TESTY DOBREJ ZHODY

Testy dobrej zhody

- = testy hypotéz – zhody rozdelení (= testy dobrej zhody / fit testy / Goodness of Fit Tests)
- Overujeme, či empirické rozdelenie je štatisticky zhodné s niektorým z teoretických rozdelení pravdepodobnosti, prípadne s iným empirickým rozdelením.
- H_0: $f(x) = g(x)$; H_1: $f(x) \neq g(x)$

Testy dobrej zhody

- Pearsonov Chi-kvadrát (χ^2) test (univerzálny test pre diskrétne aj spojité distribučné funkcie s dostatočne veľkým rozsahom *n)*
- Kolmogorovov test (test pre jednoznačne určené spojité distribučné funkcie)
- Kolmogorovov-Smirnovov test (test zhody dvoch empirických distribučných funkcií)
- Testy normality cez momenty (testy normality pomocou koeficientu šikmosti a špicatosti)

- Testy extrémnych hodnôt (za predpokladu normality súboru dát)

Všeobecný postup

1. Navrhnúť predpokladaný typ rozdelenia pravdepodobnosti, napr. na základe grafického zobrazenia rozdelenia početností empirických údajov
2. Odhadnúť parametre vybraného rozdelenia (intervaly spoľahlivosti)
3. Overiť zhodu rozdelenia výberových údajov s vybraným rozdelením s odhadnutými parametrami pomocou testov dobrej zhody

Príklad 1 - χ^2 test (Normálne rozdelenie)

- Náhodným výberom bola vybratá vzorka rozsahu $n = 50$.
- Frekvenčná tabuľka
  - Počet intervalov $k = 5$
  - Rozsah intervalu $h = 2$
  - Min = 6, Max = 14

i	z_i	n_i
1	6	6
2	8	11
3	10	19
4	12	9
5	14	5
		Σ=50

- Overte na hladine významnosti $\alpha = 5\%$, či empirické rozdelenie početností zodpovedá normálnemu rozdeleniu.

Výpočet bodových odhadov parametrov rozdelenia

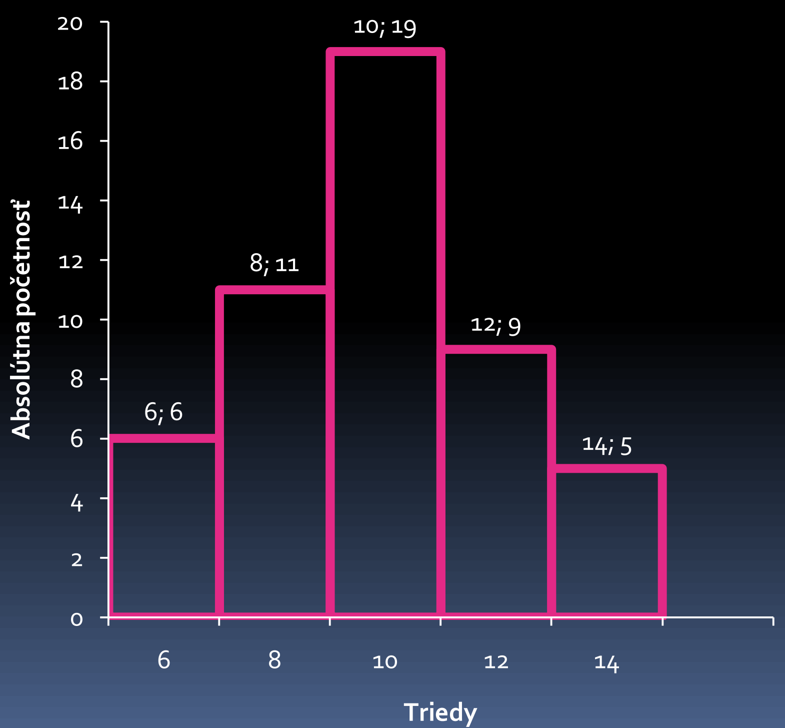
i	z_i	n_i	$=z_i*n_i$	$=(z_i\text{-priemer})^2*n_i$
1	6	6	36	88.4736
2	8	11	88	37.2416
3	10	19	190	0.4864
4	12	9	108	41.9904
5	14	5	70	86.528
suma stĺpcov:		50	492	254.72

výberový priemer: 9.84 = 492 / 50

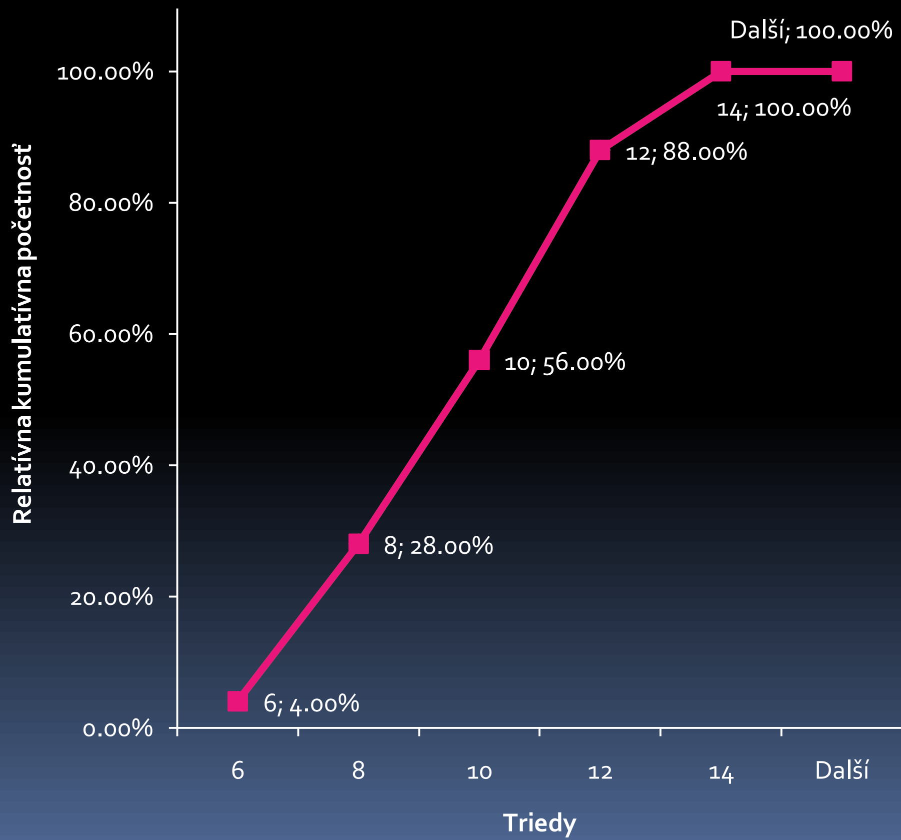
výberová smerodajná odchýlka: 2.28 = $\sqrt{254{,}72 / (50-1)}$

Empirické rozdelenie N[10,4]

Graf rozdelenia empirických početností

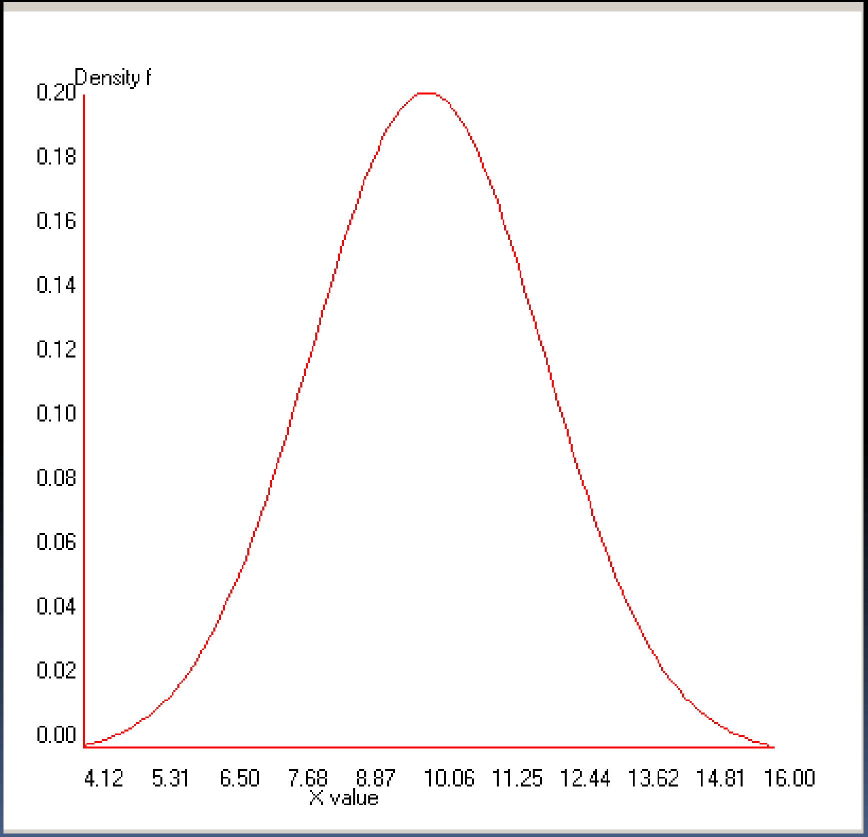


Graf kumulatívnej empirickej distribučnej funkcie

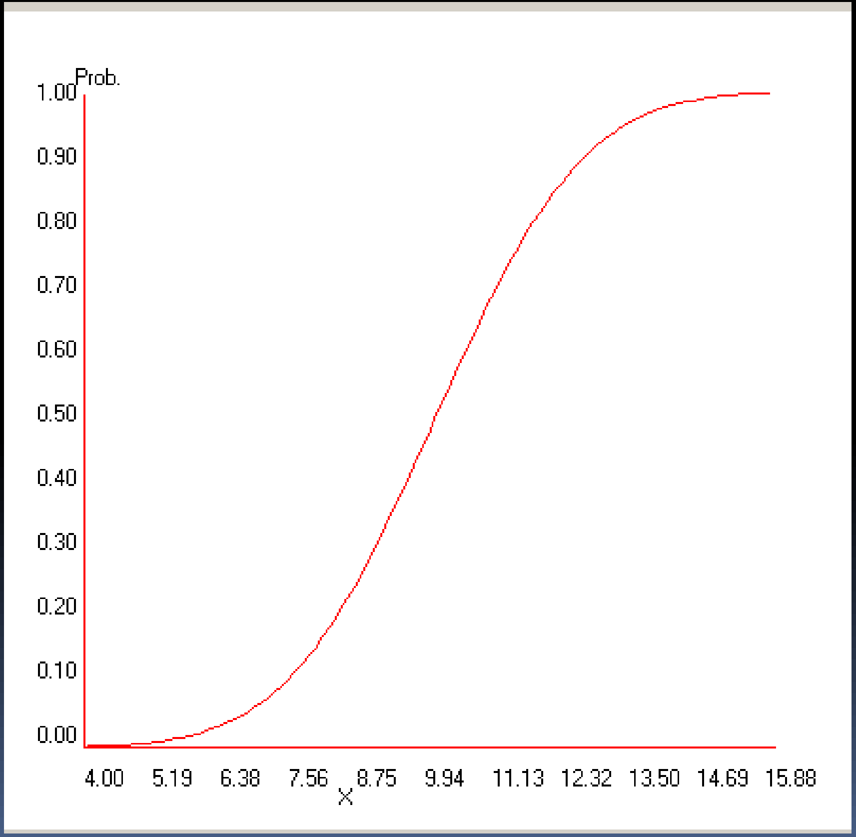


Teoretické rozdelenie N[10,4]

Graf **hustoty pravdepodobnosti** normálneho rozdelenia N[10,4]

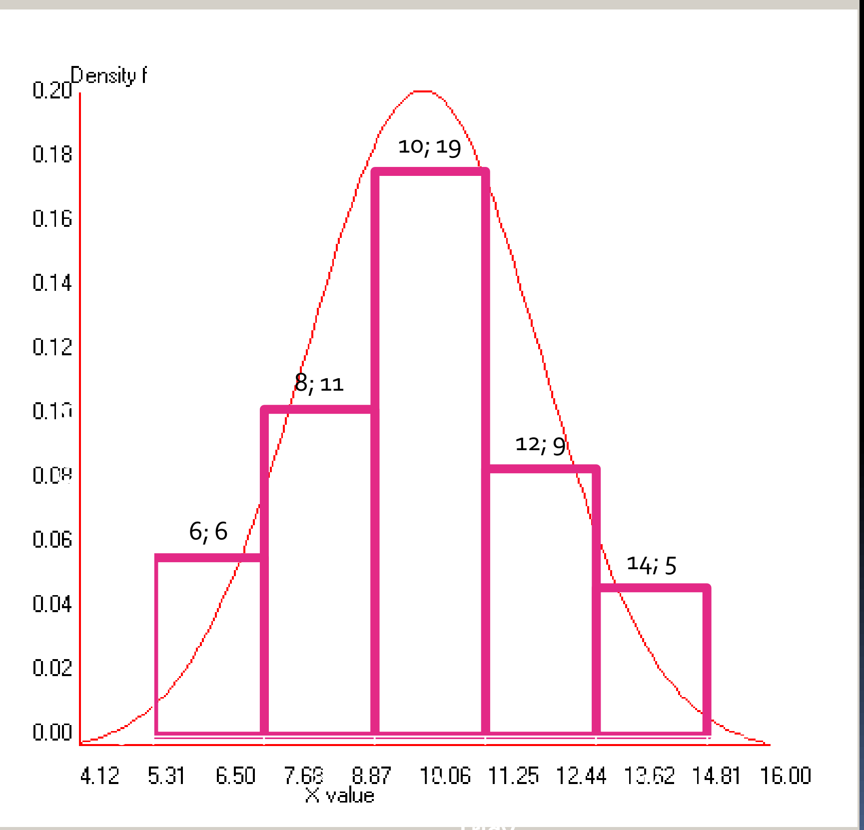


Graf **kumulatívnej distribučnej funkcie** normálneho rozdelenia N[10,4]

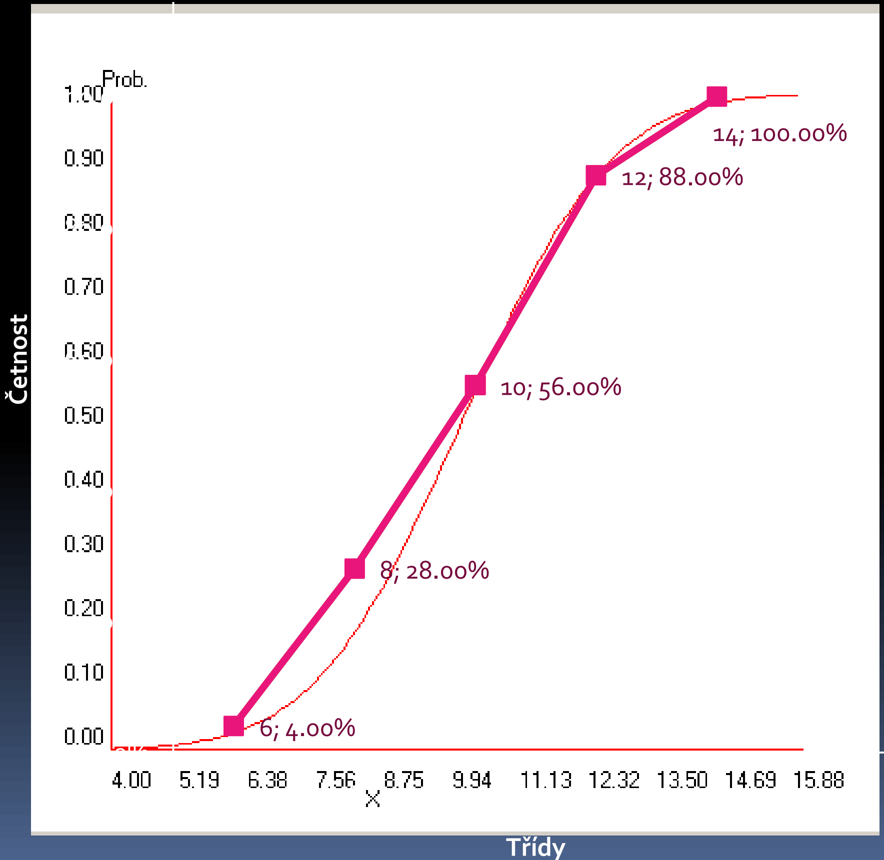


Teoretické a empirické rozdelenie N[10,4]

Graf **hustoty pravdepodobnosti** normálneho rozdelenia N[10,4]



j distribučnej funkcie
elenia N[10,4]



Testy dobrej zhody

- Hodnoty skúmanej vybranej premennej - náhodne vybranej vzorky rozsahu n, sú rozdelené do k tried (variačné triedenie)
- Porovnáva sa miera zhody pozorovaných empirických početností n_i týchto tried s teoretickými početnosťami np_i zodpovedajúcimi týmto triedam (p_i – teoretická pravdepodobnosť výskytu hodnôt z i-tej triedy podľa skúmaného zákona rozdelenia pravdepodobnosti (normálne, Poissonove, binomické rozdelenie a iné))

Testovacia charakteristika χ^2 testu dobrej zhody P

$$P = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n.p_i)^2}{n.p_i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i^2}{n.p_i} - n$$

- Charakteistika *P* alebo χ^2 má rozdelenie s počtom stupňov voľnosti *k*-1-*r*,
  - kde *r* je počet odhadnutých parametrov predpokladaného teoretického rozdelenia,
  - n_i sú empirické, skutočne zistené početnosti hodnôt x_i/z_i
- p_i
  - je teoretická pravdepodobnosť, že hodnoty náhodnej veličiny ležia v *i*-tom intervale

Testovacia charakteristika testu dobrej zhody P (χ^2)

$$P = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n.p_i)^2}{n.p_i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i^2}{n.p_i} - n$$

- Charakteristika *P* alebo χ^2 má rozdelenie s počtom stupňov voľnosti *k*-1-*r*,
  - kde *r* je počet odhadnutých parametrov predpokladaného teoretického rozdelenia, k je počet tried variačného triedenia
  - n_i sú empirické, skutočne zistené početnosti hodnôt x_i diskrétnej premennej alebo intervalov $(t_{i-1} ; t_i\rangle$ hodnôt z_i spojitej premennej a np_i sú príslušné teoretické, očakávané početnosti.
  - *N* je rozsah výberového súboru
- p_i je pravdepodobnosť hodnoty premennej s predpokladaným rozdelením, resp. pravdepodobnosť intervalu hodnôt
  - je teoretická pravdepodobnosť, že hodnoty náhodnej veličiny ležia v *i*-tom intervale $(t_{i-1} ; t_i\rangle$ spojitej premennej.

Postup výpočtu testu

i	$(t_{i-1}; t_i\rangle$	t_{i-1}	v_{i-1}	$\Phi_{(v_{i-1})}$	p_i	$n*p_i$	Coch-ran	$n*p_i$ (po cochranovi)	Coch-ran2	Početnosti sčítané	$(np_i-n_i)^2/(np_i)$
1	⟨5;7⟩	-∞	-∞	0	0.10565	5.282	ok	5.282	ok	6	0.097458323
2	(7;9⟩	7	-1.25	0.106	0.25004	12.502	ok	12.502	ok	11	0.180468065
3	(9;11⟩	9	-0.37	0.356	0.33928	16.964	ok	16.964	ok	19	0.244319937
4	(11;13⟩	11	0.51	0.695	0.22276	11.138	ok	15.251	ok	14	0.102661373
5	(13;15⟩	13	1.39	0.918	0.08226	4.113	sčítať		sčítať		
6		∞	∞	1							Σ= P = 0,625

Horná a dolná hranica intervalu (pokračovanie predchádzajúcej tabuľky)

Dolná hranica intervalu. Prvý a posledný interval zabezpečuje pokrytie celého teoretického rozsahu rozdelenia

Hodnota normovanej náhodnej veličiny

$$v_{i-1} = \frac{(z_i - \bar{x})}{s_1}$$

Distribučná funkcia normovaného normálneho rozdelenia - hodnoty sú tabelované , pre z_i< o, platí

$$\Phi(v_{i-1}) = 1 - \Phi(-v_{i-1})$$

Teoretická pravdepodobnosť, že hodnoty náhodnej veličiny ležia v i-tom intervale (rozdiel hodnôt dvoch po sebe idúcich riadkov)

$$p_i = \Phi(v_i) - \Phi(v_{i-1})$$

Cochranovo pravidlo

- je požadované splnenie podmienky $n_i.p >= 5$ pre $i = 1, 2, \ldots, k$. ($i = 1, 2, \ldots, k$). Splnenie tejto podmienky možno dosiahnuť dodatočne, zlučovaním susedných tried. Avšak jej prísne dodržiavanie je nutné iba pri malom počte stupňov voľnosti. Bolo overené, že pre k-1-$r \geq 3$ stačí, aby $n.p_i \geq 4$ a pre k-1-$r \geq 6$ stačí, aby $n.p_i \geq 1$; (i =1, 2, … k).

Postup výpočtu χ^2 testu dobrej zhody

i	$(t_{i-1}; t_i\rangle$	t_{i-1}	v_{i-1}	$\Phi(v_{i-1})$	p_i	$n*p_i$	cochran	$n*p_i$ (po cochranovi)	cochran2	Početnosti sčítané	$(np_i-n_i)^2/(np_i)$
1	$(5;7\rangle$	$-\infty$	$-\infty$	0	0.10565	5.282	ok	5.282	ok	6	0.097458323
2	$(7;9\rangle$	7	-1.25	0.106	0.25004	12.502	ok	12.502	ok	11	0.180468065
3	$(9;11\rangle$	9	-0.37	0.356	0.33928	16.964	ok	16.964	ok	19	0.244319937
4	$(11;13\rangle$	11	0.51	0.695	0.22276	11.138	ok	15.251	ok	14	0.102661373
5	$(13;15\rangle$	13	1.39	0.918	0.08226	4.113	sčítať				
6		∞									Σ= P = 0,625

Neplatí nerovnosť

0,625 = P $>$ $\chi^2_{\gamma;k-1-r}$ = 3,84, preto hypotézu H_0 nezamietame na hladine významnosti α. Údaje pochádzajú z normálneho rozdelenia.

$\gamma = 0.95$

r (počet parametrov rozdelenia)= 2

k-1-r = 4-1-2 = 1

Tabelovaná hodnota kvantilu: $\chi^2_{\gamma}(k-1-r)$ =3.84

Príklad 2 - χ^2 test (Binomické rozdelenie)

- Bolo skúmané dodržiavanie šiestich pravidiel domáceho poriadku nájomníkmi. Jednoduchý náhodný výber 200 bytov odhalil nasledujúce skutočnosti. Na 5%-nej hladine významnosti vykonajte test hypotézy a určte, či vzorka pochádza z rozdelenia, v ktorom počet priestupkov (zo šiestich možných priestupkov = n) na 1 byt je binomicky rozdelená náhodná premenná.

H_0: Počet priestupkov na 1 byt vo všetkých mestských bytoch **je** binomicky rozdelený s pravdepodobnosťou úspechu v každom pokuse p=0,3.
H_1: Počet priestupkov na jeden byt v celom meste **nie je** opísateľný binomickým rozdelením.

$$P=\sum_{i=1}^{k}\frac{(n_i-n.p_i)^2}{n.p_i}=\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i^2}{n.p_i}-n$$

Príklad 2 - χ^2 test (Binomické rozdelenie)

k = 7
alfa = 0.05

Počet možných priestupkov na 1 byt	početnosť	početnosť priestupkov	p_i	Teoretický počet n*pi	cochran	$n^*p_{i\,(po\ cochranovi)}$	cochran2	početnosti sčítané	$(np_i-n_i)^2/(np_i)$
0	31	0	0.1176	23.53	ok	23.530	ok	31	2.37163
1	51	51	0.3025	60.51	ok	60.505	ok	51	1.49324
2	70	140	0.3241	64.83	ok	64.827	ok	70	0.41279
3	32	96	0.1852	37.04	ok	37.044	ok	32	0.68680
4	9	36	0.0595	11.91	ok	14.094	ok	16	0.25776
5	5	25	0.0102	2.04	sčítať		sčítať		
6	2	12	0.0007	0.15	sčítať		sčítať		
	200	**360**	**1.0000**	**200.00**		**200.000**		**200**	

$$p_i=P(x)=\binom{n}{x}.p^x.(1-p)^{n-x}$$

$$\binom{n}{x}.=\frac{n!}{k!(n-k)!}\ pre\ n\geq k\geq 0;inak=0$$

$$E(X)=n.p$$

$$D(X)=n.p.(1-p)$$

k=počet intervalov = 7

E(X)= 1.8 =n.p

n= 6

p= 0.3

$$P = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n.p_i)^2}{n.p_i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i^2}{n.p_i} - n$$

Príklad 2 - χ^2 test (Binomické rozdelenie)

Počet možných priestupkov na 1 byt	početnosť	početnosť priestupkov	p_i	Teoretický počet n*pi	cochran	$n{*}p_{i\,(\text{po cochranovi})}$	cochran2	početnosti sčítané	$(np_i-n_i)^2/(np_i)$
0	31	0	0.1176	23.53	ok	23.530	ok	31	2.37163
1	51	51	0.3025	60.51	ok	60.505	ok	51	1.49324
2	70	140	0.3241	64.83	ok	64.827	ok	70	0.41279
3	32	96	0.1852	37.04	ok	37.044	ok	32	0.68680
4	9	36	0.0595	11.91	ok	14.094	ok	16	0.25776
5	5	25	0.0102	2.04	sčítať		sčítať		
6	2	12	0.0007	0.15	sčítať		sčítať		
	200	**360**	**1.0000**	**200.00**		**200.000**		**200**	

r (počet parametrov rozdelenia)= 2

p = 5.2222

γ = 0.95

k (po Cochranovi)= 5

k-1-r = 5-1-2 = 2

$\chi^2_\gamma(k\text{-}1\text{-}r)$ = **5.99**

Testovacia charakteristika P nie je väčšia ako chi-kvadrát, preto hypotézu H0 nezamietame na hladine významnosti 0.05.

Údaje pochádzajú z binomického rozdelenia.

Príklad 2 - χ^2 test (Poissonovo rozdelenie)

- Pri výrobe sa môže vyskytovať určitý počet chýb na 1 výrobku. Predpokladá sa, že rozdelenie počtu chýb sa riadi Poissonovým rozdelením. Jednoduchým náhodným výberom sme vybrali istý počet výrobkov. Počty chýb sú uvedené v tabuľke. Test zhody s Poissonovým rozdelením vykonajte na hladine významnosti a.

H_0: Výsledky experimentu **sú** realizáciou náhodnej veličiny s Poissonovym rozdelením.
H_1: Výsledky experimentu **nie sú** realizáciou náhodnej veličiny s Poissonovym rozdelením

$$P = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n.p_i)^2}{n.p_i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i^2}{n.p_i} - n$$

Príklad 2 - χ^2 test (Poissonovo rozdelenie)

Pearson Poisson

k= 6

Počet chýb x	Počet výrobkov	počet chýb spolu	p_i	Teoretický počet výrobkov n*pi	cochran	n^*p_i (po cochranovi)	cochran2	početnosti sčítané	$(np_i-n_i)^2/(np_i)$
0	43	0	0.5562	41.71	ok	41.712	ok	43	0.03978
1	24	24	0.3263	24.47	ok	24.472	ok	24	0.00912
2	5	10	0.0957	7.18	ok	8.813	ok	8	0.07500
3	2	6	0.0187	1.40	sčítať		sčítať		
4	1	4	0.0027	0.21	sčítať		sčítať		
5 a viac	0	0	0.0003	0.02	sčítať		sčítať		
	75	**44**	**1.0000**	**75.00**		**74.997**		**75**	**0.1239**

$$p_i = P(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$$

$E(X) = \lambda$ = 44/75

$D(X) = \lambda$

K = počet intervalov = 6

E(x) = λ = 0.58670

E = 2.71828

K = počet intervalov po Cochranovi= 3

$$P=\sum_{i=1}^{k}\frac{(n_i-n.p_i)^2}{n.p_i}=\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i^2}{n.p_i}-n$$

Príklad 2 - χ^2 test (Poissonovo rozdelenie)

Pearson Poisson

k= 6

Počet chýb x	**Počet výrobkov**	**počet chýb spolu**	**p_i**	**Teoretický počet výrobkov n*pi**	**cochran**	n^*p_i (po cochranovi)	cochran2	početnosti sčítané	**$(np_i-n_i)^2/(np_i)$**
0	43	0	0.5562	41.71	ok	41.712	ok	43	0.03978
1	24	24	0.3263	24.47	ok	24.472	ok	24	0.00912
2	5	10	0.0957	7.18	ok	8.813	ok	8	0.07500
3	2	6	0.0187	1.40	sčítať		sčítať		
4	1	4	0.0027	0.21	sčítať		sčítať		
5 a viac	0	0	0.0003	0.02	sčítať		sčítať		
	75	**44**	**1.0000**	**75.00**		**74.997**		**75**	**0.1239**

Kritický obor: $\chi^2_{0,95;(k-1-r)} = \chi^2_{0,95\ ;(3-1-1)} = \chi^2_{0,95\ ;(1)} = 6.635$

P = 0.124 nie je > 6.635 - preto H0 nezamietam.

Na hladine významnosti $\alpha = 0.01$ môžeme rozdelenie počtu chýb považovať za Poissonovo s parametrom $\lambda = 0.5867$

$$P = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n.p_i)^2}{n.p_i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i^2}{n.p_i} - n$$

Príklad 3 - χ^2 test (Exponenciálne rozdelenie)

$$f(t,\lambda) = \begin{cases} \lambda.e^{-\lambda.t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$E(T) = 1/\lambda$

$D(T) = 1/\lambda^2$

Príklad 4

Kolmogorovov test

$$D_1 = \max\left\{\max_{1\le i\le l} \Delta_i;\ \max_{1\le i\le l} \Delta_i'\right\}$$

$$\Delta_i = \left|F(x_{(N_i)}) - F_n(x_{(N_i)})\right| \quad \text{pre } i = 1, 2, \ldots,$$

$$\Delta_i' = \left|F(x_{(N_i)}) - F_n(x_{(N_{i-1})})\right| \quad \text{pre } i = 1, 2, \ldots,$$

$$\Delta_1' = F(x_{(N_1)}).$$

Kolmogorovov test

Parametre rozdelenia:
Priemer: 100
Rozptyl: 4 sm.odch.:2
Alfa 0.01
Rozsah 23

H_0: Uvedený výberový súbor pochádza z rozdelenia N(100; 9).
H_1: Uvedený výberový súbor pochádza z iného rozdelenia .

i	x_i	n_i	N_i	$(x_i - \mu)/\sigma$	$F(x_i)$	$F_8(x_i)$	▲ i	▲´i
1	88.5	1	1	-5.75	4.46217E-09	0.043478	0.04347826	4.462E-09
2	91.5	2	3	-4.25	1.06885E-05	0.130435	0.13042409	0.0434676
3	94.5	2	5	-2.75	0.002979763	0.217391	0.21441154	0.127455
4	97.5	6	11	-1.25	0.105649774	0.478261	0.3726111	0.1117415
5	100.5	5	16	0.25	0.598706326	0.695652	0.09694585	0.1204455
6	103.5	5	21	1.75	0.959940843	0.913043	0.04689736	0.2642887
7	106.5	2	23	3.25	0.999422975	1	0.00057703	0.0863795

Výsledok testu: hodnota testovacej charakteristiky — tabelovaná kritická hodnota

D1 = 0.372611096 > 0.33 = D0.01(23) = Dα(n)

t.j. H_0 zamietame. Výberový súbor nepochádza z daného rozdelenia.

Príklad 5

Kolmogorovov-Smirnovov test

Máme k dispozícii údaje o popolnatosti vzoriek uhlia z dodávok dvoch banských závodov (v % popola):

I. 5,2 4,8 1,9 5,6 5,5 3,4 5,3 6,4 3,5 3,8

II. 4,8 5,0 5,7 5,4 5,5 4,4 4,2 5,0 5,3 5,0

Pomocou Kolmogorovovho-Smirnovho testu preverte na hladine významnosti 5% hypotézu, že obidva výberové súbory pochádzajú z toho istého základného súboru.

(ak sú rozsahy výberov malé)
Ak sú rozsahy výberov veľké, testovanie je podobné ako pri Kolmogorovovom teste cez intervaly.

Zadanie:

i	súbor1:	súbor2.
1	5.2	4.8
2	4.8	5
3	1.9	5.7
4	5.6	5.4
5	5.5	5.5
6	3.4	4.4
7	5.3	4.2
8	6.4	5
9	3.5	5.3
10	3.8	5

Variačný rad:

1	1.9
2	3.4
3	3.5
4	3.8
5	4.2
6	4.4
7	4.8
7	4.8
9	5
9	5
9	5
12	5.2
13	5.3
13	5.3
15	5.4
16	5.5
16	5.5
18	5.6
19	5.7
20	6.4

H_0: Obidva výberové súbory pochádzajú z toho istého základného súboru.
H_1: Výberové súbory nepochádzajú z toho istého základného súboru.

Príklad 5

Kolmogorovov-Smirnovov test

Riešenie:

j	I_{j-1}	I_j	$<I_{j-1};I_j)$	$F_{10}(x)$	$G_{10}(x)$	$\lvert F_{10}(x) - G_{10}(x)\rvert$
1	.-∞	1.9	(.-∞; 1.9)	0.00	0.00	0.00
2	1.9	3.4	<1.9; 3.4)	0.10	0.00	0.10
3	3.4	3.5	<3.4; 3.5)	0.20	0.00	0.20
4	3.5	3.8	<3.5; 3.8)	0.30	0.00	0.30
5	3.8	4.2	<3.8; 4.2)	0.40	0.00	**0.40**
6	4.2	4.4	<4.2; 4.4)	0.40	0.10	0.30
7	4.4	4.8	<4.4; 4.8)	0.40	0.20	0.20
8	4.8	5	<4.8; 5)	0.50	0.30	0.20
9	5	5.2	<5; 5.2)	0.50	0.60	0.10
10	5.2	5.3	<5.2; 5.3)	0.60	0.60	0.00
11	5.3	5.4	<5.3; 5.4)	0.70	0.70	0.00
12	5.4	5.5	<5.4; 5.5)	0.70	0.80	0.10
13	5.5	5.6	<5.5; 5.6)	0.80	0.90	0.10
14	5.6	5.7	<5.6; 5.7)	0.90	0.90	0.00
15	5.7	6.4	<5.7; 6.4)	0.90	1.00	0.10
16	6.4	.∞	<6.4; .∞)	1.00	1.00	0.00

Príklad 5
Kolmogorovov-Smirnovov test

Riešenie:

$$d = n.\max_{x \in R} \left| F_n(x) - G_n(x) \right|$$

$\alpha = 0.05$

$n_1 = 10$

$n_2 = 10$

testovacia charakteristika **d = 10 * 0,4 = 4**

Hypotézu H_0 zamietame,
ak testovacia charakteristika je väčšia
ako tabelovaná hodnota = **7**

- nie je väčšia - nezamietam H_0

Príklad 6 *Testy extrém.hodnôt*

Zadanie: Na hladine významnosti 5% rozhodnite pomocou Grubbsovho a Dixonovho testu, či hodnota 23 je extrémna.

H_0: Hodnota NIE JE extrémna.
H_1: Hodnota JE extrémna.

$\alpha =$ 0.05

extrém: max pre extrémy spomedzi minimálnych hodnôt, použiť príslušné vzorce

n = 12

Riešenie:

Variačný rad: usporiadať hodnoty prvotnej tabuľky od najmenšej hodnoty po najväčšiu

Prvotná tabuľka
12
13
12
11
13
15
18
16
17
23
16
14

A) Grubbsov test:

$$T(n) = \frac{x_{(n)} - \bar{x}}{s} \cdot \sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

výberový priemer: **15**

výb. smer. odchýlka: **3.33**

testovacia charakteristika: **T(12) =2.509 > 2.387= T0.05(12)** **H_0 zamietame**

Hodnota 23 JE extrémna.

B) Dixonov test

$$Q(n) = \frac{x_{(n)} - x_{(n-1)}}{x_{(n)} - x_{(1)}}$$

testovacia charakteristika: **Q(12) =0.417 > 0.376= Q0.05(12) t.j. H_0 zamietame**

Hodnota 23 JE extrémna.

Príklad 7 *Testy normality pomocou koeficientu šikmosti a špicatosti*

H_0: Výberový súbor pochádza zo súboru s normálnym rozdelením.
H_1: Výberový súbor nepochádza zo súboru s normálnym rozdelením.

Test normality pomocou koeficientu šikmosti.

šikmosť =	-0.4083	abs(γ_3)=	0.408332	NIE JE >	0.880727	$= D_3 * u_{(1+\gamma)/2}$
rozsah súboru =	23					
alfa=	0.05	t.j. H_0 nezamietame.				
D_3=	0.4494	Výberový súbor pochádza z normálneho rozdelenia.				
=	1.9600					

$$D_3 = \sqrt{\frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}}$$

Test normality pomocou koeficientu špicatosti.

špicatosť =	-0.4873	abs(γ_4+6/(n+1))=	0.237274	NIE JE >	1.457355	$= D_4 * u_{(1+\gamma)/2}$
rozsah súboru =	23					
alfa=	0.05	t.j. H_0 nezamietame.				
D_4=	0.7436	Výberový súbor pochádza z normálneho rozdelenia.				
=	1.9600					

$$D_4 = \sqrt{\frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}}$$