$

$$h_2 = 0$$

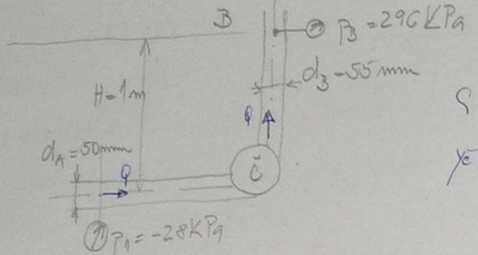
$$\boxed{y_z = g(h_3 + h_4) - \left(\frac{v_2^2}{2}\right)}$$

$$v_2 = \frac{Q}{\frac{\pi d^2}{4}}$$

$d = 4\ cm$

$$v_2 = \frac{0{,}044}{\frac{\pi (0{,}04)^2}{4}} = \quad m/s$$

Príklad 2:



$\rho = 860\ kg\,m^{-2}$

$y_č = ?$

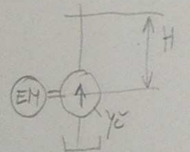
$e_A + y_č - y_m - y_z - e_B = 0$ $\qquad y_z = 0$ (zanedbávame)

$$y_č + \frac{p_A}{\rho} + \frac{v_A^2}{2} + g h_A = \frac{p_B}{\rho} + \frac{v_B^2}{2} + g h_B$$

$$v_A = \frac{Q4}{\pi d_A^2} \qquad v_B = \frac{4Q}{\pi d_B^2}$$

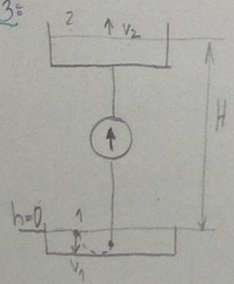
$$y_č = \frac{p_B}{\rho} + \frac{v_B^2}{2} + gH - \left(\frac{p_A}{\rho} + \frac{v_A^2}{2}\right)$$

$$y_č = \frac{p_B - p_A}{\rho} + \frac{v_B^2 - v_A^2}{2} + gH \qquad \underline{y_č = 386{,}5\ J\,kg^{-1}}$$



$y_č = g \cdot H$

Príklad 3:



$y_z = 0$

$y_č = ?$

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_A^2}{2} + g h_1 + y_č = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_B^2}{2} + g h_2$$

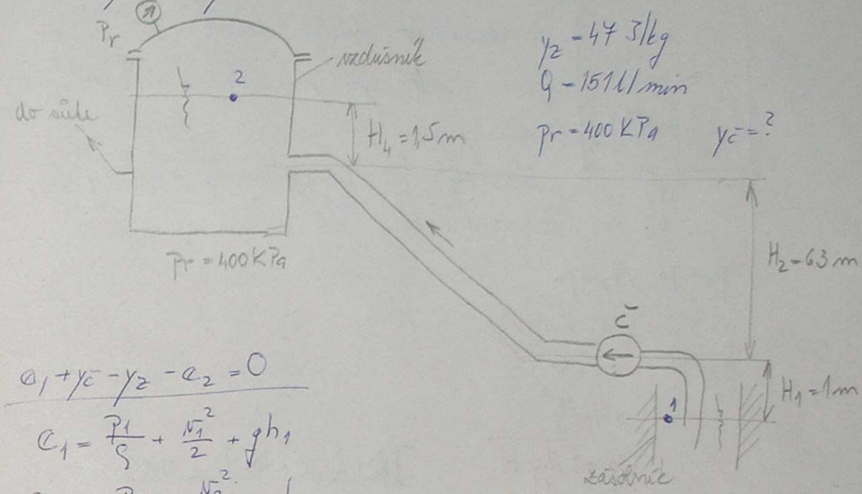
$p_1 = p_0$; $p_2 = p_0$ $\qquad v_1 = 0 \qquad v_2 = 0$

$h_1 = 0 \qquad h_2 = H$

$$y_č = g(h_2 - h_1) = gH$$

Príklad:

Návrh čerpadla pre domácu vodáreň



$y_z = 47\ J/kg$

$Q = 151\ l/min$

$p_r = 400\ kPa$ $\qquad y_č = ?$

$e_1 + y_č - y_z - e_2 = 0$

$$e_1 = \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + g h_1$$

$$e_2 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + g h_2$$

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + g h_1 + y_č - y_z = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + g h_2$$

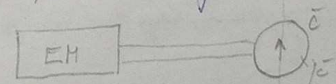
$p_1 = p_0 \quad v_1 = 0 \quad h_1 = 0 \quad p_2 = p_0 + 400 \cdot 10^3$

$v_2 = 0 \quad h_2 = H_1 + H_2 + H_4$

$$\frac{p_0}{\rho} + y_č - y_z = \frac{p_0 + p_v}{\rho} + g(H_1 + H_2 + H_4)$$

$$y_č = y_z + \frac{p_v}{\rho} + g(H_1 + H_2 + H_4)$$

$y_č = 1074\ J\,kg^{-1}$



$P_č = y_č \cdot \rho \cdot Q \left[\frac{J}{kg} \cdot \frac{kg}{m^3} \cdot \frac{m^3}{s}\right] = \frac{J}{s} = W$

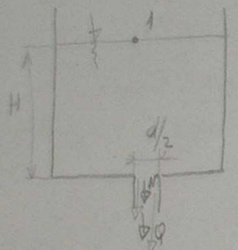
čerpadlu musíme dodať výkon: $\quad P_č = \dfrac{P_{č+}}{\eta_č}$ — hodi. výkon — účinnosť čerpadla

$\eta = 0{,}85$

$$P_č = \frac{P_{č+}}{\eta_č} = \frac{y_č \rho \cdot Q}{\eta} = \frac{1074 \cdot 1000 \cdot 151 \cdot 10^{-3}}{60 \cdot 0{,}85} = \underline{3{,}1\ kW}$$

(12)

Vyprázdňovanie nádob



urč. - v - výtoková rýchlosť

Q - vytekajúce množstvo $[m^3/s]$

Bernoulli: $\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gh_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gh_2$

$p_1 = p_0 \qquad p_2 = p_0$

$v_1 = 0 \qquad v_2 = v = ?$

$h_1 = H \qquad h_2 = 0$

$gH = \frac{v^2}{2}$

$v = \sqrt{2gH}$ — Torricelliho vzorec

$Q = v_2 \cdot S_2 = v \cdot \frac{\pi d^2}{4}$

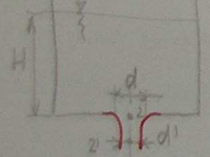
$Q = \frac{\pi d^2}{4} \cdot \sqrt{2gH}$

skutočná výtoková rýchlosť: $v_s < v$ ... straty energie spôsobené trením o otvor → viskozita

$v_s = \varphi \cdot v$ $\qquad \varphi$ - stratový súčiniteľ

$v_s = \varphi \cdot \sqrt{2gH}$

skutočný prietok: $Q_s < Q$ .. skutočný prierez, ktorým kvapalina vyteká



$S' < S$

$Q_s = \alpha \cdot Q$

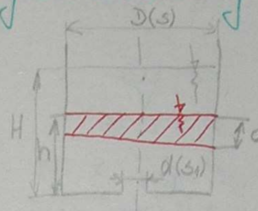
$\alpha = \frac{S'}{S}$

$Q_s = \underbrace{\alpha \cdot S \cdot \varphi}_{\mu} \sqrt{2gH}$

$\mu = \alpha \varphi S$ - výtokový súčiniteľ

$\boxed{Q_s = \mu S \sqrt{2gH}}$

Výtok z nádoby pri premenlivej výške hladiny



D - priemer nádoby

d - priemer otvoru

S - plocha hladiny $\left(\frac{\pi D^2}{4} = S\right)$

S_1 - prierez hladiny $\left(\frac{\pi d^2}{4} = S_1\right)$

- ak je hladina vo výške "h"

$v = \sqrt{2gh}$, za čas dt z nádoby vytečie:

$Q\,dt = S v\,dt \quad [m^3]$

$m^2 \cdot \frac{m}{s} \cdot s = m^3$

$S_1 \cdot v\,dt = -S\,dh$

$Q\,dt = -S\,dh$

$\hookrightarrow Q = S_1 \sqrt{2gh}$

$S_1 \sqrt{2gh} \cdot dt = -S\,dh$

$S_1 \sqrt{2gh}\,dt = -S\,dh$

- počítame čas, za ktorý sa nádoba vyprázdni

$$dt = -\frac{S\,dh}{\mu \cdot S_1 \sqrt{2gh}}$$

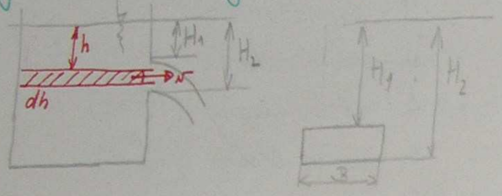
$$dt = -\frac{S}{\mu S_1 \sqrt{2g}} \cdot \frac{dh}{\sqrt{h}}$$

$$\int_0^{t_0} dt = -\frac{S}{\mu S_1 \sqrt{2g}} \int_H^0 \frac{dh}{\sqrt{h}}$$

$$t_0 = -\frac{2S}{\mu S_1 \sqrt{2g}} \left[h_2^{1/2} - h_1^{1/2}\right]_H^0$$

$$t_0 = -\frac{2S}{\mu S_1 \sqrt{2g}} \left[0 - \sqrt{H}\right]$$

Výtok z nádoby veľkým otvorom



$v = \sqrt{2gh}$

$dQ = v \cdot dS$

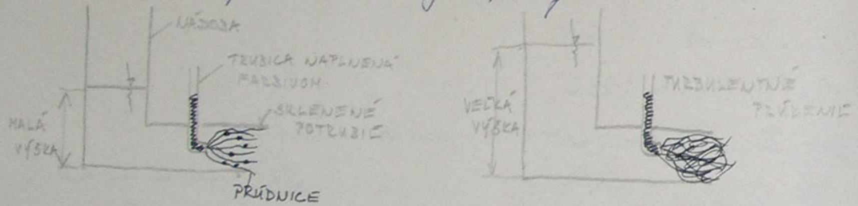
$dQ = \sqrt{2gh} \cdot B \cdot dh$

$Q = \int_{H_1}^{H_2} \sqrt{2gh} \cdot B \, dh$

17 Druhy prúdenia reálnej kvapaliny

Reynoldsov pokus

- mechanizmus prúdenia viskóznej kvapaliny



- straty energie pri prúdení, závisia od toho či je prúdenie laminárne alebo turbulentné

Kritérium pre určenie druhu prúdenia

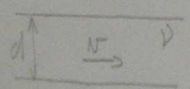
Reynoldsovo číslo

pre kruhové prierezy: $Re = \frac{v \cdot d}{\nu}$

v - stredná rýchlosť

d - priemer

ν - kinematická viskozita



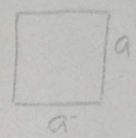
pre nekruhové prierezy: $Re = \frac{v(4 \cdot R_h)}{\nu}$

R_h - hydraulický polomer

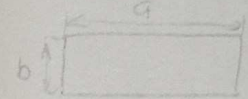
$R_h = \frac{S}{O}$

S - prierez vedenia

O - zmáčaný obvod



$R_h = \frac{S}{O} = \frac{a^2}{4a} = \frac{a}{4}$ $\quad Re = \frac{v(4R_h)}{\nu} = \frac{v \cdot a}{\nu}$



$R_h = \frac{S}{O} = \frac{a \cdot b}{2(a+b)}$ $\quad Re = \frac{v \cdot 4 \left[\frac{a b}{2(a+b)}\right]}{\nu}$

$Re = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{m \cdot m}{s \cdot m^2} = [-]$

Kritické Re

pri $Re = Re_k$ - dochádza k zmene laminárneho na turbulentné

pre bežné aplikácie (prúdenie vody v potrubí) je $Re_k = 2320$

$Re < Re_k$ laminárne

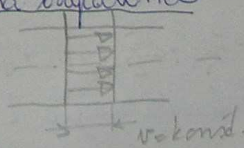
$Re > Re_k$ turbulentné

doporučuje sa:

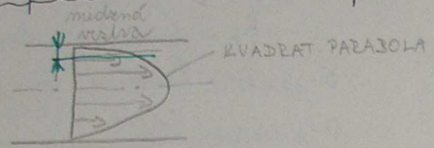
- pre prípady prúdenia cez rôzne konštrukčné uzly ~~(hydraul.~~ hodnotu Re_k si môžeme overiť v odbornej lite.

Rychlostný profil

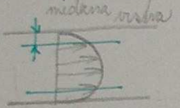
- priebeh rýchlosti v priereze kolmom na smer prúdenia
- ideálna neviskózna kvapalina



- reálna kvapalina – laminárne prúdenie

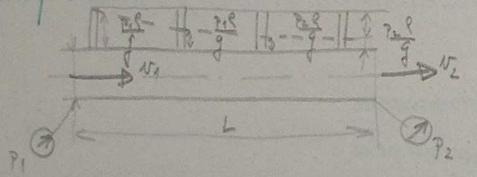


- reálna kvapalina – turbulentné prúdenie



19 Určenie strát trením pri prúdení reálnej kvapaliny

Bernoulliho rovnica pre reálnu (viskóznu) kvapalinu



$\Delta p = p_1 - p_2$

$p_2 < p_1$! z dôvodu strát

$Q = v \cdot S = \frac{v \pi D^2}{4}$

pre ideálnu kvapalinu

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gh_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gh_2$$

pre reálnu kvapalinu

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gh_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gh_2 + Y_{z12}$$

Y_{z12} – špecif. stratová energia $[\frac{J}{kg}]$

použitím B.r.

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gh_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gh_2 + Y_{z12}$$

$v_1 = v_2$ $h_1 = h_2$ (vodorovne)

$$\boxed{\frac{p_1 - p_2}{\rho} = Y_{z12}}$$

určenie Y_z výpočtom: $Y_{z12} = \lambda \frac{L}{D} \cdot \frac{v^2}{2}$

λ - súčiniteľ strát trením, súč. dĺžkových strát

L dĺžka v^2 - rýchlosť D - priemer

Darcyho vzorec pre určenie strát

Určenie súčiniteľa dĺžkových strát „λ"

λ - závisí od druhu prúdenia
druh prúdenia určíme podľa Re } → λ závisí od Re

$Re < Re_k$ - laminárne $Re < (2320)$

$\lambda = \frac{64}{Re}$ - dá sa odvodiť teoreticky

$Re > Re_k$ (2320) - prúdenie turbulentné

v hydraulicky hladkom potrubí → $\lambda = \frac{0,316}{\sqrt[4]{Re}}$

v hyd. drsnom potrubí → λ tu nezávisí od Re, ale od drsnosti potrubia

určujeme λ z grafov alebo z experimentálne získaných vzorcov

Príklad: Určte špecifickú stratovú energiu ak glycerín prúdi potrubím dlhým $L = 30\,m$ s $\phi = 150\,mm$ $v = 4\,ms^{-1}$ $\rho = 1263\,kg\,m^{-3}$ $\mu = 4{,}88 \cdot 10^{-1}\,Pas$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{4{,}88 \cdot 10^{-1}}{1263} =$$

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{v \cdot d}{\frac{\mu}{\rho}} = \frac{4 \cdot 0{,}150 \cdot 1263}{4{,}88 \cdot 10^{-1}} = \underline{\underline{1553}}$$

$$\lambda = \frac{64}{Re} = \frac{64}{1553} =$$

$$Y_z = \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{v^2}{2} = \frac{64}{Re} \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{v^2}{2} = \frac{64}{1553} \cdot \frac{30}{0{,}15} \cdot \frac{4^2}{2} = 66{,}9\,J\,kg^{-1}$$

stratový výkon:

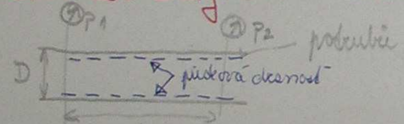
$$P_z = Q \cdot \rho \cdot Y_z = v \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot \rho \cdot Y_z = 4 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}15^2}{4} \cdot 1263 \cdot 66{,}9 = \dots\ W$$

$Y_z = g \cdot h_z$ $\quad h_z$ - stratová výška

$$h_z = \frac{Y_z}{g} = 6{,}69\,m$$

Určovanie λ z grafov:

Nikuradseov diagram (Nikuradseove pokusy)

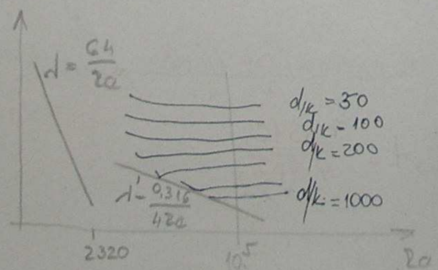


$$p_1 - p_2 = \Delta p$$

$$Y_z = \lambda \frac{L}{D} \cdot \frac{v^2}{2} = \frac{\Delta p_z}{\rho}$$ nameraním

$$\lambda = \frac{\Delta p_z}{\rho} \cdot \frac{2}{v^2} \cdot \frac{D}{L}$$

$$Re = \frac{v \cdot D}{\nu}$$



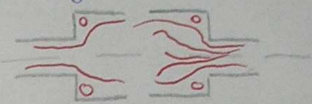
d - priemer potrubia

k - stredná výška nerovností

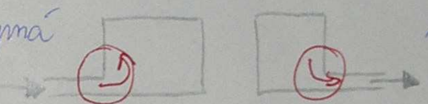
(20) Určovanie strát energie spôsobené miestnymi vplyvmi

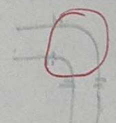
straty: dĺžkové (potrubie, hadice, dlhé konštrukčné kanály)
miestne (koncentrujú do určitého miesta)

Čo spôsobuje miestne straty:

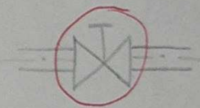


náhla zmena prierezu





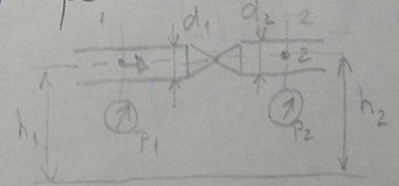
kolená



ventily a ďalšie

Postup určenia špecifickej stratovej energie

a) experimentálne (meraním



Bernoulliho: $\frac{p_1}{\rho} + \cancel{\frac{v_1^2}{2}} + g h_1 = \frac{p_2}{\rho} + \cancel{\frac{v_2^2}{2}} + g h_2 + Y_{12}$

$h_2 - h_1$ $\qquad v_1 S_1 = v_2 S_2$

$$v_1 \frac{\pi d_1^2}{4} = v_1 \frac{\pi d_2^2}{4} \Rightarrow (d_2 - d_1) v_1 = v_2$$

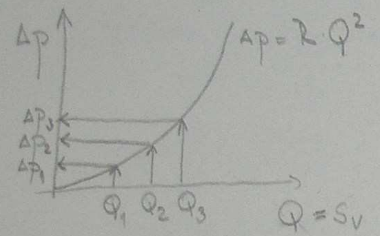
$$\frac{p_1}{\rho} = \frac{p_2}{\rho} + Y_{z12}$$

$$Y_{z12} \; \frac{p_1 - p_2}{\rho}$$

$$\Delta p = \rho \cdot Y_{z12}$$

$$\underline{p_1 - p_2 = \Delta p}$$ (tlaková strata)

$\hookrightarrow$ meraním



b) výpočtom

$$Y_{z12} = \xi \frac{v^2}{2}$$

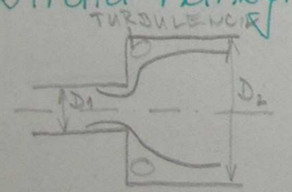
v – stredná rýchlosť prúdenia

ξ – súčiniteľ miestnych strát

Y_{z12} – špecifická stratová energia

ξ – pre každý miestny odpor iný; hľadáme v tabuľkách

Strata náhlym rozšírením



$$\xi = \left[1 - \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2\right]^2$$

$$D_2 \to \infty \Rightarrow \xi = 1$$

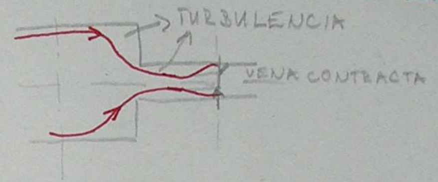
Príklad: $D_1 = 25{,}3$ mm $D_2 = 73{,}8$ mm $Q = 100$ l/min

$$\xi = \left[1 - \left(\frac{25{,}3}{73{,}8}\right)^2\right]^2 = 0{,}72$$

$$v_1 = \frac{Q}{S_1} = \frac{Q}{\frac{\pi D_1^2}{4}} = 3{,}32 \text{ m/s}$$

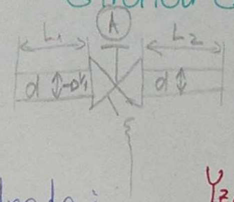
$$Y_{z12} = \xi \cdot \frac{v_1^2}{2} = 0{,}72 \cdot \frac{3{,}32^2}{2} = \underline{4 \text{ J/kg}}$$

STRATA NÁHLYM ZÚŽENÍM



$$\xi = \underline{0 - 0{,}5}$$

Ekvivalentná náhrada miestnej straty stratou dĺžkovou

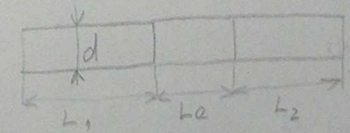


miestna strata: $Y_{zA} = \xi \frac{v_1^2}{2}$ → nahradíme ekvivalentnou dĺžkou Le

$$Y_{zA} = \xi \frac{v_1^2}{2} = \frac{Le}{d} \cdot \lambda \cdot \frac{v_1^2}{2}$$

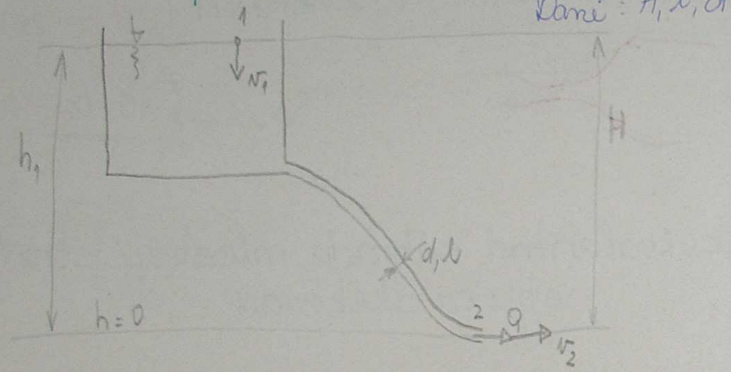
$$\boxed{Le = \frac{\xi}{\lambda} \cdot d}$$

⇓



21 Riešenie gravitačného potrubia

Dané: H, l, d



Q = ?

reálna kvapalina:

Bernoul. rov.

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gh_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gh_2 + Y_{z12}$$

$h_1 = H \quad h_2 = 0 \quad v_1 = 0$

$p_1 = p_a \quad p_2 = p_a$

$$gH = \frac{v_2^2}{2} + Y_{z12}$$

potrubie bez miestnych strát:

$$Y_{z12} = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2} \; \cancel{(v = v_2)}$$

$$gH = \frac{v_2^2}{2} + \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{v_2^2}{2}$$

λ - súči. dĺžkových strát $\qquad \lambda = \lambda(Re)$

$$gH = \frac{v_2^2}{2}\left(1 + \lambda \frac{l}{d}\right)$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2gH}{\left(1+\lambda\frac{l}{d}\right)}}$$

pre ideálnu kvapalinu $\lambda = 0$: $v = \sqrt{2gH}$

Další postup:

λ - máme dané $\lambda = 0{,}025$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2gH}{1+0{,}025\frac{l}{d}}}$$

$\lambda = \lambda(Re) \qquad Re = \frac{v_2 d}{\nu}$

$$v = \sqrt{\frac{2gH}{1+\lambda\frac{l}{d}}}$$ kde λ si zvolíme

$v_2 = \dots$

$Re = \dots$

$\lambda_1 = \dots$

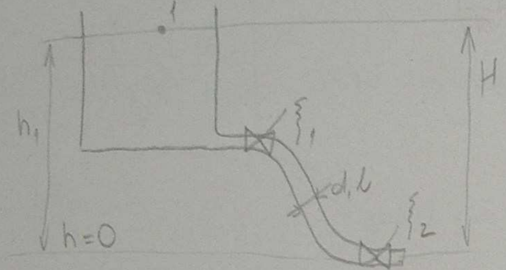
$v_2 = \dots^2$

$\lambda = \dots$

$Re = \dots$

Bez λ - zvolím si vlastné λ a riešim dovtedy kým sa mi v_2 nebude rovnať.

Riešenie grav. potrubia uvažovaním miestnych strát



$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + g h_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + g h_2 + Y_{z12}$$

$h_1 = H$ $\quad h_2 = 0$ $\quad p_1 = p_2 = p_a$ $\quad v_1 = 0$

$$gH = \frac{v_2^2}{2} + Y_{z12}$$

Y_{z12} → straty dĺžkové

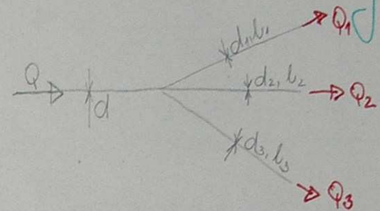
Y_{z12} → straty miestne

$$Y_{z12} = (\xi_1 + \xi_2)\frac{v_2^2}{2} + \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{v_2^2}{2}$$

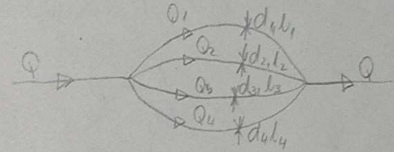
$$gH = \frac{v_2^2}{2} + (\xi_1 + \xi_2)\frac{v_2^2}{2} + \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{v_2^2}{2}$$

$$v_2 = \boxed{\sqrt{\frac{2gH}{1 + (\xi_1 + \xi_2) + \lambda \frac{l}{d}}}}$$

23 Spôsob riešenia rozvetvených potrubí

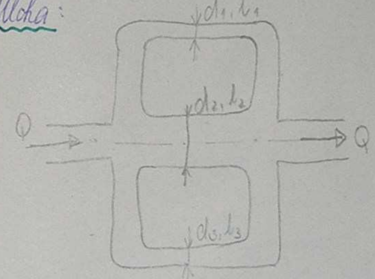


Úloha: Ak je daná Q, koľko bude Q_1, Q_2, Q_3



Úloha: Ak je daná Q, koľko bude Q_1, Q_2, Q_3, Q_4

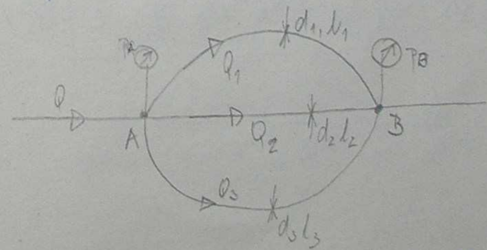
Úloha:



Dané: $Q, l_1, d_1, l_2, d_2, l_3, d_3$

určiť: Q_1, Q_2, Q_3

výpočtová schéma:



základná rovnica: $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$

$\Delta p_1 = p_A - p_B$

$\Delta p_2 = p_A - p_B$

$\Delta p_3 = p_A - p_B$

$Y_{z1} = Y_{z2} = Y_{z3}$

$$Y_{z_1} = \lambda_1 \frac{l_1}{d_1} \cdot \frac{v_1^2}{2}$$

$$Y_{z_2} = \lambda_2 \frac{l_2}{d_2} \cdot \frac{v_2^2}{2}$$

$$Y_{z_3} = \lambda_3 \frac{l_3}{d_3} \cdot \frac{v_3^2}{2}$$

$$Q_1 = S_1 v_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} \cdot v_1 \qquad Q_2 = S_2 v_2 = \frac{\pi d_2^2}{4} v_2 \qquad Q_3 = S_3 v_3 = \frac{\pi d_3^2}{4} v_3$$

$$v_1 = \frac{4}{\pi d_1^2} \cdot Q_1 \qquad v_2 = \frac{4}{\pi d_2^2} \cdot Q_2 \qquad v_3 = \frac{4}{\pi d_3^2} \cdot Q_3$$

$$Y_{z_{AB}} = \frac{\Delta p}{\rho} = \frac{p_A - p_B}{\rho}$$

$$Y_{z_1} = \lambda_1 \frac{l_1}{d_1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{\pi d_1^2} \cdot Q_1\right)^2$$

$$Y_{z_2} = \lambda_2 \frac{l_2}{d_2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{4}{\pi d_2^2}\right)^2 \cdot Q_2^2$$

$$Y_{z_3} = \lambda_3 \frac{l_3}{d_3} \frac{1}{2} \left(\frac{4}{\pi d_3^2}\right) Q_3^2$$

$$\lambda_1 \frac{l_1}{d_1} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{4}{\pi d_1^2}\right)^2 Q_1^2 = \lambda_2 \frac{l_2}{d_2} \frac{1}{2} \left(\frac{4}{\pi d_2^2}\right)^2 Q_2^2 = \lambda_3 \frac{l_3}{d_3} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{4}{\pi d_3^2}\right) \cdot Q_3^2$$

Q_1:

$$\lambda_1 \frac{l_1}{d_1} \cancel{\frac{1}{2}} \left(\cancel{\frac{4}{\pi d_1^2}}\right)^2 Q_1^2 = \lambda_2 \frac{l_2}{d_2} \cancel{\frac{1}{2}} \left(\cancel{\frac{4}{\pi d_2^2}}\right) Q_2^2$$

$$Q_2^2 = \frac{\lambda_1 \frac{l_1}{d_1} \left(\frac{1}{d_1^2}\right)^2}{\lambda_2 \frac{l_2}{d_2} \left(\frac{1}{d_2^2}\right)^2} \cdot Q_1^2$$

$$Q_2 = Q_1 \sqrt{\frac{\lambda_1 \frac{l_1}{d_1^5}}{\lambda_2 \frac{l_2}{d_2^5}}} \qquad Q_3 = Q_1 \sqrt{\frac{\lambda_1 \frac{l_1}{d_1^5}}{\lambda_3 \frac{l_3}{d_3^5}}}$$

$$Q = Q_1 + Q_1 \cdot \sqrt{\frac{\lambda_1 l_1 d_2^5}{\lambda_2 l_2 d_1^5}} + Q_1 \sqrt{\frac{\lambda_1 l_1 d_3^5}{\lambda_3 l_3 d_1^5}}$$

$$Q_1 = \frac{Q}{1 + \sqrt{\frac{\lambda_1 l_1 d_2^5}{\lambda_2 l_2 d_1^5}} + \sqrt{\frac{\lambda_1 l_1 d_3^5}{\lambda_3 l_3 d_1^5}}}$$

Grafické riešenie:

$$Y_{z_1} = Y_{z_2} = Y_{z_3} \qquad (\Delta p_1 = \Delta p_2 = \Delta p_3)$$

$$Y_{z_1} = \lambda_1 \frac{l_1}{d_1} \cdot \frac{v_1^2}{2}$$

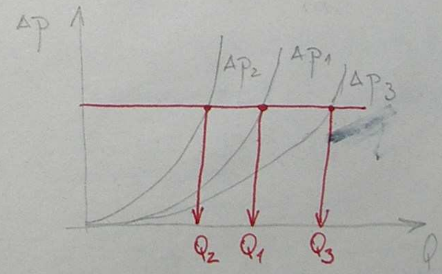
$$Q_1 = v_1 \frac{\pi d_1^2}{4} \Rightarrow v_1 = \frac{4}{\pi d_1^2} \cdot Q_1$$

$$Y_{z_1} = \lambda_1 \frac{l_1}{d_1} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{4}{\pi d_1^2}\right)^2 Q_1^2 = \frac{\Delta p}{\rho}$$

$$\Delta p_1 = \underbrace{\rho \cdot \lambda_1 \frac{l_1}{d_1} \frac{1}{2} \left(\frac{4}{\pi d_1^2}\right)^2}_{R_1} Q_1^2$$

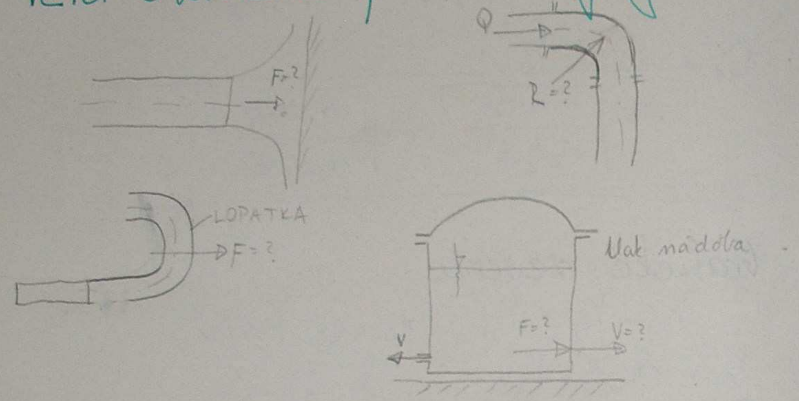
R_1 - odpor proti pohybu kvapaliny

$$\Delta p_1 = R_1 \cdot Q_1^2 \qquad \Delta p_2 = R_2 \cdot Q_2^2 \qquad \Delta p_3 = R_3 Q_3^2$$



$$\Delta p_{AB} = \Delta p_1 = \Delta p_2 = \Delta p_3$$

28 Veta o zmene prietokovej hybnosti

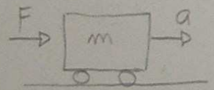


- trinajú prúdového motora
trinajú raketového motora

2. Newtonov zákon

Impulzová veta → veta o zmene hybnosti

pre každé teleso platí: $F = m \cdot a = m \dfrac{dv}{dt}$



$F = m \cdot a \qquad a = \dfrac{F}{m}$

$F = m \dfrac{\Delta v}{\Delta t} \qquad F\,dt = m\,dv \qquad F \Delta t = m \Delta v$

$\Delta v = \dfrac{F \Delta t}{m}$

$H = m \cdot v$ - hybnosť

$F = \dfrac{m}{\Delta t} \Delta v$

$\rho \cdot Q$ (u kvapalín)

$F = Q \cdot \rho \cdot \Delta v$

$\Rightarrow \dfrac{m}{\Delta t} = Q \cdot \rho = \dot{m}$ - hmotnostný prietok

$[\dot{m}] = \dfrac{kg}{s}$

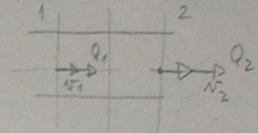
$[Q] = \dfrac{m^3}{s}$

$F = \dot{m} \Delta v = \dot{m} v_2 - \dot{m} v_1$

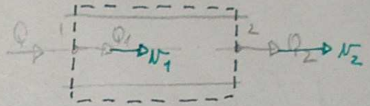
$\dot{H} = \dot{m}\, v$ prietoková hybnosť

$\boxed{\dot{m} = Q \rho}$

$\vec{F} = \dot{m}_1 \vec{v_2} - \dot{m}_2 \vec{v_1}$



$\vec{F} = \dot{m}_2 \vec{v_2} - \dot{m}_1 \vec{v_1}$



$\sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} = \vec{\dot{H}_2} - \vec{\dot{H}_1}$

prietoková hybnosť odtoková

$H_1 = \dot{m}_1 v_1 = \underbrace{(Q_1 \rho)}_{\dot{m}_1} v_1$

$H_2 = \dot{m}_2 v_2 = (Q_2 \rho) v_2$

$\dot{H}_2 = Q_2 \cdot \rho \cdot v_2 = (S_2 v_2 \rho) v_2$

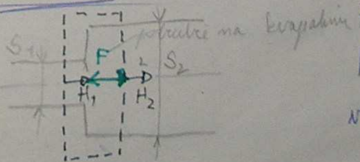
$\dot{H}_2 = S_2 v_2^2 \rho$

$\dot{H}_1 = S_1 \rho v_1^2$

$\sum F_i = H_2 - H_1 = S_2 \rho v_2^2 - S_1 \rho v_1^2$

$v_1 = v_2 \qquad S_1 = S_2$

$\sum F_i = 0$



potrubie na kvapalinu $H_2 = S_2 \rho v_2^2$

$H_1 = S_1 \rho v_1^2$

$v_1 S_1 = v_2 S_2$

$v_2 = v_1 \dfrac{S_1}{S_2}$

$\sum F_i = S_2 \rho \left(v_1^2 \dfrac{S_1}{S_2}\right) - S_1 \rho v_1^2$

$\Sigma \vec{F} = \dot{\vec{H}}_2 - \dot{\vec{H}}_1$ vektorový tvar

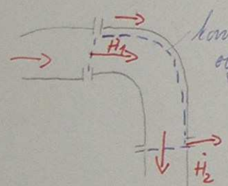
súčet vonkajších síl ($\Sigma \vec{F}$) pôsobiacich na kvapalinu nachádzajúcu sa v kontrolnom objeme sa rovná rozdielu jej hybnosti ~~od vst~~ odtokovej ($\dot{H}_2$) a prítokovej ($\dot{H}_1$)

$F \cdot dt = m\, dv$ pre tuhé telesá

$$\underbrace{\left(F = \frac{m}{dt} \cdot dv\right)}_{\dot{m}}$$

$\dot{H} = Q\rho \cdot v$ prítoková hybnosť (hybnosť prúdiacej kvapaliny)

$Q\rho = \dot{m}$ $\left[\frac{kg}{s}\right]$

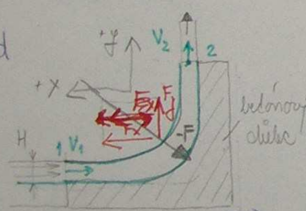


$\Sigma F = \vec{\dot{H}}_2 - \vec{\dot{H}}_1$

sila pôsobiaca na kvapalinu

(teleso na kvapalinu)

Príklad



Vypočítajte silu kt. tok voda pôsobiť na betónový dielec

$\Sigma \vec{F} = \vec{\dot{H}}_2 - \vec{\dot{H}}_1$

→ hybnosť prítoková

→ hybnosť odtoková

→ sila ktorou pôsobí „dielec" na kvapalinu

$\vec{\dot{H}}_1 = Q\rho\, \vec{v}_1$

$\vec{\dot{H}}_2 = Q\rho\, \vec{v}_2$

zvolíme si súradný systém, potom môžeme rovnicu napísať v ~~polárnom~~ skalárnom tvare pre smery "x" a "y"

$F_x = \dot{H}_{2x} - \dot{H}_{1x}$

$F_y = \dot{H}_{2y} - \dot{H}_{1y}$

$\dot{H}_{2x}$ - zložka hybnosti do smeru x => $\dot{H}_{2x} = 0$ ($v_{2x} = 0$)

$\dot{H}_{1x} = -Q \cdot \rho \cdot v_1$ ($v_{1x} = -v_1$)

$F_x = 0 + Q\rho v_1$

$F_x = +Q\rho v_1$

$\dot{H}_{2y} = Q\rho \cdot v_2$ ($v_2 = v_{2y}$)

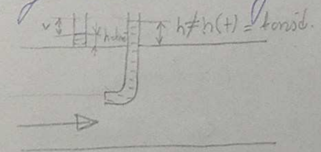
$\dot{H}_{1y} = 0$ ($v_{1y} = 0$)

$F_y = Q\rho v_2 - 0$

$F_y = Q\rho v_2$

(24) Bernoulliho rovnica pre neustálené prúdenie

Prúdenie je ustálené vtedy ak sa prevádzkové parametre nemenia



Pitotova trubica

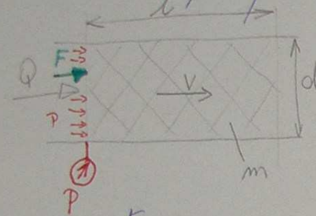
Kedy dochádza k neustálenému prúdeniu:

- pri rozbehu prúdenia (rozbeh zariadenia)
- pri dobehu alebo brzdení
- pri pulzáciach prietoku napr. v ~~plynom~~ výtlakom čerpadla alebo hydraul. motora

Druhy neustáleného prúdenia

a) stlačiteľnosť kvapaliny sa neprejaví

b) stlačiteľnosť kvapaliny sa prejaví → hydraulický ráz



ideálna nestlačiteľná kvapalina

$S = \frac{\pi d^2}{4}$

$F = m \cdot a$ $\qquad m = S \cdot l \cdot \rho$

$F = m \cdot \frac{dv}{dt}$ $\qquad Q = v \cdot S$

$v = \frac{Q}{S} =$

$$F = S \cdot l \cdot \rho \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{Q}{S}\right) = S \cdot l \cdot \rho \cdot \frac{1}{S} \cdot \frac{dQ}{dt}$$

$p = \frac{F}{S} \Rightarrow F = p \cdot S$

$p \cdot S = S \cdot l \cdot \rho \frac{1}{S} \cdot \frac{dQ}{dt}$

$$\boxed{p = \frac{m}{S^2} \cdot \frac{dQ}{dt}}$$

V Ber. rovnici vystupujú ako členy špecifické energie

Pre ustálené prúdenie: $? + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gh = konšt.$

→ šp. polohová

kinetická

tlaková

špec. zrýchľujúca energia

Na zrýchlenie stĺpca kvapaliny je potrebná práca sily F

$dA = F \cdot ds$

$F = (S l \rho) \frac{dv}{dt}$ $\qquad dA = (S l \rho) \frac{dv}{dt} \cdot ds$

Na 1 kg pripadne kvapaliny práca

$$\frac{dA}{m} = da = \frac{S l \rho}{\underbrace{S l \rho}_{m}} \cdot \frac{dv}{dt} ds$$

$$da = \frac{dv}{dt} \cdot ds$$

$$a = \int_l \frac{dv}{dt} ds$$

BR pre neustálené prúdenie

$$\boxed{\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gh + \int_{(l)} \frac{dv}{dt} ds = konšt}$$

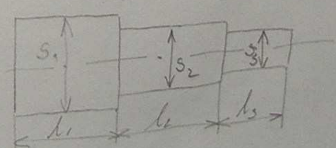
Predpoklad:

Ak je zrýchlenie $a = \frac{dv}{dt} = konšt.$ a nemení sa s dĺžkou potrubia $\int_0^l \frac{dv}{dt} ds = a \cdot l \; \left(= \int_0^l a\, ds = a \int_0^l ds\right)$

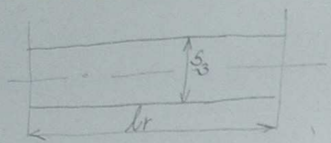
$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gh + a \cdot l = konšt.$$

→ nestlačiteľná kvapalina dokonale tuhé potrubie stĺpec (potrubie) má rovnaký prierez

Čo ak je prierez s odstupňovanými priemermi:



Náhrada:



Špecifická zrýchľujúca energia redukovaného potrubia = špecifickej zrýchľujúcej energii pôvodného potrubia

Pôvodné potrubie:

$$e_p = a_1 l_1 + a_2 l_2 + a_3 l_3$$

Náhrada:

$$e_r = a_3 l_r$$

$$a_3 l_r = a_1 l_1 + a_2 l_2 + a_3 l_3 \quad / \cdot \frac{1}{a_3}$$

$$l_r = l_1 \cdot \frac{a_1}{a_3} + l_2 \frac{a_2}{a_3} + l_3$$

Druhá rovnica kvapaliny

$$a_1 \cdot S_1 = a_2 S_2 = a_3 S_3$$

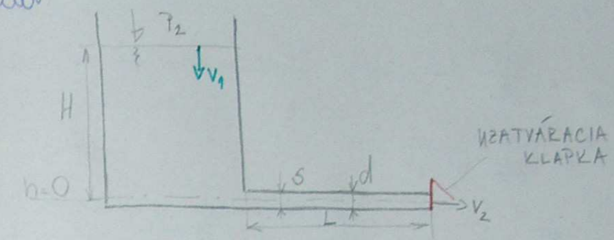
$$a_1 S_1 = a_3 S_3$$

$$\frac{a_1}{a_3} = \frac{S_3}{S_1}$$

$$\boxed{l_r = l_1 \frac{S_3}{S_1} + l_2 \frac{S_3}{S_2} + l_3}$$

$$\frac{p_3}{\rho} + \frac{v_3^2}{2} + g h_3 + a_3 l_r = konšt$$

Príklad:



Ako sa bude meniť prietoková rýchlosť pri otvorení klapky?

① Ideálna kvapalina a ustálené prúdenie

$$v_2 = \sqrt{2gH}$$

② Reálna kvapalina, uvažujeme dĺžkové straty v potrubí

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + g h_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + g h_2 + Y_{z12}$$

$p_1 = p_0 \quad h_1 = H \quad v_1 = 0 \quad h_2 = 0 \quad p_2 = p_0$

$$gH = \frac{v_2^2}{2} + \lambda \frac{L}{d} \cdot \frac{v_2^2}{2}$$

(A) $$gH = \frac{v_2^2}{2}\left(1 + \lambda \frac{L}{d}\right)$$

③ Pri rozbehu

(B) $$gH = \frac{v^2}{2}\left(1 + \lambda \frac{L}{d}\right) + a \cdot L$$

v_2 – konečná rýchlosť po ustálení

$v = v(t)$ – v danom čase pri rozbehu

Od rovnice (A) odčítame rovnicu (B)

$$\left(\frac{v_2^2}{2} - \frac{v^2}{2}\right)\left(1 + \lambda \frac{L}{d}\right) = a \cdot L$$

$$\left(\frac{v_2^2}{2} - \frac{v^2}{2}\right)\left(1 + \lambda \frac{L}{d}\right) = \frac{dv}{dt} L$$

riešime $v = v(t)$

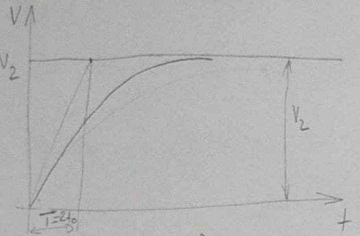
$$\left(1+\lambda \frac{L}{d}\right) = \frac{1}{\varphi^2}$$

$$\frac{1}{\varphi^2} \frac{v_2^2 - v^2}{2} = \frac{dv}{dt} \cdot L$$

$$dt = 2\varphi^2 L \frac{dv}{v_2^2 - v^2}$$

$$t = 2\varphi^2 L \int \frac{dv}{(v_2 - v)(v_2 + v)} = \frac{\varphi^2 L}{v_2} \cdot \ln \frac{v_2 + v}{v_2 - v}$$

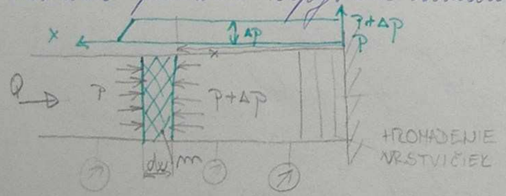
$$t_0 = \frac{\varphi^2 L}{v_2}$$



$$v = v_2 \cdot \frac{e^{\tau} - 1}{e^{\tau} + 1} \qquad \tau = \frac{t}{t_0}$$

(26) Hydraulický ráz

Je to neustálené prúdenie ovplyvnené stlačiteľnosťou kvapaliny



Vplyvom hydraul. rázu dochádza k šíreniu tlakových vĺn

Rovnica rovnováhy

Sila na vybranú vrstvičku kvapaliny

$$F = (p + \Delta p)S - pS = \Delta p \cdot S$$

Veta o zmene hybnosti

$$F \cdot \Delta t = m \cdot \Delta v$$

$$m = S\,dx\,\rho$$

$$\Delta p S \Delta t = S\,dx \cdot \rho \cdot \Delta v \quad / \cdot \Delta t$$

$$\Delta p \cdot S = S \frac{dx}{dt} \cdot \rho$$

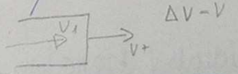
$$\Delta p = \frac{dx}{dt} \rho \cdot \Delta v$$

$\frac{dx}{dt}$ - rýchlosť šírenia tlakovej vlny

$$\boxed{\Delta p = v_z \cdot \rho \cdot \Delta v}$$ Žukovského vzorec pre určenie nárastu tlaku pri totálnom hydraulickom ráze

$v_z = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$ - rýchlosť šírenia zvuku v kvapalinách

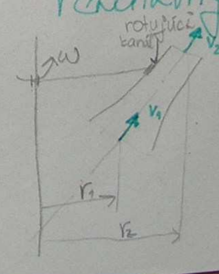
Δv - pokles rýchlosti



$\Delta v - v$

$$v_z = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{\frac{2{,}06\ 10^9}{10^3}} = 1435 \text{ m/s}$$

(27) Bernoulliho rovnica pre relatívny pohyb kvapaliny



BR pre ideálnu kvapalinu:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + g \cdot h = konšt$$

BR pre ideálnu kvapalinu prúdiacu v rotujúcom kanáli

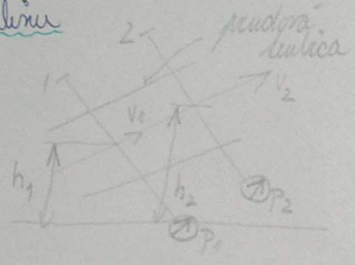
$$\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}+gh+\boxed{?}=\text{konšt.}$$

Odstredivé čerpadlo. Turbína

Tvary Bernoulliho rovnice

1 BR pre ideálnu kvapalinu

$$\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}+gh=\text{konšt.}$$



2 BR pre reálnu kvapalinu
- nestlačiteľná
- ustálené prúdenie
- viskózna

$$\frac{p_1}{\rho}+\frac{v_1^2}{2}+gh_1=\frac{p_2}{\rho}+\frac{v_2^2}{2}+gh_2+Y_{z12}$$

→ špeciál. stratová energia → viskozita

3 BR pre nestlačiteľné prúdenie ideálnej kvapaliny

$$\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}+gh+\underbrace{\int\frac{dv}{dt}\,ds}=\text{konšt.}$$

→ energia potrebná na zrýchlenie

$$\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}+gh+\underline{al}=\text{konšt.}$$

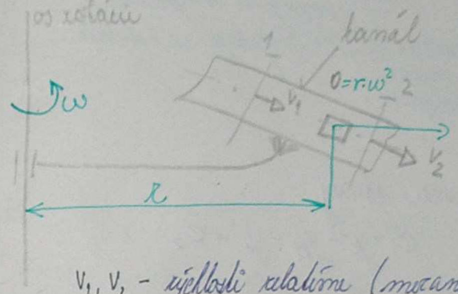
→ kvapaliny

l - dĺžka stĺpca

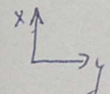
a - zrýchlenie

4 BR pre neustálené prúdenie reálnej kvapaliny

$$\frac{p_1}{\rho}+\frac{v_1^2}{2}+gh_1=\frac{p_2}{\rho}+\frac{v_2^2}{2}+gh_2+al+Y_{z12}$$

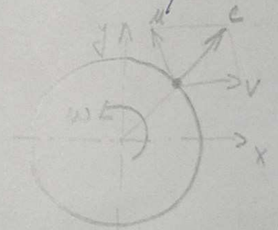


v_1, v_2 - rýchlosti relatívne (merané vzhľadom ku kanálu)



absolútny súradný systém spojený s nehybným pozorovateľom

c_1, c_2 - rýchlosti absolútne (merané voči absol. súrad. systému)



v - relatívna rýchlosť

c - absolútna rýchlosť

u - unášavá rýchlosť ($u=r\cdot\omega$)

$$\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}+gh-\frac{u^2}{2}=\text{konšt}$$

Pre kanál

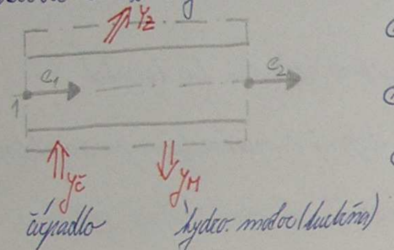
$$\boxed{\frac{p_1}{\rho}+\frac{v_1^2}{2}+gh_1-\frac{u_1^2}{2}=\frac{p_2}{\rho}+\frac{v_2^2}{2}+gh_2-\frac{u_2^2}{2}}$$

BR pre ideálnu kvapalinu prúdiacu v rotujúcom kanáli

Rovnicu upravíme

$$\underbrace{\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gh_1}_{\text{energia kvapaliny na vstupe do kanála}} + \underbrace{\frac{w_2^2 - w_1^2}{2}}_{\text{energia dodaná prácou odstred. síl medzi vstupom a výstupom}} = \underbrace{\frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gh_2}_{\text{energia kvapaliny na výstupe z kanála}}$$

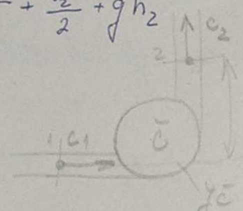
Všeobecná energetická rovnica straty



$$e_1 + Y_č - Y_H - Y_z = e_2$$

$$e_1 = \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gh_1$$

$$e_2 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gh_2$$



Pre čerpadlo platí:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} - \frac{w_1^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} - \frac{w_2^2}{2}$$

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho} = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2}$$

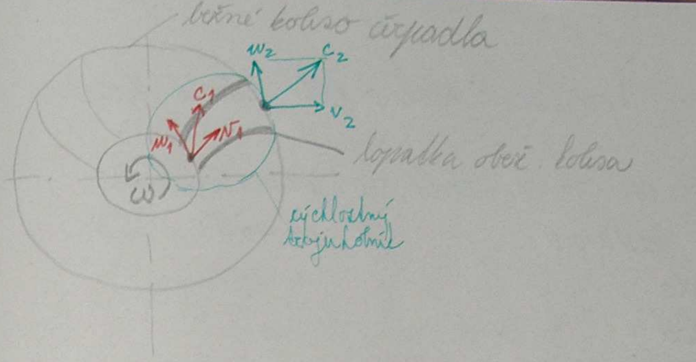
$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{c_1^2}{2} + Y_č = \frac{p_2}{\rho} + \frac{c_2^2}{2} + Y_{z12}$$

$$Y_č = \frac{p_2 - p_1}{\rho} + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + Y_{z12}$$

$$Y_č = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2} + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + Y_{z12}$$

ak $Y_{z12} = 0$ (zanedbáme straty)

$$\boxed{Y_{tč} = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2}}$$ Teoretická špec. energia čerpadla



29

Termomechanika

Stavové rovnice. Clapeyronova stavová rovnica

Stavové rovnice reálnych plynov

Ideálna kvapalina - nestlačiteľná, tepelne neroztiahnuteľná, má nulovú viskozitu, tlak v nej môže byť aj záporný, nevyparuje sa

Ideálny plyn - medzi molekulami niet príťažlivých síl
- molekuly nemajú vzájomnú potenciálnu energiu
- vlastné rozmery molekúl sú zanedbateľne malé
- molekuly sú dokonale pružné

Kontínuum - plyny resp. kvapaliny tvoria spojité prostredie ⇒ mechanické a stavové veličiny sú spojité funkcie, ~~tzt~~ t.j. majúce spojitosť

Stavové veličiny - slúžia k popisu stavu systému, t.j. umožňujú poznanie všetky vlastnosti potrebné k jeho termodynamickému popisu

Termodynamika - náuka o obecných zákonitostiach, kt. sa riadi transformácia celkovej energie makroskopických systémov v jej rôznych formách

Termomechanika - náuka o teple (šírení tepla)

Čo je a čo nie je stavová veličina:

× - nestavová ✓ - stavová

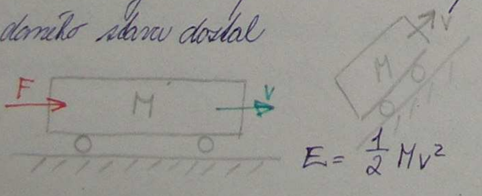
× s - dráha
× v - rýchlosť
✓ T - absolútna teplota
✓ V - objem [m^3]
✓ v - špecifický objem [$\frac{m^3}{kg}$]
× a - zrýchlenie

✓ P - tlak (merný tlak)
✓ $E = \frac{mv^2}{2}$ kinetická energia
× $e = \frac{v^2}{2}$ špec. kinetická energia
× Q - teplo (privedené / odvedené) [J]
× q - merné teplo [$\frac{J}{kg}$]

× A - mechanická práca $A = \int F\,ds$ [J]
× a - merná (špecifická) práca [$\frac{J}{kg}$]
s - entropia
U - vnútorná tepelná energia

Základná vlastnosť stavových veličín

Hodnota stavovej veličiny nezávisí na spôsobe akým sa systém do daného stavu dostal



$E_k = \frac{1}{2} Mv^2$

$F - T - 0$

$F - T = Ma$

$F - T = M \frac{dv}{dt}$

$E = \frac{1}{2} Mv^2$

Základné stavové veličiny ideálneho plynu

T.... absolútna teplota [K]

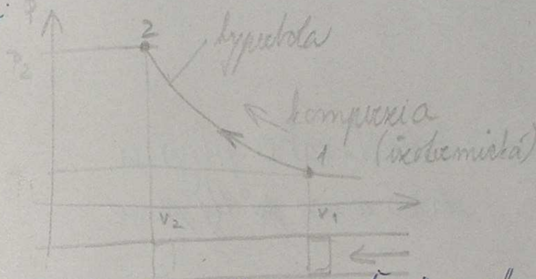
$T = t\,[°C] + 273,16$

v - merný objem [$\frac{m^3}{kg}$]

$v = \frac{1}{\rho}$ ρ - hustota, špec. hmotnosť

Tlak (merný tlak) - p [Pa]

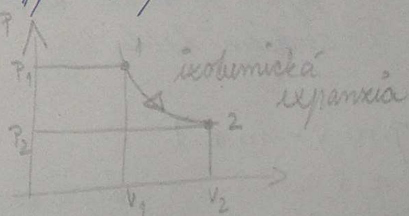
Príklad:



Ak T=konšt., ako sa bude meniť „p" a „v" pri zmene stavu z ① -> ②

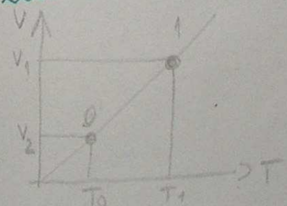
$p \cdot v = konšt.$

$\frac{p_1}{p_2} = \frac{v_2}{v_1}$ } Boyle Mariottov zákon



Príklad: Ako sa zmení objem plynu ak tlak p=konšt.

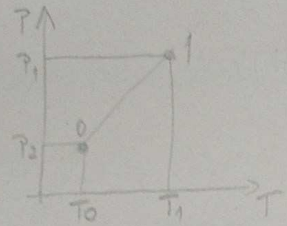
$p = konšt. \Rightarrow \frac{V}{T} = konšt.$ Gay Lussacov



$V = konšt. \Rightarrow \frac{P}{T} = konšt.$

$V = konšt. \cdot T$

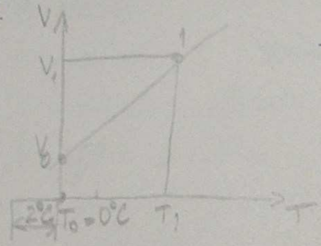
$\frac{V_0}{T_0} = \frac{V_1}{T_1} \Rightarrow V_1 = V_0 \frac{T_1}{T_0} = konšt. \cdot T$



$$\frac{p_0}{T_0} = \frac{p_1}{T_1}$$

$$p_1 = p_0 \frac{T_1}{T_0}$$

DÚ.



$$T = t[°C] + 273,16$$

Stavová rovnica ideálneho plynu

$p \cdot v = r \cdot T$ stavová rovnica pre 1 kg plynu

v – špec. objem

r – plynová konštanta daného plynu

T – absolútna teplota

$p \cdot m \cdot v = m \cdot r \cdot T$

$p \cdot V = m \cdot r \cdot T$ stavová rovnica pre „m" kg plynu

↓ objem

$p \cdot V = \frac{R_m}{M} \cdot T$ pre 1 kg plynu

$\frac{R_m}{M} = r$

R_m – univerzálna plynová konštanta

M – hmotnosť 1 molu plynu

molekulová hmotnosť plynu

Príklady z hydromechaniky

Príklad: Vyjadri zmenu objemu vody v % ak sa zmení jej tlak z 1 na 10^5 Pa na $51 \cdot 10^5$ Pa. koef. zadaní $\beta_p = 4{,}854 \cdot 10^{-10} Pa^{-1}$

$$V = V_0 (1 - \beta_p \Delta p) \qquad \Delta V = V - V_0 \Rightarrow V = \Delta V + V_0$$

$$\frac{\Delta V}{V_0} \cdot 100 =$$

$$\Delta V + V_0 = V_0 (1 - \beta_p \Delta p)$$

$$\Delta V_0 = V_0 (1 - \beta_p \Delta p) \Delta V \quad / : V_0$$

$$1 = (1 - \beta_p \Delta p) - \frac{\Delta V}{V_0}$$

$$\frac{\Delta V}{V_0} = (1 - \beta_p \Delta p) - 1 = (1 - 4{,}854 \cdot 10^{-10} \cdot 50 \cdot 10^5) - 1 =$$

$$\frac{\Delta V}{V_0} = -0{,}002427 \cdot 100 = \underline{\underline{-0{,}24\,\%}}$$

Zlý príklad zo skrípt (1.2)

(2) Pracovná kvapalina v hydraulickom obvode je vystavená zmene tlaku. Akú bude mať hustotu pri tlaku 10 MPa ak pri atmosf. tlaku bola jej hustota $\rho_0 = 850\ kg\,m^{-3}$ koef. stlač. $\beta_p = 0{,}8 \cdot 10^{-9} Pa^{-1}$.

$$\Delta V = -\beta_p V_0 \Delta p \qquad m_0 = \rho_0 V_0 \qquad m_1 = \rho_1 V_1 \qquad m_0 = m_1$$

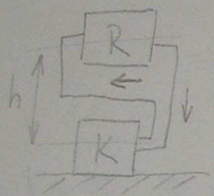
$$\rho_0 V_0 = \rho_1 V_1 \qquad \rho_1 = \frac{\rho_0 V_0}{V_1}$$

$$V_0 = \frac{\rho_1 V_1}{\rho_0} \qquad \Delta V = V_0 - V_1$$

$$\cancel{\Delta V = -\beta_p \frac{\rho_1 V_1}{\rho_0} \Delta p}$$

$$\cancel{V_0 - V_1 = -\beta_p \frac{\rho_1 V_1}{\rho_0} \Delta p}$$

3. Vypočítaj tlakový rozdiel pod účinkom, ktorého prúdi voda systéme keď vertikálny rozdiel polôh stredov kotla a radiátora je 3 m. Teplota vody vychádzajúcej z kotla je 80°C a prichádz. do kotla 40°C. Hustota pre 40°C je 992,2 $kg\,m^{-3}$ pri 80°C je 971,2 $kg\,m^{-3}$



$\Delta p = ?$

$\Delta p = p_2 - p_1$

$p_0 = p_1 + \rho_1 g H$

$p_0 = p_2 + \rho_2 g H$

$\Delta p = p_0 - \rho_2 g H - p_0 + \rho_1 g H$

$\Delta p = -971{,}2 \cdot 10 \cdot 3 + 992{,}2 \cdot 10 \cdot 3$

$\Delta p = -29136 + 29766 = \underline{630}\ Pa$

4. Potrubie o priemere 350 mm a dĺžke 150 m pri atm. tlaku a teplote 20°C. Vypočítaj objem vody, kt. je potrebné dotlačiť do potrubia aby sa pri tlakovej skúške potrubia dosiahol požadovaný pretlak 0,7 MPa. Pružnosť potrubia zanedbajte. $\beta_p = 4{,}24 \cdot 10^{-10}\ Pa^{-1}$

$\Delta V = -\beta_p \cdot V_0\, \Delta p$ $= 700000\ Pa$

$V_0 = \frac{\pi D^2}{4 \cdot \cancel{L}} \cdot L = \frac{\pi\, 4{,}350^2}{4 \cdot 150} = \frac{0{,}3848451}{600}$

$\Delta V = -4{,}24 \cdot 10^{-10} \cdot 14{,}43 \cdot 0{,}7$

$\Delta V = -4{,}282824 \cdot 10^{-\cancel{9}3}\ l$

$V_0 = \frac{\pi \cdot 0{,}35^2}{4} \cdot 150 = 14{,}43$

5. Urči objem vytečenej vody netesnosťami pri tlakovej skúške potrubia o priemere 250 mm a dĺžke 800 m. Tlak poklesol z hodnoty 0,8 MPa na 0,65 MPa v priebehu 10 min. Teplota vody 10°C.

$\beta_p = 4{,}41 \cdot 10^{-10}$

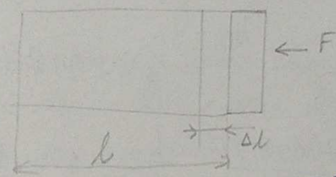
$\Delta V = -\beta_p \cdot V_0\, \Delta p$

$V_0 = \frac{\pi D^2}{4} \cdot L = \frac{\pi \cdot 0{,}25^2}{4} \cdot 800 - 39{,}27$

$\Delta p = p_2 - p_1 = 800000 - 650000 = 15000\ Pa$

$\Delta V = -4{,}41 \cdot 10^{-10} \cdot 39{,}27 \cdot \overset{15}{\cancel{20}}000 = -2{,}5977 \cdot 10^{-3}\ dm$

1. Urči posunutie piesta Δl pri zvýšení hodnoty tlaku z 0,1 MPa na 1 MPa keď vo valci sa nachádza olej s koeficientom stlač. $\beta_p = 5 \cdot 10^{-10}\ Pa^{-1}$. Priemer piesta 20 mm zdvih piesta 500 mm



$\Delta V = -\beta_p \cdot V_0\, \Delta p$

$\Delta l = \frac{4 V_0 \beta_p \Delta p}{\pi D^2}$

$\Delta l = -\frac{4 \cdot 1{,}57 \cdot 10^{-4} \cdot 5 \cdot 10^{-10} \cdot 0{,}9 \cdot 10^6}{\pi\, 0{,}02^2}$

$V_0 = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot L = \frac{\pi \cdot 0{,}02^2}{4} \cdot 0{,}5$

$V_0 = 1{,}57 \cdot 10^{-4}\ m^3$

$\Delta V = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \Delta l$

$\Delta p = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$

$- \frac{2{,}826 \cdot 10^{-13}}{1{,}256 \cdot 10^{-3}}$

$\Delta l = -2{,}25 \cdot 10^{-4}\ m$

2. Dokonale uzavretej nádobe sa nachádza H_2O pri atmosfer. tlaku v teplote 20°C pričom dokonale vyplní nádobu. Objem nádoby 27 dm^3. O koľko stúpne tlak v nádobe pri stúpaní teploty 20 na 80°C ak zanedbáme zmenu objemu nádoby. $\beta_t = 0{,}2 \cdot 10^{-3}/K$ $\beta_p = 4{,}24 \cdot 10^{-10}\ Pa^{-1}$

+273,14

$\Delta V = \beta_t \cdot V_0\, \Delta t$

~~$V_0 = \pi D$~~

$\Delta t = 80 - 20 = 60$

$\Delta V = 273{,}1402 \cdot 27 \cdot 60$

$\Delta V = 442487{,}124$

$\cancel{\Delta V = -\Delta p \, \beta_p V_0}$

$\cancel{442487{,}124 = -\Delta p \cdot}$

$$\Delta p = \frac{\beta_t}{\beta_p} \cdot \Delta t$$

$$\Delta p = \frac{0{,}2 \cdot 10^{-3}}{4{,}24 \cdot 10^{-10}} \cdot 60$$

$$\Delta p = 2{,}8 \cdot 10^{7}\ Pa = \underline{28\ MPa}$$

Vypočítajte súčin. teplotnej rozťažnosti β_t vody, ak bolo experimentálne zistené, že pri 10°C je hustota $\varrho = 999{,}73$ a pri 20°C je $\varrho = 998{,}23\ kg\,m^{-3}$

$$\Delta V = \beta_t \cdot V_0 \, \Delta t$$

$$V_0 - \varrho_0 \cdot m$$

$$\Delta \varrho = 999{,}73 - 998{,}23$$

$$\beta_t = \frac{\Delta V}{V_0} \cdot \frac{1}{\Delta t}$$

$$\beta_t = \frac{\Delta \varrho \cdot m}{\varrho_0 m} \cdot \frac{1}{\Delta t} = \frac{\cancel{998{,}23}\ 1{,}5}{999{,}73} \cdot \frac{1}{10} = 1{,}5 \cdot 10^{-4}\ K^{-1}$$

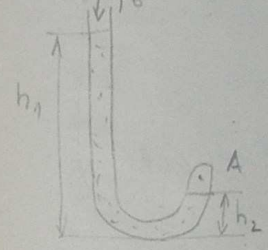
(1) Vypočítajte tlak v hĺbke 4,5 m pod hladinou H_2O, keď tlak na hladine je $10^5\ Pa$, $\varrho_{H_2O} = 1000\ kg\,m^{-3}$

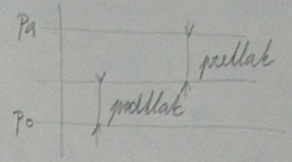
$$p = \varrho g h + p_0$$

$$p = 10^5 + 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 4{,}5$$

$$p = 144{,}145\ kPa$$

(2) Vyp. pretlak vzduchu v trubičke v bode A voči atm. tlaku ak je v trubičke voda $h_1 = 1{,}5\ m$ $h_2 = 0{,}2\ m$





$$p_a = p_0 + p_p$$

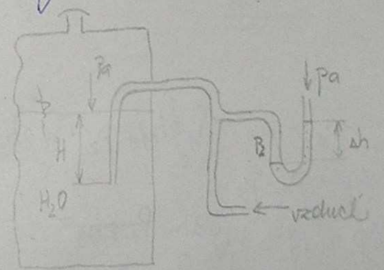
$$p_a = p_b - p_{ro}$$

$$\Delta p = (p - p_2) = \varrho g h$$

$$\Delta p = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}3$$

$$\Delta p = 12{,}753\ kPa$$

(3) Výška stĺpca kvapaliny v nepriesvitnej nádrži môžeme zistiť zariadením podľa obrázka. Aká je výška stĺpca H_2O v nádrži, ak v U-trubici naplnenej P_b bola nameraná hodnota $\Delta h = 355\ mm$



$$p_1 = p_a + \varrho g H$$

$$p_2 = p_a + \varrho_{ort} \cdot g \cdot \Delta h$$

$$p_1 = p_2$$

$$p_a + \varrho g H = \varrho_{ort} \cdot g \cdot \Delta h + p_1$$

$$p_1 = \varrho g H = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot H$$

$$p_2 = \varrho_{ort} \cdot g \cdot \Delta h = 13{,}6 \cdot 10^3\ kg\,m^{-3} \cdot 9{,}81 \cdot 355$$

$$p_1 = 9810\,H$$

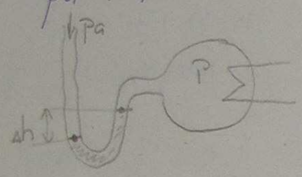
$$p_2 = 47362{,}68$$

$$H = \frac{47362{,}68}{9810}$$

$$H = 4{,}828\ m$$

④ Vyp. tlak v kondenzátore parného stroja ak na pripojenom manometri s použitím ortuti bola nameraná hodnota $\Delta h = 675$ mm

$p_a = 101{,}5$ kPa



$p_a = p + \rho g \Delta h$

$p = p_a - \rho g \Delta h$

$p_a = 101{,}5 \cdot 10^3 + 13{,}6 \cdot 10^3 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}675$

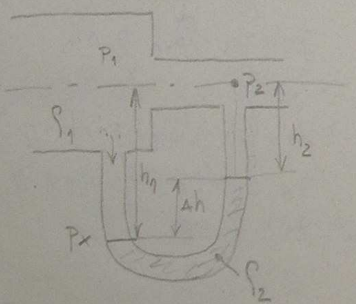
$p_a = 188{,}88748$ kPa

$p = 188{,}88748 - 13{,}6 \cdot 10^3 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}675$

$p = 101{,}5 - 13{,}6 \cdot 10^3 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}675$

$p = 101000 - 13600 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}675 = 10{,}94$ kPa

⑤ Vypočítaj rozdiel tlakov v prierezoch potrubia na základe nameranej hodnoty Δh dvojkvapalinovým manometrom, ak je daná $\rho_1 = 900$ kg m^{-3} $\rho_2 = 13{,}6 \cdot 10^3$ $\Delta h = 0{,}25$ m



$p_x = p_1 + \rho_1 g h_1 = p_2 + \rho_1 g h_2 + \rho_2 g \Delta h$

$\Delta p = p_1 - p_2$

$\Delta p = \rho_1 g h_2 + \rho g \Delta h - \rho_1 g h_1 =$

$= -\rho_1 g \Delta h + \rho_2 g \Delta h =$

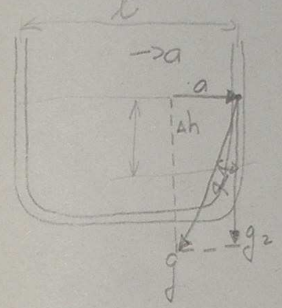
$= g \Delta h (\rho_2 - \rho_1)$

$\Delta p = g \Delta h (\rho_2 - \rho_1)$

$\Delta p = 9{,}81 \cdot 0{,}25 (13600 - 900)$

$\Delta p = 31146{,}75$ Pa $= 31{,}14675$ kPa

⑥ Vyp. a vozidla, ak v jeho pozdĺžnej vertikálnej rovine bola umiestnená U-trubica a bol v nej nameraný rozdiel hladín $\Delta h = 87$ mm a vzdialen. ramien $l = 200$ mm

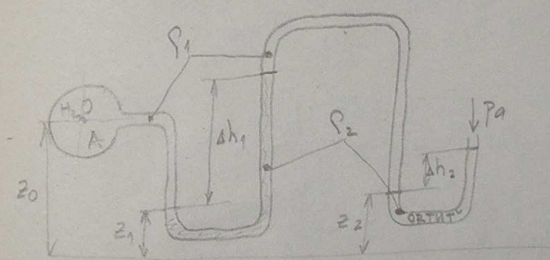


$tg\,\alpha = \frac{a}{g} = \frac{\Delta h}{l}$ $\quad tg\,\alpha = \frac{\Delta h}{l} = 23{,}5°$

$\alpha = \arctan \frac{\Delta h}{l} = \frac{87}{200} =$

$a = tg\,\alpha \cdot g = tg\, 23{,}5 \cdot 9{,}81 = 4{,}27$ m s^{-2}

⑦ Urči tlak v bode A v nádrži ak manometrom podľa obr. boli namerané hodnoty $\Delta h_1 = 540$ mm $\Delta h_2 = 610$ m $z_0 = 1250$ mm $z_1 = 450$ mm $z_2 = 350$ mm



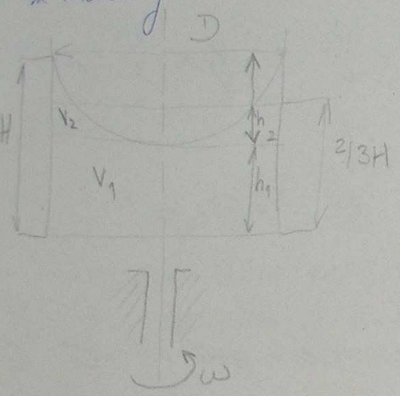
$p_A = p_a + \rho_2 g \Delta h_2 + \rho_1 g (z_1 + \Delta h_1 - z_2) + \rho_2 g \Delta h_1 + \rho_1 g (z_0 - z_1)$

$p_A = 101{,}5 + 13{,}6 \cdot 10^3 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}61 + 1000 \cdot 9{,}81 (0{,}45 + 0{,}54 - 0{,}35) + 13{,}6 \cdot 10^3 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}54 +$
$+ 1000 \cdot 9{,}81 (1{,}25 - 0{,}45)$

$p_A = 269054{,}8$ Pa $= 0{,}27$ MPa

$r = 2cm = 0{,}02$

(1) Valcová nádoba o priemere $D = 4\,cm$ a výške $H = 10\,cm = 0{,}1\,m$ sa otáča okolo vertikálnej osi. V pokoji bola naplnená kvapalinou do výšky $h = \frac{2}{3}H$. Určite max. uhlovú rýchlosť otáčania ω_{max} pri ktorej kvapalina ešte nevytečie z nádoby.



$$V_0 = V_1 + V_2$$

$$h_2 = \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

$$H = h_1 + \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

$$V_0 = \frac{\pi D^2}{4} \cdot \frac{2}{3} H$$

$$\cancel{V_0 = \frac{\pi 4^2}{4} \cdot \frac{2}{3} 10}$$

$$\cancel{V_0 = 12{,}56 \cdot 6{,}66 = 83{,}73}$$

$$V_1 = \frac{\pi D^2}{4} \cdot h_1 \qquad V_2 = \frac{1}{2} \frac{\pi D^2}{4} h_2 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\pi D^2}{4} \cdot \frac{2}{3} H = \frac{\pi D^2}{4} \cdot h_1 + \frac{1}{2} \frac{\pi D^2}{4} \cdot h_2$$

$$\frac{2}{3} H \frac{\pi D^2}{4} = \left(H - \frac{\omega^2 r^2}{2g}\right) \frac{\pi D^2}{4} + \frac{1}{2} \frac{\omega^2 r^2}{2g} \frac{\pi D^2}{4}$$

$$\frac{2}{3} H - H = -\frac{\omega^2 r^2}{2g} + \frac{1}{2} \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

$$\frac{1}{3} H = \frac{1}{2} \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

$$\frac{1}{3} 0{,}1 = \frac{1}{2} \frac{\omega^2 \cdot 0{,}02^2}{2 \cdot 9{,}81}$$

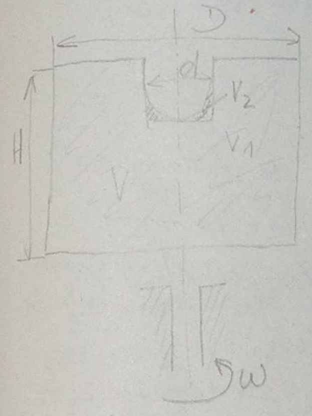
$$\cancel{0{,}03 = \frac{\omega^2\ 0{,}0004}{39{,}24}}$$

$$\cancel{0{,}03 = 0{,}0000102\,\omega^2}$$

$$\omega_{max} = 4\sqrt{2gH/3}\,/D = 57{,}18\ rad\,s^{-1}$$

(2) Vypočítaj max. objem kvapaliny v nádobe otáčajúcej sa okolo vertikálnej osi keď horné veko je kruhové medzikružím o priemere D a d výška nádoby H. ak je dané $\omega = 15\pi s^{-1}$

$d = 100\,mm \quad D = 300\,mm \quad H = 500\,mm$



$$V_0 = V_1 + V_2$$

$$V_1 = \frac{\pi D^2}{4} \cdot H - \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

$$V_2 = \frac{1}{2} \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

$$V_0 = \frac{\pi D^2}{4} H - \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{\omega^2 r^2}{2g} + \frac{1}{2} \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

$$V_0 = \frac{\pi D^2}{4} H - \frac{1}{2} \frac{\pi d^2}{4} \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

$$V_0 = \frac{\pi \cdot 0{,}3^2}{4} \cdot 0{,}5 - \frac{1}{2} \frac{\pi\, 0{,}1^2}{4} \cdot \frac{(15\pi)^2 \cdot 0{,}05^2}{2 \cdot 9{,}81}$$

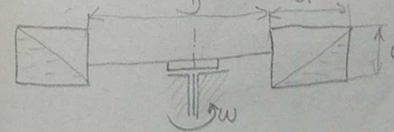
$$0{,}0353 - \frac{1}{2}\ 0{,}00785 \cdot \frac{2220{,}6 \cdot 0{,}0025}{19{,}62}$$

$$V_0 = (0{,}0353 - 0{,}0011) \cdot 1000$$

$$V_0 = \underline{\underline{34{,}2\ dm^3}}$$

(3) Vypočítajte otáčky 2 nádob v tvare kocky o rozmere a umiestnené na ramene o polomere $r = \frac{D}{2}$ aby celá vnútorná stena nádoby najbližšia k osi nebola v styku s kvapalinou.

$D = 320\,mm \qquad a = 60\,mm$



$$R = \frac{D + a}{2} = \frac{0{,}32 + 0{,}06}{2} = 0{,}19$$

$$tg\,\alpha = \frac{a}{g}$$

$$1 = \frac{a}{g} \Rightarrow a = g = 9{,}81\ ms^{-2}$$

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R \qquad \omega = \sqrt{\frac{2g}{D + a}}$$

$$\cancel{a = \omega^2 R}$$

$$\cancel{0{,}06 = \omega^2\ 0{,}19} \quad \omega = 7{,}18\ rad\,s^{-1}$$

$\omega^2 =$

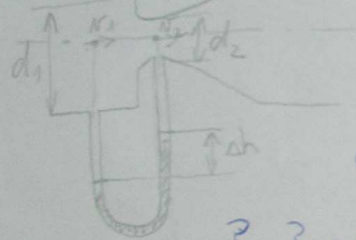
(4) 2.2.1.
2.2.2.
2.4.1.
2.4.3

$$\frac{P}{\varsigma} + \frac{w^2}{2\cancel{z}} + g \cdot z - \frac{\omega^2 r^2}{2} = konšt.$$

$$\frac{P}{\varsigma} + \frac{v^2}{2} + g \cdot z = konšt.$$

$v \cdot S = Q$

Vypočítajte strednú rýchlosť v zúženom priereze venturimetra a prietok vody v potrubí ak $D_1 = 100$ mm, $d_2 = 75$ mm. V U-trubici naplnenej octelom bola nameraná hodnota $\Delta h = 47$ mm $\varsigma_{oct} = 1595$



$$\frac{P_1}{\varsigma} + \frac{v_1^2}{2} + g \cdot \overset{0}{z_1} = \frac{P_2}{\varsigma} + \frac{v_2^2}{2} + g \cdot \overset{0}{z_2} \Rightarrow$$

$$Q = S_1 \cdot v_1 = S_2 \, v_2$$

$$P_1 = P_2 + \varsigma g \cdot \Delta h$$

$$v_2 = \frac{\pi d_1^2}{4} \cdot v_1 = \frac{\pi d_2^2}{4} \cdot v_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{d_2^2}{d_1^2} \cdot v_2$$

$$P_1 - P_2 = \varsigma_{oct} g \, \Delta h$$

$$\Rightarrow \frac{P_1 - P_2}{\varsigma} = \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2)$$

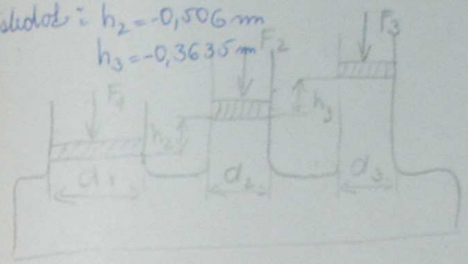
$$v_2 = \sqrt{\frac{2 \Delta h \, \varsigma_{oct} \, g}{\varsigma_{H_2O}\left(1 - \frac{d_2^4}{d_1^4}\right)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}047 \cdot 1595 \cdot 9{,}81}{1000\left(1 - \frac{0{,}075^4}{0{,}1^4}\right)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1470{,}8133}{1000\left(1 - \frac{0{,}0000316}{0{,}00030416}\right)}} = \sqrt{\frac{1470{,}8133}{917{,}4426}} = 1{,}26$$

$v_2 = 5{,}4$

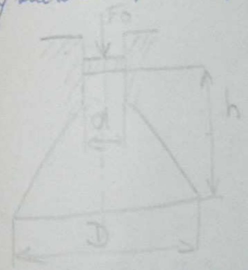
2.2.1 Vypočítajte výšky h_2 a h_3 keď na piesty pôsobia sily $F_1 = 25$ N $F_2 = 35$ N $F_3 = 40$ N a priemery piestov $d_1 = 80$ mm $d_2 = 70$ mm $d_3 = 65$ mm. V nádobe je olej o hustote $\varsigma = 830$ kg m^{-3}

Výsledok: $h_2 = -0{,}506$ m
$h_3 = -0{,}3635$ m



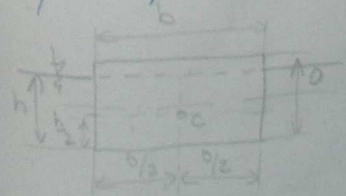
2.2.2 Vypočítajte silu, ktorou sú namáhané skrutky pätnej dosky keď na piest priemeru $d = 150$ mm pôsobí sila $F_0 = 450$ N a $h = 1{,}2$ m $d = 0{,}6$ m $\varsigma = 1000$ kg m^{-3}

Výsledok: $F = 15{,}328$ kN



2.4.1 Nájdite pôsobisko vztlakovej sily pôsobiacej na plávajúci hranol vo vode. Jeho rozmery sú $a \times b \times c$ $a = 0{,}15$ m $b = 0{,}20$ m $c = 4$ m $\varsigma_d = 800$ kg m^{-3} Hranol pláva dlhšou hranou v horizontálnej polohe.

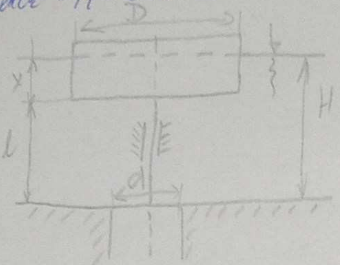
Výsledok: pôsobisko vztlakovej sily je v polovici ponoru $h_c = 6$ cm



2.4.3. Vypočítajte pri akej výške stĺpca vody H otvorí plavák ventilový uzáver otvoru v dne nádoby o priemere d

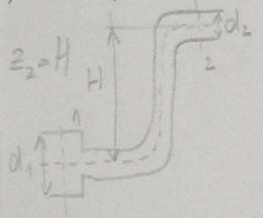
$D = 200\ mm$ $d = 45\ mm$ $l = 300\ mm$

Výsledok - $H = 316\ mm$



Urči tlak ideálnej kvapaliny v bode 2 keď $p_1 = 0{,}17\ MPa$, $v_1 = 1{,}5\ m\ s^{-1}$

pomer prierezov $S_2/S_1 = 0{,}25$ $\rho = 950\ kg\ m^{-3}$ $H = 6{,}5\ m$



$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + g \cdot \overset{0}{\overset{\|}{z_1}} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + g \cdot \overset{H}{\overset{\|}{z_2}}$$

$$Q = S_1 v_1 = S_2 v_2 \Rightarrow \frac{v_1}{0{,}25} = v_2$$

$$p_2 = p_1 + \frac{\rho\left(v_1^2 - \frac{v_1^2}{0{,}25^2}\right)}{2} - gH\rho$$

$$p_2 = 0{,}17 + \frac{950\left(1{,}5^2 - \frac{1{,}5^2}{0{,}25^2}\right)}{2} - 9{,}81 \cdot 6{,}5 \cdot 950$$

$0{,}0625$

$170000 - 16031{,}25 - 60576{,}75$