PRAVDEPODOBNOSŤ

Definícia: Priestor elementárnych javov Ω sa nazýva <u>pravdepodobnostný priestor</u> (Ω, *A*, *P*) (s pravdepodobnosťou *P*), ak každému $\omega_i \in \Omega$ je priradené číslo $P(\omega_i)$, ktoré nazývame pravdepodobnosťou elementárneho javu ω_i. Požadujeme pritom, aby boli splnené axiómy:

(1) $0 \leq P(\omega_i) \leq 1$

(2) $P(\Omega) = \sum_{\omega_i \in \Omega} P(\omega_i) = 1$

Definícia: <u>Pravdepodobnosťou *P*(*A*) ľubovoľného javu *A*</u> nazývame súčet pravdepodobností elementárnych javov, ktoré sú prvkami javu *A*, teda platí:

(1) $P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i)$

(2) $P(A) \geq 0$

(3) Pravdepodobnosť zhednotenia konečného (resp. spočítateľného) počru navzájom nezlučiteľných javov je rovná súčtu ich pravdepodobností, teda platí:
$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup ... \cup A_n \cup ...) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) + ... + P(A_n) + ...$

Vlastnosti pravdepodobnosti:

(1) Nech *A*, *B* sú náhodné javy. Ak $A \subseteq B$, potom platí: $P(A) \leq P(B)$.
(2) Nech *A*, *B* sú náhodné javy. Ak $A = B$, potom platí $P(A) = P(B)$.
(3) Nech *A* je náhodný jav. Potom platí: $0 \leq P(A) \leq 1$.
(4) Nech *A*, *B* sú náhodné javy. Potom platí: $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.
(5) Nech *A*, *B* sú ľubovoľné dva náhodné javy. Potom platí:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Podmienená pravdepodobnosť

Ak pri výpočte pravdepodobnosti *P*(*A*) nepožadujeme žiadne dodatočné podmienky alebo obmedzenia, tak takúto pravdepodobnosť *P*(*A*) budeme nazývať <u>nepodmienená</u>. Ak potrebujeme nájsť pravdepodobnosť javu *A* pri dodatočnej podmienke, že nastal jav nejaký *B*, tak takúto pravdepodobnosť budeme nazývať <u>podmienená</u> a označíme ju $P(A|B)$.
Odvodíme vzťah pre výpočet podmienenej pravdepodobnosti, pričom použijeme definíciu klasickej pravdepodobnosti. Nech celkový počet rovnako pravdepodobných elementárnych javov $\omega_1, ..., \omega_n$ je *n*, t.j. $|\Omega| = n$. Nech pre priaznivé javy platí: $|A| = m_A$, $|B| = m_B$ a $|A \cap B| = m_{A\cap B}$. Platí, že $m_{A\cap B} \leq m_A$ a $m_{A\cap B} \leq m_B$. Ak nastal jav *B*, potom museli nastať niektoré z elementárnych javov ω_j, ktoré sú priaznivé javu *B*. Pri tejto podmienke bude zodpovedať javu *A* práve $m_{A\cap B}$ priaznivých javov ω_j, ktoré sú priaznivé javu $A \cap B$. Preto musí platiť:

$$P(A/B) = \frac{m_{A\cap B}}{m_B} = \frac{\frac{m_{A\cap B}}{n}}{\frac{m_B}{n}} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

Ak jav *B* je nemožným javom, potom $P(B) = 0$ a uvedený vzťah nemá zmysel. Z toho potom dostávame vzťah, ktorý nazývame <u>pravidlo o násobení pravdepodobnosti</u>.

$$P(A \cap B) = P(A).P(B|A) = P(B).P(A|B)$$

Pravdepodobnosť prieniku dvoch javov je rovná súčinu pravdepodobnosti jedného javu a podmienenej pravdepodobnosti druhého javu za predpokladu, že nastal prvý jav.

Nezávislosť javov

Definícia: Javy A a B nazývame <u>nezávislé</u>, ak platí rovnosť: $P(A \cap B) = P(A).P(B)$.

Z uvedenej definície priamo vyplýva, že ak javy A a B sú nezávislé, tak platí rovnosť $P(A|B) = P(A)$.

Vzorec pre úplnú pravdepodobnosť

Nech $H_1, H_2, \dots, H_n$ sú navzájom nezlučiteľné javy, t.j. $H_i \cap H_j = \emptyset$ pre $i \neq j$, čiže $P(H_i \cap H_j) = 0$, pre $i \neq j$. Predpokladajme, že jav A sa môže realizovať aspoň s jedným z navzájom nezlučiteľných javov $H_1, H_2, \dots, H_n$, t.j.

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap H_i)\,.$$

Javy $A \cap H_i$ a $A \cap H_j$, pre $i \neq j$ sú navzájom nezlučiteľné a preto platí:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap H_i)\,,$$

A odtiaľ použitím pravidla o násobení pravdepodobnosti dostávame vzťah pre výpočet úplnej pravdepodobnosti:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A / H_i)\,.$$

Bayesov vzorec (r. 1763)

Nech $H_1, H_2, \dots, H_n$ sú navzájom nezlučiteľné javy. Predpokladajme, že jav A sa môže realizovať aspoň s jedným z navzájom nezlučiteľných javov $H_1, H_2, \dots, H_n$, t.j.

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap H_i)\,.$$

Nech $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Chceme nájsť pravdepodobnosť javu H_i za predpokladu, že nastal jav A. Podľa pravidla o násobení pravdepodobností platí:

$$P(A \cap B) = P(H_i).P(A|H_i) = P(A).P(H_i|A),$$

Odtiaľ pre dané i dostávame:

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A / H_i)}{P(A)}\,.$$

Geometrická pravdepodobnosť

Ak priestor elementárnych javov môžeme zvoliť ako body vhodného geometrického útvaru, ktorého veľkosť (plochu, objem ...) dokážeme vypočítať (resp. určiť), tak pravdepodobnosť počítame podľa vzťahu: $P(A)=\dfrac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$, pričom javy A sú podmnožiny tohto útvaru s rovnakými vlastnosťami. Teória miery zavádza pojem merateľnej množiny. (Napr. Borelovské množiny). V úlohách musí byť splnený predpoklad symetrie, ktorý zaručuje, že pravdepodobnosť toho, že náhodne zvolený bod z Ω padne do množiny A, závisí iba na veľkosti tejto množiny a nie na jeho umiestnení (tvare a pod.).

Pravdepodobnosť opakovaných nezávislých pokusov

Dva náhodné pokusy sa nazývajú navzájom nezávislé, ak výsledok jedného z nich nemá vplyv na výsledok druhého z nich. Ak vykonáme n nezávislých pokusov, pričom pri každom pokuse nastane práve jeden z k nezlučiteľných javov $A_1, A_2, \dots, A_k$ s pravdepodobnosťami: $p_1 = P(A_1)$, $p_2 = P(A_2)$, ... , $p_k = P(A_k)$. Ak označíme symbolom $P_n(m_1, m_2, \dots, m_k)$ pravdepodobnosť toho, že pri n pokusoch nastal jav A_1 m_1 – krát, jav A_2 m_2 – krát, ... , jav A_k m_k – krát, tak potom platí vzťah:

$$P_n(m\ ,m_2,\dots,m_k)=\frac{n!}{m_1!\cdot m_2!\cdot\ldots\cdot m_k!}\cdot p_1^{m_1}\cdot p_2^{m_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{m_k}\ .$$

Špeciálne pre $k = 2$ dostávame vzťah, ktorý nazývame Bernoulliho schéma. Nech $p= p_1$ a $q = p_2 = 1 - p$, nech $m = m_1$ a $n - m = m_2$. Potom dostávame vzťah:

$$P_n(m)=\frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}\cdot p^m\cdot q^{n-m}\ .$$

Z Bernouliho vzorca sa ľahko odvodia ďalšie vzťahy, ktoré sú jeho priamym dôsledkom. Pravdepodobnosť toho, že jav A nastal pri n nezávislých pokusoch aspoň m-krát, je daný vzťahom:

$$R_n(m)=\sum_{k=m}^{n}P_n(k)=1-\sum_{k=0}^{m-1}P_n(k)\ .$$

Pravdepodobnosť, že jav A nastane pri n nezávislých pokusoch aspoň raz je rovná:

$$R_n(1)=1-q^n\ .$$

Môžeme sa pýtať aj opačne. Koľko nezávislých pokusov musíme vykonať, aby sme s pravdepodobnosťou aspoň P mohli tvrdiť, že daný jav A nastane aspoň raz. Počet pokusov n odvodíme z predchádzajúceho vzťahu a dostávame ohraničenie:

$$n\geq\frac{\ln(1-P)}{\ln(1-p)},$$

kde p je pravdepodobnosť výskytu javu A v každom z pokusov.

Najpravdepodobnejšia hodnota počtu výskytov javu A je hodnote n_P, ktorá je rovná celej časti čísla $(n + 1).p$ (t.j. $n_P = [(n + 1).p]$). Ak je číslo $(n + 1).p$ celé, potom pravdepodobnosť nadobúda svoju najväčšiu hodnotu pre hodnoty: $n_P = (n + 1).p - 1$ a $n_P = (n + 1).p$.

Ak sú pokusy nezávislé, ale pravdepodobnosti výskytu javu A sú rôzne, potom pravdepodobnosť $P_n(m)$ m-násobného výskytu javu A pri n pokusoch je rovná koeficientu pri člene u^m v rozvoji vytvárajúcej funkcie $G(u)$.

$$G(u) = \prod_{k=1}^{n} (p_k \cdot u + q_k) = \sum_{m=0}^{n} P_n(m) \cdot u^m ,$$

kde $q_k = 1 - p_k$ a p_k je pravdepodobnosť toho, s akou nastane jav A v k-tom pokuse. Koeficienty $P_n(m)$ môžeme určiť derivovaním funkcie $G(u)$:

$$P_n(m) = \frac{1}{m!} \cdot \left\{ \frac{\mathrm{d}^m G(u)}{\mathrm{d}u^m} \right\}_{u=0} .$$

Špeciálne pre $m = 0$ dostávame: $P_n(0) = q_1.q_2. \ldots .q_n$.