II. KINEMATIKA

① ÚVOD

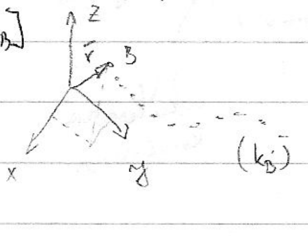
KINEMATIKA je časť mechaniky zaob. sa vyšetrovaním pohybu objektov (bod, teleso) a to bez ohľadu na ich hmotnosť a silové účinky, ktoré ich pohyb spôsobili.

KINEMATICKÉ VELIČINY POHYBU
- bodu => $\bar{r}, \bar{v}, \bar{a}$
- telesa => $\bar{r}_B, \bar{v}_B, \bar{a}_B$, φ, ω, α - uhlové veličiny pohybu telesa

ZÁKL. POJMY: priestor, čas => pohyb

priestor (ako v statike) geom. priestor reprezentovaný nejakou sústavou (karteziánskou)
pohyb - zmena polohy v závislosti na čase.
~~trajektória~~ pohyb bodu => trajektória, dráha, rýchlosť, zrýchlenie bodu
- poloha bodu: $\vec{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ $B[x_B, y_B, z_B]$

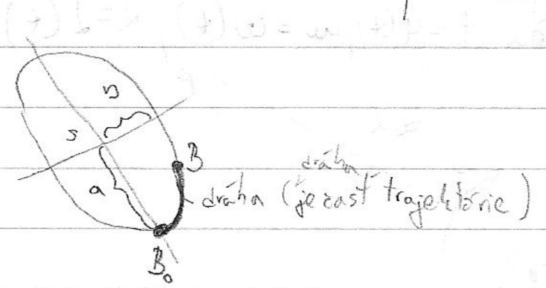
$r = |\bar{r}| = \overline{OB} = \sqrt{x_B^2 + y_B^2 + z_B^2}$



- pohyb bodu: $\bar{r} = \bar{r}(t) \Rightarrow$ $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ parametrické rovnice trajektórie bodu param je čas

trajektória je geom miesto okamžitých polôh bodu, ktoré bod ~~za~~ pri svojom pohybe nadobúda v priestore a čase. Častokrát sa tiež používa dráha

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



rýchlosť bodu $\bar{v}$ [$m s^{-1}$]

$\boxed{\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}}$ (1), $\bar{r} = \bar{r}(t)$ $\boxed{\bar{v} = \dot{\bar{r}}}$ * $\dot{\bar{r}}$ - deriv. podľa čiarky

- je deriv. vektora polohy vzhľadom na čas.

$$\bar{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}$$
$$V = |\bar{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

$v_x = \frac{dx}{dt}$, $x = x(t)$
$v_y = \frac{dy}{dt}$, $y = y(t)$
$v_z = \frac{dz}{dt}$, $z = z(t)$

zrýchlenie bodu $\bar{a}[ms^{-2}]$

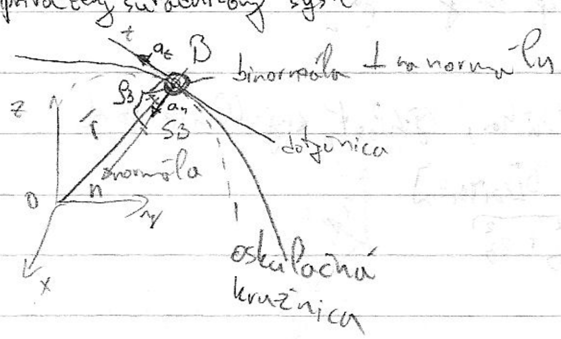
$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \dot{\bar{v}} = \ddot{\bar{r}}$$

- explicitne deriv podľa t t je dané 4sint
- implicitne ak t je vyjdrené pomocou inej skupiny

- vyjadruje zmenu vektora rýchlosti v závislosti na čase.

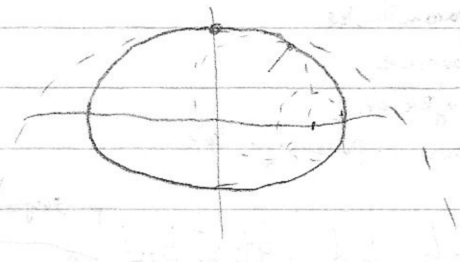
4s s je funkciou času s(t)

prirodzený súradnicový systém



S_B - stred krivosti trajektórie Bodu

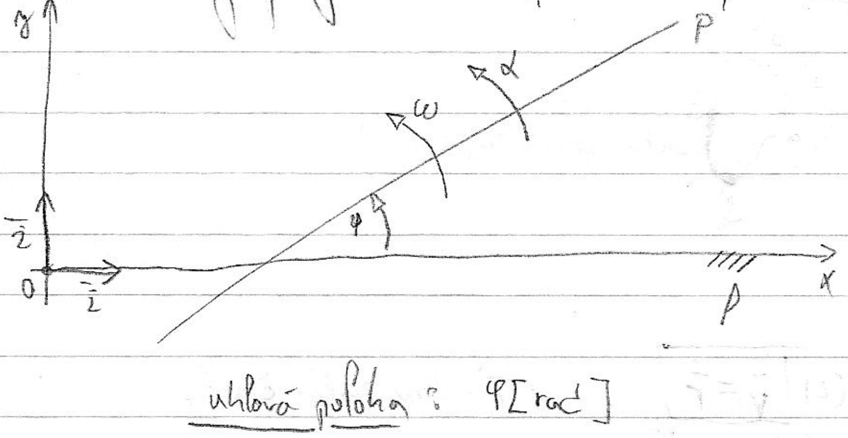
$\overline{BS_B} = \rho_B$ - polomer krivosti



- v elipse stále iná oskl. kruž.

Uhlový pohyb priamky v rovine

Uhlové veličiny pohybu $\varphi = \varphi(t)$, $\omega = \omega(t)$, $\alpha = \alpha(t)$



P - pevná (nepohyblivá) priamka
p - pohyblivá priamka
uhlový pohyb priamky - popísaný závislosťou

$\varphi = \varphi(t)$ (1) [rad]

uhlová poloha : φ[rad]

uhlová rýchlosť ω $[rad\,s^{-1}]$

1) stredná uhlová rýchlosť:

$$\omega_s = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad (2) \qquad (2)$$

2) okamžitá uhlová rýchlosť: $\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \omega_s = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$ (3)

$$\boxed{\omega = \frac{d\varphi}{dt}}$$

uhlové zrýchlenie $\alpha = [rad\,s^{-2}]$

- stredné $\alpha_s = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$ (4)
- okamžité $\alpha = \lim \alpha_s = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$

$$\boxed{\alpha = \frac{d\omega}{dt}} \quad \alpha = \alpha(t) \quad (5)$$

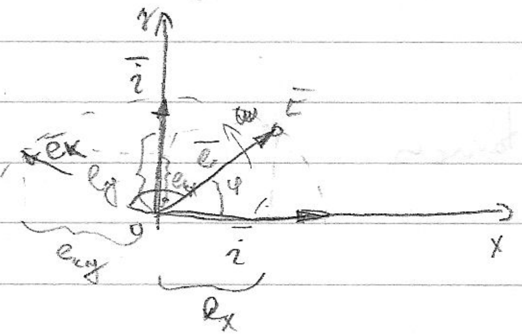
$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$

$\alpha = \alpha(\varphi)$ .. ? $\varphi = \varphi(t)$ nikdy vyhľadáme implic. explic

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\frac{d\varphi}{d\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}\frac{d\omega}{d\varphi} = \omega \cdot \frac{d\omega}{d\varphi} \qquad \boxed{\alpha = \omega \frac{d\omega}{d\varphi}}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\varphi}$$

Derivácia jednotkového vektora podľa času $\dot{\bar{e}} = ?$



$\dot{\bar{e}} = \frac{d\bar{e}}{dt} = ?$

$|\bar{e}| = 1$, $\bar{e} \neq konšt$, $\bar{e} = \bar{e}(t)$

$\bar{i} = konšt$, $\bar{j} = konšt$, $\bar{k} = konšt$ $\Rightarrow$ $\dot{\bar{i}} = 0$, $\dot{\bar{j}} = 0$, $\dot{\bar{k}} = 0$

$\bar{e}_K \perp \bar{e}$

$$\boxed{\bar{e} = e_x \bar{i} + e_y \bar{j}}$$

$e_x = \bar{e} \cdot \bar{i} = \cos\varphi$

$e_y = \bar{e} \cdot \bar{j} = \sin\varphi$

$$\boxed{\bar{e} = (\cos\varphi) \cdot \bar{i} + (\sin\varphi) \cdot \bar{j}} \quad (2)$$

$$\dot{\bar{e}} = \left[(-\sin\varphi) \cdot \bar{i} + (\cos\varphi) \bar{j}\right] \cdot \dot{\varphi} \quad (3)$$

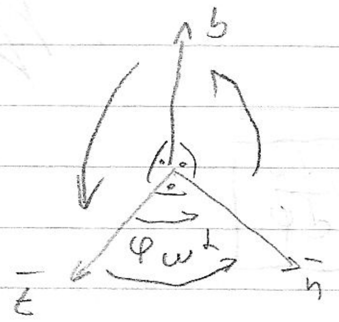
$\bar{e}_k = e_{kx}\,\bar{i} + e_{ky}\,\bar{j}$ $\qquad e_{kx} = \bar{e}_k \cdot \bar{i} = -\sin\varphi$

$\qquad\qquad\qquad\qquad e_{ky} = \bar{e}_k \cdot \bar{j} = \cos\varphi$

$$\vec{e}_k = (-\sin\varphi)\,\vec{i} + (\cos\varphi)\,\vec{j}$$

$$\mathring{\bar{e}}_k = \underbrace{\left((-\cos\varphi)\,\vec{i} + (\sin\varphi)\,\vec{j}\right)}_{\bar{e}} \cdot \mathring{\varphi}$$

$$\mathring{\bar{e}} = -\bar{e}\,\mathring{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathring{\bar{e}} = \bar{e}_k \cdot \mathring{\varphi}}$$



$\bar{t} = \bar{t}(t)$ $\quad |\bar{t}| = 1$ $\quad \bar{n} \perp \bar{t}$ $\qquad\qquad$ n ≠ nie h

$\bar{n} = \bar{n}(t)$ $\quad |\bar{n}| = 1$ $\quad \bar{b} \perp \bar{t}$

$\bar{b} = \bar{b}(t)$ $\quad |\bar{b}| = 1$

$\bar{t} \times \bar{n} = \bar{b}$

$\bar{n} \times \bar{b} = \bar{t}$

$\bar{b} \times \bar{t} = \bar{n}$

$$\mathring{\bar{t}} = \bar{n}\,\mathring{\varphi}; \quad \mathring{\varphi} = \omega$$

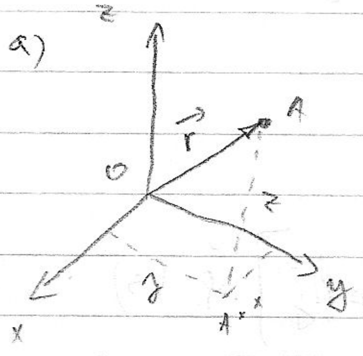
2 kinematika bodu

2.1 Pohyb bodu v rôznych súradnicových sústavach

a) KARTEZIÁNSKA SS. $\quad O, x, y, z, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$

b) PRIRODZENÁ SS. $\quad A, t, n, b, \bar{t}, \bar{n}, \bar{b}$

a)



POLOHA BODU $\quad \bar{r} = \overrightarrow{OA};\ \bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}\ [m]$

POHYB BODU $\quad \bar{r} = \bar{r}(t)\ [m]$

$x = x(t)$

$y = y(t)$ $\quad$ param. rovn. trajektórie bodu

$z = z(t)$

RÝCHLOSŤ $\boxed{\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}}$ $[ms^{-1}]$

$$\bar{v} = v_x \bar{i} + v_y \bar{j} + v_z \bar{k}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt};\ v_y = \frac{dy}{dt};\ v_z = \frac{dz}{dt};\ v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

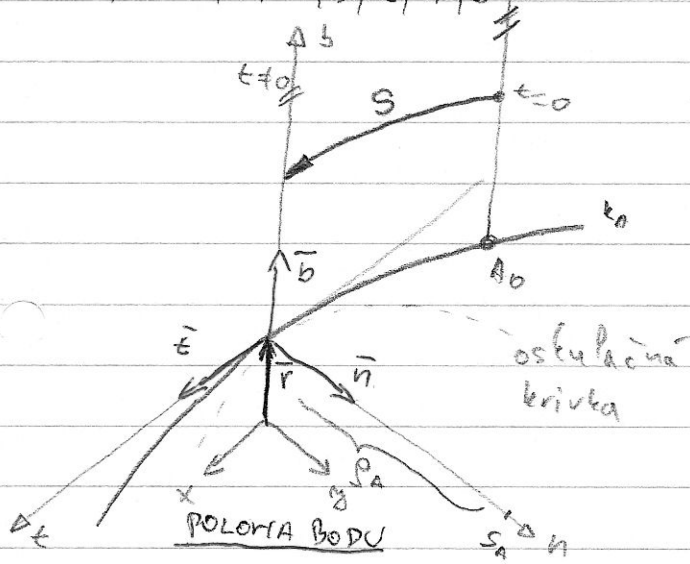
nositeľom vektora rýchlosti bodu je vždy jeho TRAJEKTÓRIA

ZRÝCHLENIE $\boxed{\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt}}$ $[ms^{-2}]$

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k} \quad a_x = \frac{dv_x}{dt} = \dot{v}_x = \ddot{x};\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = \dot{v}_y = \ddot{y};\ a_z = \frac{dv_z}{dt} = \dot{v}_z = \ddot{z}$$

$$a = |\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

b) $A, t, n, b, \bar{t}, \bar{n}, \bar{b}$



POLOHA BODU

t - dotyčnica
n - hlavná normála
b - binormála
} TRAJEKTÓRIA BODU

$\bar{t} \neq$ konšt
$\bar{n} \neq$ konšt
$\bar{b} \neq$ konšt
} $|\bar{t}| = |\bar{n}| = |\bar{b}| = 1$

$\bar{r} = \bar{r}(s)$
$s = s(t)$

$\bar{r} = \overrightarrow{OA}$ $\quad \bar{r} = \bar{r}[s(t)]$ $\quad$ s - oblúková súradnica - dĺžka oblúka krivky

$$\bar{r} = \bar{r}(t)$$

RÝCHLOSŤ

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} =$$

I - STATIKA
II - KINEMATIKA

3. KINEMATIKA TELESA

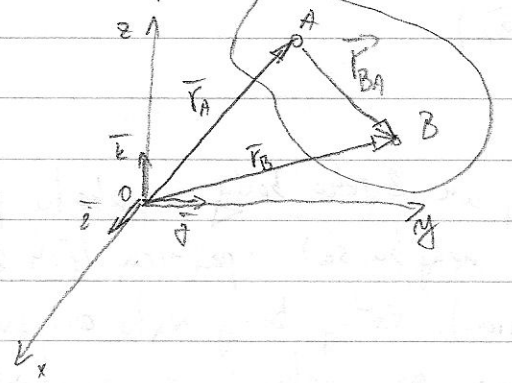
3.1 Úvod
3.2 Posuvný pohyb telesa
3.3 Rotačný — " —
3.4 Všeobecný rovinný — " —
} Rovinné pohyby telesa

3.6 Sférický pohyb telesa
3.7 Skrutkový — " —
3.8 Všeobecný priestorový — " —
} Priestorové pohyby telesa

sférický p. - jeden bod je pevný a všetko ostatné koná pohyb v priestore
sféra - guľová plocha
skrutkový - teleso sa otáča a napreduje
všeob. p. - ak sa teleso premiestňuje voľne v priestore $u = 6°$ - st. voľnosti

3.1. Úvod

Tuhé telesa podm. tuhosti telesa



$\vec{r}_A = \overrightarrow{OA},$
$\vec{r}_B = \overrightarrow{OB},$
$\vec{r}_{BA} = \overrightarrow{AB},$

podm. tuhosti telesa

$\boxed{\bar{r}_{AB}^{\,2} = konšt.}$ // $\bar{r}_{BA} \neq konšt$

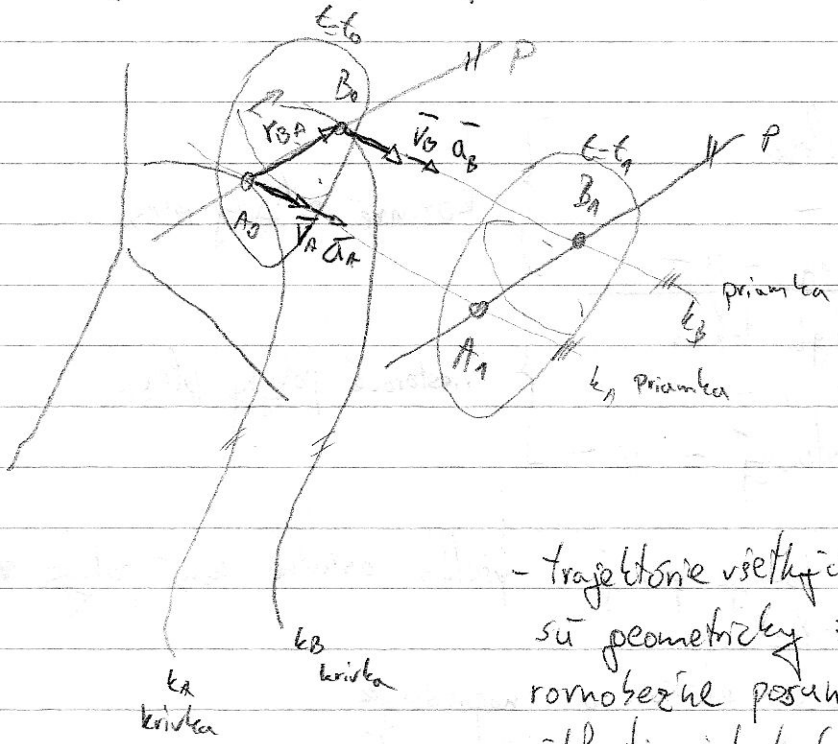
$|\vec{r}_{BA}| = konšt$

vzájomná poloha 2 bodov sa nemení a je konšt

3.2 Posuvný pohyb tel

Def. Tel. koná posuvný pohyb vtedy a len vtedy ak ľub. priamka telesa (spojnica ľub. dvoch bodov telesa) nemení svoj smer. Potom trajektórie všetkých bodov telesa sú geometricky zhodné posuv = translácia

navzájom rovnobežne posunuté priamky (pri priamočiarej translácii) alebo krivky - rovinné alebo priestorové (pri krivočiarej translácii)



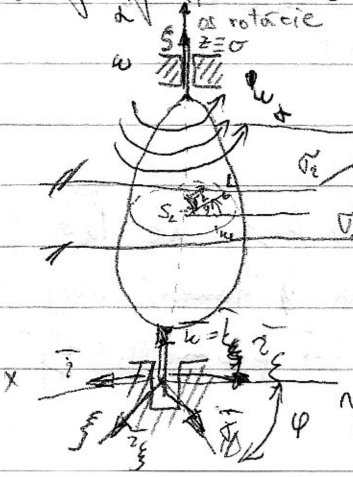
$\bar{v}_A = \bar{v}_B$
$a_A = a_B$

priamočiara translácia

- trajektórie všetkých bodov telesa sú geometricky zhodné navzájom rovnobežne posunuté.
- rýchlosti všet. bodov telesa sú rovnaké: $\bar{v}_B = \bar{v}_A$, $\bar{v}_C = \bar{v}_D = \bar{v}_T = \dots = \bar{v}_A$ a veľkosť $|\bar{v}_B| = |\bar{v}_A|$
- zrýchl. všet. b. t. sú rovnaké $\bar{a}_B = \bar{a}_A$, $\bar{a}_C = \bar{a}_D = \bar{a}_T = \dots = \bar{a}_A$ a veľkosť $|\bar{a}_B| = |\bar{a}_A|$

3.3 Rotačný pohyb telesa

Def. Tel. koná rot. pohyb vtedy a len vtedy ak 2 jeho body v priebehu pohybu telesa ostávajú trvalo v pokoji (t.j. nehýbu sa) spojnica týchto 2 bodov sa naz. stála os rotácie (otáčania). Všetky body tejto osi sú trvale v pokoji. Body telesa ležiace mimo osi rotácie sa pohybujú po kružniciach navzájom v rovnobežných rovinách kolmých na os rotácie. Stredy týchto kružníc ležia na osi rotácie.

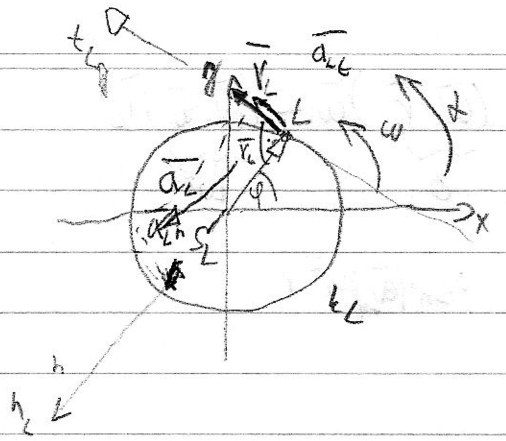


$\sigma_2 \parallel \sigma_j$

$T_1 = 0, x, y, z, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ - pevný (nepohyblivý) súradn. systém

$T_2 = 0, \xi, \eta, \zeta, \bar{i}_\xi, \bar{i}_\eta, \bar{i}_\zeta$ - pohyblivý súradn. systém pevne spojený s pohybujúcim sa telesom

(2)



UHLOVÉ VELIČINY TELESA :

uhlová dráha : $\varphi = \varphi(t)$ [rad] (1)

uhlová rýchlosť : $\boxed{\omega = \frac{d\varphi}{dt}}$ [rad s^{-1}] (2)

$\omega = \omega(t)$

uhlove zrýchlenie : $\boxed{\alpha = \frac{d\omega}{dt}}$ [rad s^{-1}] (3)

$\alpha = \alpha(t) \quad \bar{\omega} = \omega . \bar{k}$

$$\bar{\alpha} = \frac{d\bar{\omega}}{dt}\frac{d\varphi}{d\varphi} = \omega . \frac{d\omega}{d\varphi} \;;\; \boxed{\alpha = \omega \frac{d\omega}{d\varphi}} \quad (4)$$

$\bar{\alpha} = \alpha . \bar{k}$

KINEMATICKÉ VELIČINY POHYBU BODU TELESA :

rýchlosť : $\boxed{\bar{v}_L = \bar{\omega} \times \bar{r}_L}$ (5) Eulerov vzťah súvis medzi obvodovou a uhlovou rýchlosťou

$$\bar{v}_L = |\bar{\omega}||\bar{r}_L| \sin \widehat{(\bar{\omega}, \bar{r}_L)} . \bar{t} = \omega r_L \sin\frac{\pi}{2} . \bar{t} = \omega r_L \bar{t} = \omega r_L$$

$\bar{r}_L \perp \bar{\omega} \Rightarrow 90°$ $\quad \bar{t}$ - jednotkový vektor

$v_L \cdot |\bar{v}_L| = \omega r_L$

zrýchlenie : $a_L = \dot{\bar{v}}_L = \frac{d\bar{v}_L}{dt} = (\bar{\omega} \times \bar{r}_L)^{\circ} = \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}_L + \bar{\omega} \times \dot{\bar{r}}_L = \bar{\alpha} \times \bar{r}_L + \bar{\omega} \times \bar{v}_L$

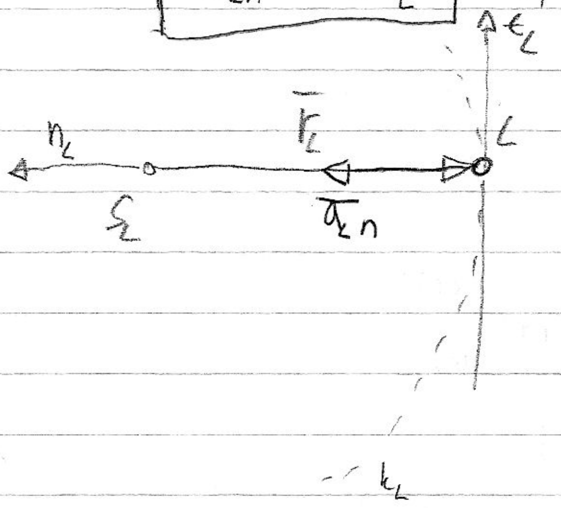
$$\bar{a}_L = \underbrace{\bar{\alpha} \times \bar{r}_L}_{\bar{a}_{Lt}} + \underbrace{\bar{\omega} \times \bar{v}_L}_{\bar{a}_{Ln}} \quad (6)$$

$\boxed{\bar{a}_{Lt} = \bar{\alpha} \times \bar{r}_L}$ (7) $a_{Lt} = |\bar{a}_{Lt}| = \alpha r_L$ ~~(9)~~

$\boxed{\bar{a}_{Ln} = \bar{\omega} \times \bar{r}_L}$ (8) $a_{Ln} = |\bar{a}_{Ln}| = \omega v_L$

z (5),(8) => $\bar{a}_{Ln} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_L) = \underbrace{(\bar{\omega} \cdot \bar{r}_L)}_{0}\bar{\omega} - \underbrace{(\bar{\omega} \cdot \bar{\omega})}_{\omega^2}\bar{r}_L$

$$\boxed{\bar{a}_{Ln} = -\omega^2 \bar{r}_L} \quad (9) \qquad a_{Ln} = |\bar{a}_{Ln}| = \omega^2 \cdot r$$



$v_L = \omega r_L \Rightarrow \omega = \frac{v_L}{r_L}$

$a_{Ln} = \omega^2 r_L = \left(\frac{v_L}{r_L}\right)^2 r_L = \frac{v_L^2}{r_L}$

$$\boxed{a_{Ln} = \frac{v_L^2}{r_L}} \qquad (10)$$

$a_{Ln} = \omega v_L$

$a_{Ln} = \omega^2 r_L$

$a_{Ln} = \frac{v_L^2}{r_L}$

$\bar{a}_L = a_{Lt}\bar{t} + a_{Ln}\bar{n}$

$a_L = |\bar{a}_L| = \sqrt{a_{Lt}^2 + a_{Ln}^2}$

Kinematická geometria rotačného pohybu telesa

Grafické zobrazovanie vektorov rýchlosti a zrýchlení bodov telesa.

- mierky:

mierka rýchlosti: $m_v = \frac{v_g}{v_s}$, $[v_g] \sim mm$ rýchlosť grafická, $[v_s] \sim ms^{-1}$ -"- skutočná

mierka zrýchlenia: $m_a = \frac{a_g}{a_s}$ $[a_g] \sim mm$ zrýchl. graf. $[a_s] \sim ms^{-2}$ -"- skut.

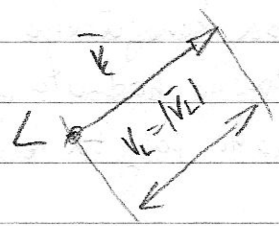
$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

$$\boxed{m_a = \frac{(m_v)^2}{(m_\rho)}}$$

mierka dĺžok m_ρ:

$$m_\rho = \frac{l_g}{l_s} \qquad [l_g] \sim mm \qquad [l_s] \sim m$$

$V_L = 3\ ms^{-1}$



$V_S = 3\,ms^{-1}$

$V_g \sim 3\,cm = 30\,mm$

$m_v = \frac{30\,mm}{3\,ms^{-1}} = 10\ mm/ms^{-1}$

$V_g = m_v \cdot V_S$

$30\,mm = m_v$

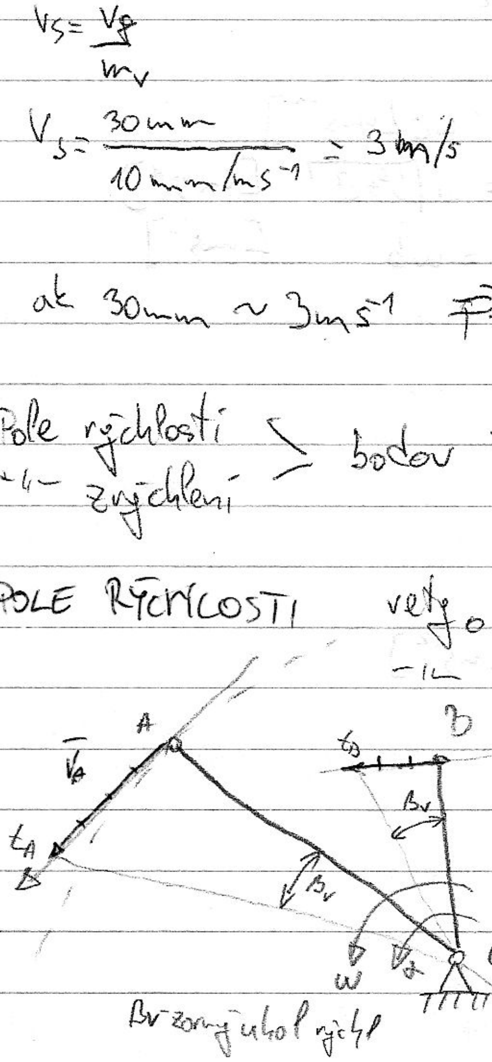
$V_S = \frac{V_g}{m_v}$

$V_S = \frac{30\,mm}{10\,mm/ms^{-1}} = 3\,m/s$

ak $30\,mm \sim 3\,ms^{-1} \Rightarrow 1\,mm \sim \frac{3}{30}\,ms^{-1} = 0{,}1\,ms^{-1}$

Pole rýchlosti
-"- zrýchlení } bodov telesa

POLE RÝCHLOSTI vety o zorných uhloch
-"- pootočených rýchlostiach



$O \equiv S_A = K_{21}$ stály stred otáč. telesa

Bv - zorný uhol rýchl.

$D: \omega$, rozmery telesa

$\overrightarrow{OA} = r_A$

$\overrightarrow{OB} = r_B$

~~BA~~ zuu

Nech mm

$v_A = \omega r_A = 4\ [ms^{-1}] \Rightarrow V_{Ag} \sim 40$

$V_B = \omega r_B = 3\ [ms^{-1}] \Rightarrow V_{Bg} \sim$

Nech

$V_{Ag} \approx 40mm$

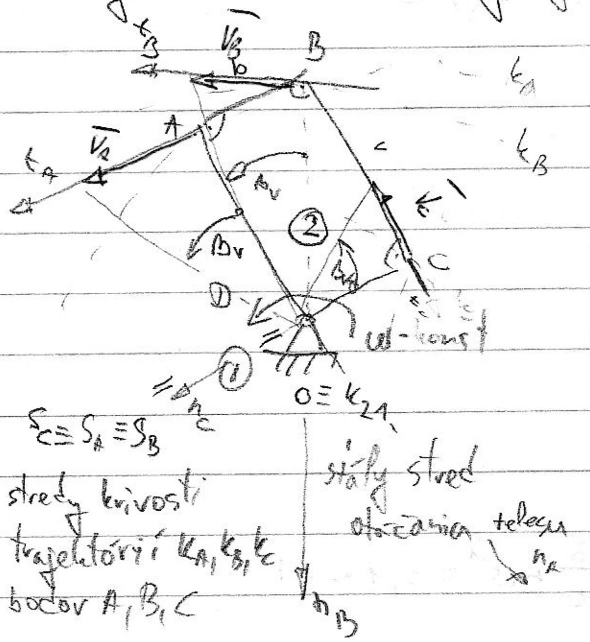
$V_{Bg} \approx 30mm$

Veta o zorných uhloch

$$\boxed{tg\, \beta_v = |\bar{\omega}|} \qquad \frac{V_A}{r_A} = \frac{V_B}{r_B} = \frac{V_C}{r_C} = \frac{V_D}{r_D} = tg\, \beta_v$$

$\measuredangle \beta_v$ - zorný uhol pre rýchlosti

<u>Veta</u>: Zo stáleho stredu otáčania vidíme v danom časovom okamihu t vektory rýchlosti všetkých bodov telesa konajúceho rotačný pohyb pod rovnakým zorným uhlom, ktorého hodnota <u>tangens</u> = tg = | vektora uhlovej rýchlosti rotačného pohybu telesa |.



D: $b\,[m]$, $c\,[m]$, $\omega\,[rad\,s^{-1}]$

ω - konšt

H - V_A, V_B, V_C

<u>analiticky</u>

$V_A = \omega\, \overline{Ak_{21}} = \omega c\ [ms^{-1}]$

$V_B = \omega\, \overline{Bk_{21}} = \omega \sqrt{b^2 + c^2}\ [ms^{-1}]$

$V_C = \omega\, \overline{Ck_{21}} = \omega b\ [ms^{-1}]$

$tg = \frac{sin}{cos} \qquad sin^2 + cos^2 = 1$

POLE ZRÝCHLENIA

a) <u>tangenciálne zrýchlenia</u> $\,_{u}\bar{a}_t{}^{u}\ [ms^{-2}]$

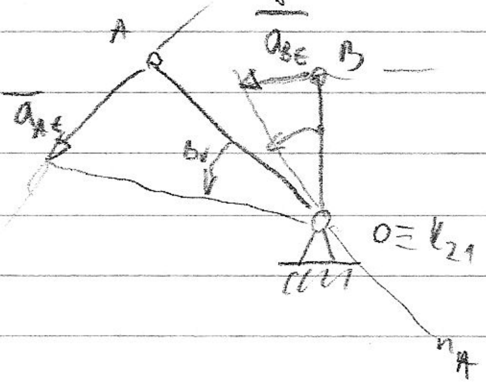
$$\bar{a}_{Lt} = \bar{\alpha} \times \bar{r}_L$$

$$a_{Lt} = |\bar{a}_{Lt}| = \alpha r_L$$

veta:

$$\boxed{tg\,\beta_{a_t} = |\bar{\alpha}|}$$

$\sphericalangle \beta_{a_t}$ zorný uhol pre tang. zrýchlenia bodov telesa



z K $tg\,\beta_{a_t} = |\bar{\alpha}|$

b/ normálové zrýchlenia , $\bar{a}_n$ $[ms^{-2}]$

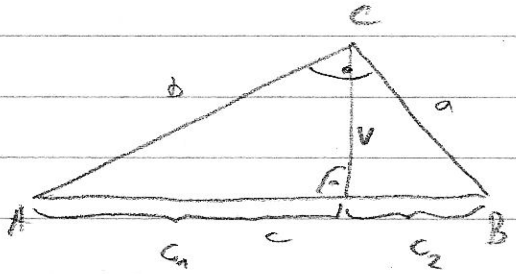
$\bar{a}_{Ln} = \bar{\omega} \times \bar{V}_L$

$a_{Ln} = \omega V_L$

$a_{Ln} = \omega^2 r_L$

$$\boxed{a_{Ln} = \frac{V_L^2}{r_L}}$$

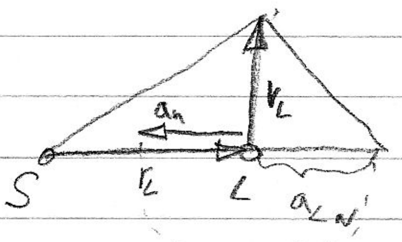
EUKLIDOVÁ VETA a EUKLIDOVÁ KONŠTRUKCIA

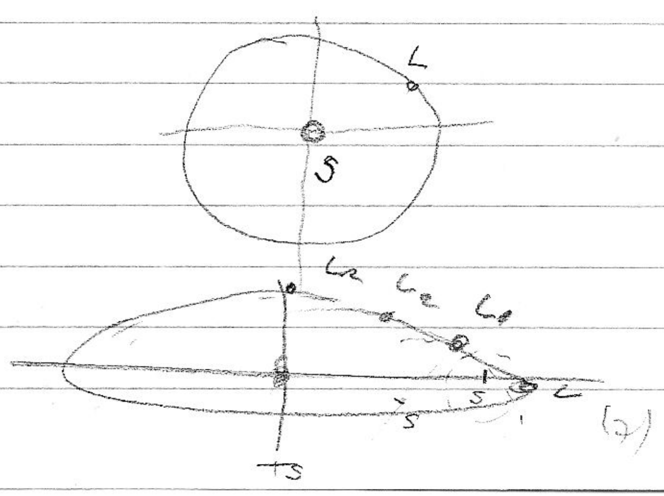


$$\boxed{V^2 = c_1 \cdot c_2}$$ Eukl. veta

$c_2 = \frac{V^2}{c_1} \Rightarrow a_{Ln} = \frac{V_L^2}{r_L}$

analógia kinematiky a geometrie, keď $c_2 \sim a_{Ln}$, $V \sim V_L$ a $c_1 \sim r_L$

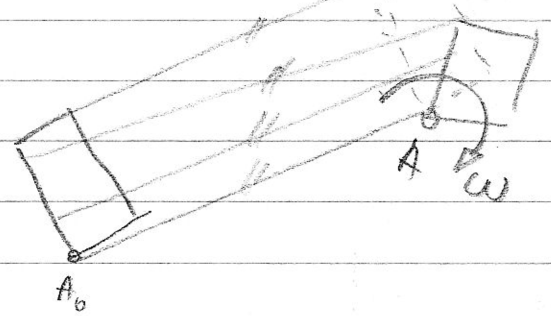




VŠEOBECNÝ ROVINNÝ POHYB TELESA

Def pohybu: ZÁKLADNÝ ROZKLAD POHYBU

Všeob. rov pohyb je zložený z 2 súčasne prebiehajúcich pohybov a to z unášajúceho pohybu posuvného celého telesa tak ako sa pohybuje jeho referenčný bod a z relatívneho pohybu rotačného telesa okolo osi prechádzajúcej referenčným bodom kolmo na rovinu pohybu.

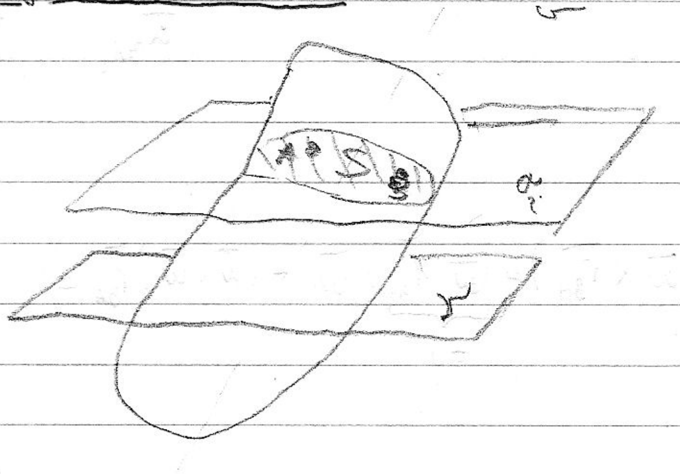


Výsl. pohyb = pohyb unášavý + p relatívny

↓ ↓ ↓

VRP = posuvný ~~rotač~~ rotačný

Rýchlosť bodu telesa



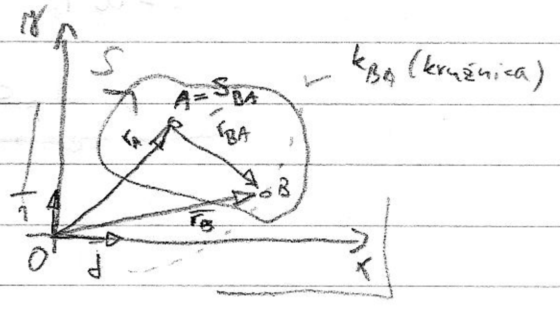
$\sigma_i \parallel \nu$

ν - rovina pohybujúceho sa telesa

$\sigma \perp \nu$

S - rovina rezu telesom rovinou $\sigma_i \parallel \nu$

„S" roviny útvar telesa



Rovinný útvar „S" telesa $\{A\} \in$ „S"

$\{B\} \in$ „S"

Nech referenčný bod telesa je bod A

D: $\bar{r}_A, \bar{v}_A, \bar{a}_A$

H: $\bar{r}_B, \bar{v}_B, a_B$

Rýchlosť : $\bar{r}_B = \bar{r}_A + \bar{r}_{BA}$ (1) $\Big/ \frac{d}{dt}$

$$\dot{\bar{r}}_B = \dot{\bar{r}}_A + \dot{\bar{r}}_{BA}$$

$$\boxed{\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}} \quad (2)$$

Eulerov vzťah :

$$\boxed{\bar{v}_{BA} = \bar{\omega} \times \bar{r}_{BA}} \quad (3)$$

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \bar{r}_{BA}$$

Zrýchlenie :

$$\bar{a}_B = \dot{\bar{v}}_B$$

$$\cancel{a_B} \Rightarrow \dot{\bar{v}}_B = \dot{\bar{v}}_A + \dot{\bar{v}}_{BA}$$

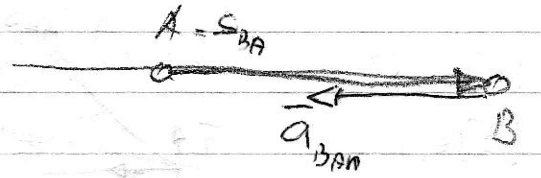
$$\boxed{\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}} \quad (4)$$

$$\bar{a}_{BA} = \dot{\bar{v}}_{BA} = (\bar{\omega} \times \bar{r}_{BA})^{\circ} = \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}_{BA} + \bar{\omega} \times \dot{\bar{r}}_{BA} = \underbrace{\bar{\alpha} \times \bar{r}_{BA}}_{\bar{a}_{BA_t}} + \underbrace{\bar{\omega} \times \bar{v}_{BA}}_{\bar{a}_{BA_n}}$$

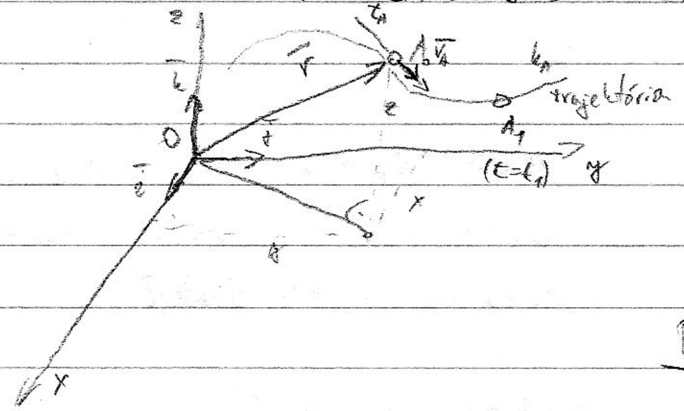
$$\bar{a}_{BA} = \bar{a}_{BA_t} + \bar{a}_{BA_n}$$

$$\bar{a}_{BA_n} = \bar{\omega} \times \bar{v}_{BA} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_{BA}) = \underbrace{(\bar{\omega} \cdot \bar{r}_{BA})}_{=0} \bar{\omega} - (\bar{\omega} \cdot \bar{\omega}) \bar{r}_{BA} =$$

$$= -\omega^2 \bar{r}_{BA}$$



POHYB BODU V KARTEZIÁNSKEJ SÚR. SÚSTAVE: $O, x, y, z, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$



Poloha bodu:

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \quad [m] \quad (1)$$

$$r = |\bar{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \quad [m] \quad (2)$$

Pohyb bodu: $\boxed{\bar{r} = \bar{r}(t)}$ [m] (3)

$x = x(t)$ [m]
$y = y(t)$ [m] parametrické rovnice
$z = z(t)$ [m] trajektórie MB, parameter je čas

$$\bar{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

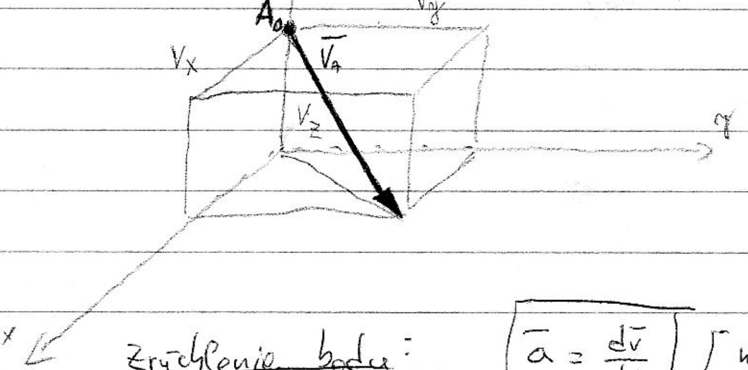
$$r = |\bar{r}| = \sqrt{[x(t)]^2 + [y(t)]^2 + [z(t)]^2} \quad [m]$$

Rýchlosť bodu $\boxed{\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}}$ $[ms^{-1}]$ (4)

$$\bar{v} = v_x\bar{i} + v_y\bar{j} + v_z\bar{k} \quad (5)$$

$$v = |\bar{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (6)$$

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = \dot{x} \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = \dot{y} \\ v_z &= \frac{dz}{dt} = \dot{z} \end{aligned}\right\} \text{zložky rýchlosti} \quad (7)$$

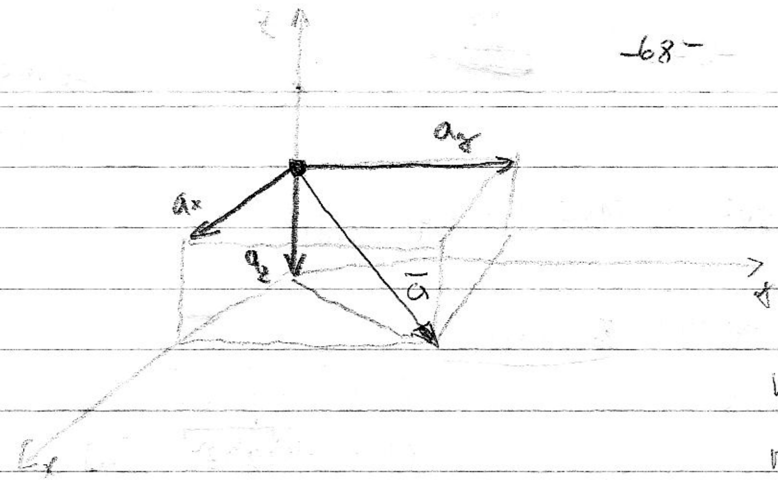


Zrýchlenie bodu: $\boxed{\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt}}$ $[ms^{-2}]$ (8)

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k} \quad (9)$$

$$a = |\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (10)$$

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = \dot{v}_x = \ddot{x} \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} = \dot{v}_y = \ddot{y} \\ a_z &= \frac{dv_z}{dt} = \dot{v}_z = \ddot{z} \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

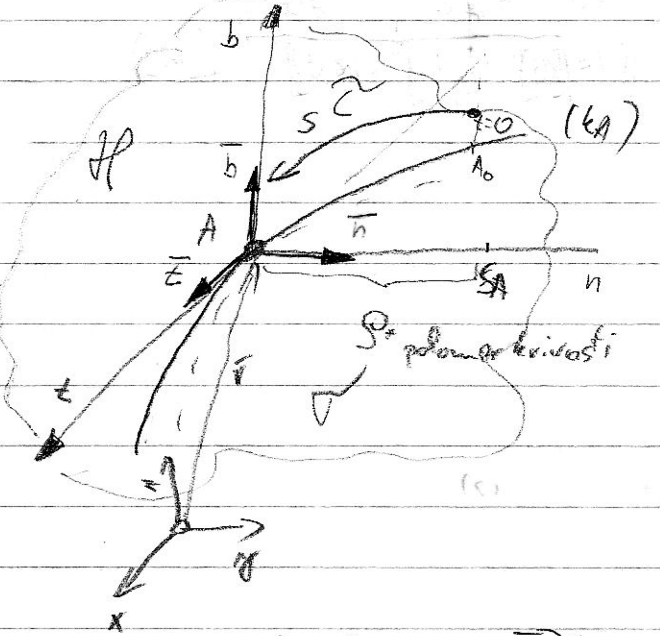


vektor rýchlosti leží na dotyčnici t bodu.

vektor zrýchlenia leží v oskulačnej rovine (prienik dotyčnice a normály) šípku má buď ako rýchlosť

$\xrightarrow{a}$ $\xrightarrow{v}$ $\quad sgn\, \bar{a} = sgn\, \bar{v}$ $\rightarrow$ pohyb je zrýchlený

!) POHYB BODU V PRIRODZENEJ SÚR. SÚSTAVE $A, t, n, b, \bar{t}, \bar{n}, \bar{b}$



t - dotyčnica
n - normála hlavná
b - binormála
súradnicové roviny σ - t, n - oskulačná
τ - n, b - normálová
$\mathcal{H}$ - t, b - rektifikačná

s - oblúková súradnica = dĺžka oblúka krivky (k_A) t.j. trajekt. bodu

$s = s(t)$

Poloha bodu: $\bar{r} = \overrightarrow{OA}\,[m]$

$\bar{r} = \bar{r}(s),\ s = s(t)$

$\bar{r} = \bar{r}[s(t)]$

Pohyb bodu:

$r = \bar{r}(t)$

Rýchlosť bodu

$$v = \frac{d\bar{r}}{dt}$$

$$v = \frac{d}{dt}\left[s(t)\right] = \frac{d\bar{r}}{ds}\,\frac{ds}{dt} = \boxed{\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{t}}$$ - jednotkový tangenciálny vektor $\quad |\bar{t}| = 1$

$\bar{t} = \bar{r}'$

[2]