Predikátová logika

Úvod (prečo nám nestačí výroková logika)

Výroková logika nie je dosť silná na prezentovanie rôznych typov tvrdení alebo na vyjadrenie určitých vzťahov, ktoré sa používajú v informatika a v matematike. Napríklad tvrdenie *x>1*, kde x je premenná, nie je výrok, lebo pokiaľ nepoznáme hodnotu premennej x, nevieme povedať, či je to pravda alebo nie. Výroková logika nevie s takýmito vetami pracovať, pričom vety takéhoto typu sa vyskytujú v matematike dosť často. Takisto na nasledujúci úsudok nám už výroková logika nestačí.

P: Každý človek je smrteľný.

Q: Sokrates je človek.

R: Sokrates je smrteľný.

Úsudok je intuitívne úplne správny, ale tvrdenie R nie je korektným dôsledkom tvrdení P a Q vo výrokovej logike. Výroková logika totiž nemá prostriedky na vyjadrenie tvrdení P a Q.

Na vyjadrenie týchto a ďalších problémov potrebujeme teda silnejšiu logiku. Zavádzame predikátovú logiku (logika 1. rádu), ktorá bude mať v porovnaní s výrokovou ďalšie dva pojmy: predikát a kvantifikátory.

Predikát

Predikát je slovná predloha (vzor), ktorá popisuje vlastnosť objektov alebo vzťah medzi objektami.

Pr. 1

Obloha je modrá. Moje pero je modré. Tvoje auto je modré. Sú podľa vzoru *niečo je modré.* Táto fráza *je modré* je predikát - popisuje vlastnosť *byť modrý.* Predikáty zvykneme označovať veľkými písmenami (napr. P, Q). Pomenujme náš predikát *je modré* písmenom M. Potom vety, ktoré vyjadrujú *niečo je modré* môžeme zapísať ako M(x), kde x zastupuje ľubovoľný objekt.

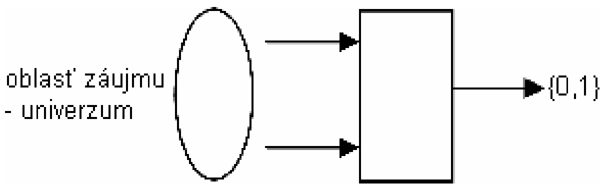
Pr. 2

Mama to natrela otcovi. Otec to natrel babke. Babka to natrela dedkovi. .... *x to natrel y.* Vzor *... to natrel ...* je predikát a vyjadruje vzťah medzi dvoma objektami. Označíme ho napríklad N(x,y).

Pr. 3

x je prvočíslo, x>1, x$\vee$y, a/b

Pri predikáte je dôležité stanoviť univerzum – množinu objektov, ktoré nás zaujímajú. Univerzom môže byť **R**, **N**, **Z**, množina všetkých študentov v tejto triede, množina všetkých áut na parkovisku.



Predikát - funkcia, ktorej hodnoty, sú logické.

Kvantifikátory

Predikát sám o sebe ešte nie je výrok. Napríklad tvrdenie $x>1$ nie je výrok. Aby sme z predikátu spravili výrok, môžeme buď nahradiť premennú x konkrétnou hodnotou (5>1) alebo kvantifikovať premennú použitím kvantifikátora (a to sa robí v predikátovej logike).

Všeobecný kvantifikátor

$\forall x\ P(x)$ – pre každý objekt x z univerza platí $P(x)$ (pre každé x, pre všetky x). Keď špecifikujeme univerzum, bude to výrok.

Pr.

$\forall x\ (x>1)$

a) nech univerzum je **Z**, potom $\forall x\ (x>1)$ je nepravdivý výrok
b) nech univerzum je {5,6,7,…}, potom $\forall x\ (x>1)$ je pravdivý výrok

Pr.

Vetu *Všetky autá majú kolesá.* môžeme zapísať do výrokovej formy $\forall x\ P(x)$, kde univerzum je množina áut a $P(x)$ je predikát vyjadrujúci *x má kolesá*.

Existenčný kvantifikátor

$\exists x\ P(x)$ – pre nejaký objekt z univerza platí $P(x)$. Keď špecifikujeme univerzum, bude to výrok.

Pr.

$\exists x\ (x>1)$

a) nech univerzum je **Z**, potom $\exists x\ (x>1)$ je pravdivý výrok
b) nech univerzum sú záporné čísla, potom $\exists x\ (x>1)$ je nepravdivý výrok

Pr.

Vetu *Niekto ťa má rád.* môžeme zapísať do výrokovej formy $\exists x\ P(x)$, kde univerzum je množina ľudí a $P(x)$ je predikát vyjadrujúci *x ťa má rád*.

Kvantifikátory na konečných množinách

Ak univerzum je konečná množina $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, tak

$\forall x\ P(x) = P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \ldots \wedge P(a_n)$

$\exists x\ P(x) = P(a_1) \vee P(a_2) \vee \ldots \vee P(a_n)$

Pr.

Univerzum D={2,3,4,5,6}

$$\forall x\ (x>4) = \underset{0}{(2>4)} \wedge \underset{0}{(3>4)} \wedge \underset{0}{(4>4)} \wedge \underset{1}{(5>4)} \wedge \underset{1}{(6>4)} = 0$$

$$\exists x\ (x>4) = (2>4) \vee (3>4) \vee (4>4) \vee (5>4) \vee (6>4) = 1$$

Pr.

Univerzum $\emptyset$, $x\in\emptyset$ je 0

$\forall x\ (x>4)$ t.z. $\forall x\ (x\in\emptyset \Rightarrow x>4) = 1$

$\exists x\ (x>4)$ t.z. $\exists x\ (x\in\emptyset \wedge x>4) = 0$

Formula predikátovej logiky (logický výraz)

Df. Formula predikátovej logiky (logický výraz)

1. Každý predikát s nula alebo viac premennými je formula.
2. Ak α a β sú formuly a x je premenná, potom formulami sú aj:
   a) $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \Rightarrow \beta$, $\alpha \Leftrightarrow \beta$
   b) $\forall x\ (\alpha)$, $\exists x\ (\alpha)$

Pr.

$\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x)$

$\forall x\, (P(x) \vee \exists x\, Q(x))$

Viazané a voľné premenné

Premenná vo formule je **viazaná**, ak je kvantifikovaná alebo je jej priradená konkrétna hodnota. Premenná, ktorá nie je viazaná, je **voľná**. Oblasť platnosti kvantifikátora – buď je daná zátvorkami, alebo platí len pri najbližšom predikáte.

Pr.

- $\exists x\, P(x,y)$ – x je viazaná, y je voľná
- $\forall x\, [\exists y\, P(x, y) \vee Q(x, y)\,]$ – x a y sú viazané v P(x,y), y je voľná v Q(x,y), lebo platnosť $\exists y$ sa viaže len na P(x, y). Oblasť platnosti $\forall x$ je $[\exists y\, P(x, y) \vee Q(x, y)\,]$.

Interpretácia formuly

Formula vo všeobecnosti nie je výrok. Uvažujme napríklad o formule$\forall x\, P(x)$. Nech P(x) znamená *x je nezáporné celé číslo*. Formula je pravdivá, ak univerzum je napríklad {1,3,5}, {2,4,6} alebo **N**, nepravdivá ak univerzum je napríklad {-1,3,6} alebo **Z**. Pravdivostná hodnota formuly teda závisí od univerza a špecifikácie predikátov.

Interpretácia formuly znamená:

1. špecifikácia univerza (neprázdnej oblasti D)
2. špecifikácia predikátov (priradenie predikátu každému symbolu predikátu)
3. priradenie hodnôt všetkým voľným premenným

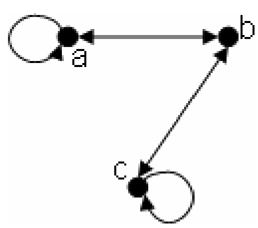
Pr.

$P(x,y) \Rightarrow \exists z\, (P(x,z) \wedge P(z,y))$

<table>
<tr>
<td>1. D = R
2. $P(x,y) \equiv x<y$
3. $x \in R$, $y \in R$
$x<y \Rightarrow \exists z\, (x<z \wedge z<y)$
$5<8 \Rightarrow \exists z\, (5<z \wedge z<8)$ … 1</td>
<td>1. D = N
2. $P(x,y) \equiv x<y$
3. $x \in N$, $y \in N$
$x<y \Rightarrow \exists z\, (x<z \wedge z<y)$
$5<6 \Rightarrow \exists z\, (5<z \wedge z<6)$ … 0</td>
</tr>
</table>

1. D ={a,b,c}
2. P(x,y) je dané tabuľkou

x	y	P(x,y)	$\Rightarrow$	$\exists z\, (P(x,z) \wedge P(z,y))$	dôvod
a	a	1	1	1	z=b; $a \to b \to a$
a	b	1	1	1	z=a; $a \to a \to b$
a	c	0	1		
b	a	1	1	1	z=a; $b \to a \to a$
b	b	0	1		
b	c	1	1	1	z=c; $b \to c \to c$
c	a	0	1		
c	b	1	1	1	z=c; $c \to c \to b$
c	c	1	1	1	z=b; $c \to b \to c$



Formula sa nazýva **všeobecne pravdivou**, ak je pravdivá pre každú interpretáciu.

Negácia kvantifikátorov

$\neg\forall x\, P(x) = \exists x\, (\neg P(x))$ … Nie je pravda, že každý je šťastný. = Niekto je nešťastný.

$\neg\exists x\, P(x) = \forall x\, (\neg P(x))$ … Neexistuje osoba, ktorá je šťastná. = Všetci sú nešťastní.

Poradie kvantifikátorov

Keď je viac kvantifikovaných premenných, aplikujú sa v poradí od vnútorného. Napríklad $\exists x \forall y\, P(x,y)$ znamená $\exists x\, (\forall y\, P(x,y))$. Kvantifikátory rovnakého druhu možno prehadzovať. Rôzne kvantifikátory nemožno prehadzovať.

$\forall x\, \forall y\, \alpha = \forall y\, \forall x\, \alpha$

$\exists x\, \exists y\, \alpha = \exists y\, \exists x\, \alpha$

$\exists x\, \forall y\, \alpha \Rightarrow \forall y\, \exists x\, \alpha$

Pr.

$P(x,y) \equiv x<y$, D=**R**

$\forall x\, \exists y\, P(x,y)$	pre každé číslo x, existuje číslo y, ktoré je väčšie ako číslo x	pravda
$\exists y\, \forall x\, P(x,y)$	existuje číslo y také, že všetky čísla sú od neho väčšie	nepravda

Pr.

D = **N**, $x<y$

$\forall x \forall y\ x<y$	0	$\exists x \forall y\ x<y$	0
$\forall y \forall x\ x<y$	0	$\forall y \exists x\ x<y$	0
$\exists y \forall x\ x<y$	0	$\exists y \exists x\ x<y$	1
$\forall x \exists y\ x<y$	1	$\exists x \exists y\ x<y$	1

Pr.

D – množina ľudí, O(x,y) – x je otcom y

$\forall x \forall y\ O(x,y)$	0	pre každých dvoch ľudí platí, že prvý je otcom druhého
$\forall y \forall x\ O(x,y)$	0	pre každých dvoch ľudí platí, že druhý je otcom prvého
$\exists y \forall x\ O(x,y)$	0	existuje taký človek, ktorému sú všetci ľudia otcom
$\forall x \exists y\ O(x,y)$	0	každý človek má dieťa
$\exists x \forall y\ O(x,y)$	0	existuje taký človek, ktorému sú všetci ľudia deťmi
$\forall y \exists x\ O(x,y)$	1	každý človek má otca
$\exists y \exists x\ O(x,y)$	1	existujú dvaja ľudia takí, že druhý je otcom prvého
$\exists x \exists y\ O(x,y)$	1	existujú dvaja ľudia takí, že prvý je otcom druhého